

BOGUMIŁ WRANA, ANNA BOROWIEC*

PRZEGLĄD WYNIKÓW OBLICZEŃ NAWODNIONYCH WARSTW GRUNTU PODDANYCH OBCIĄŻENIOM DYNAMICZNYM

THE REVIEW OF SATURATED SOIL LAYER CALCULATIONS UNDER DYNAMIC LOADING

Streszczenie

W niniejszym artykule przedstawiono zestawienie wyników obliczeń numerycznych wykonanych programem Swandyn. Do obliczeń wybrano grunty o różnym uwarstwieniu i zagęszczeniu, składające się z piasku „Nevada” oraz iłu „Bonnie”, których parametry geotechniczne zostały zaczerpnięte z badań laboratoryjnych przeprowadzonych w ramach międzynarodowego projektu VELACS. Praca ma charakter przeglądowy i podsumowujący doświadczenia związane z obliczeniami gruntów poddanych obciążeniom dynamicznym.

Słowa kluczowe: dynamika gruntu, ośrodek dwufazowy, ośrodek porowaty, analiza sygnału, transformata falkowa, projekt VELACS

Abstract

This work is the review of few years experience in soil layer calculations under dynamic loading. The layer is modeled as two-phase Biot's porous media [2] with modern contributions [3, 5] and $u-p$ simplification. Results were obtained using soil dynamics program called Swandyn. Our main interest were shear stresses and pore pressure variations in time as causing slip plane and liquefaction respectively. Geotechnical data from VELACS project laboratory tests [1] were used in model soil parameters.

Keywords: soil dynamics, two-phase media, porous media, signal processing, wavelet transform, VELACS project

* Dr hab. inż. Bogumił Wrań, prof. PK, dr inż. Anna Borowiec, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

Oznaczenia

b	– siły masowe
f	– wektor obciążeń węzłowych
g	– stała grawitacji
H	– macierz filtracji
I_D	– stopień zagęszczenia
K	– macierz sztywności
k	– współczynnik filtracji
K_f	– moduł ściśliwości cieczy
K_s	– moduł ściśliwości szkieletu
L	– operator różniczkowania
M	– macierz mas
n	– porowatość
p	– ciśnienie porowe (jego nadwyżka)
Q	– macierz sprzężenia szkieletu z wodą
R	– siły oporu przepływu cieczy
S	– macierz ściśliwości
u	– przemieszczenia szkieletu gruntowego
\mathbf{u}^f	– przyspieszenia cieczy w porach
w	– prędkość względna cieczy, $\mathbf{w} = \mathbf{u}^f - \mathbf{u}$
$\bar{\beta}_1, \beta_1, \beta_2$	– stałe Newmarka
ρ, ρ_f, ρ_s	– gęstość ośrodka porowatego oraz odpowiednio wody i szkieletu
σ	– wektor naprężeń całkowitych (zapis Voigta)
φ	– kąt tarcia wewnętrznego

1. Równania dynamiki gruntu jako ośrodka porowatego

Równania równowagi gruntu jako nawodnionego ośrodka porowatego, zwanego również mieszaniną szkieletu i cieczy porowej, wywodzą się z równań dynamicznej konsolidacji Biota [2]. Bazując na tych równaniach, O.C. Zienkiewicz [5] oraz B.A. Schrefler [3], po licznych uproszczeniach i przekształceniach, podali, stosowane obecnie w dynamice gruntów, równania sformułowania silnego, tu w notacji Voigta (1) i (2)

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - \rho_f \dot{\mathbf{w}} = 0 \quad (1)$$

$$-\nabla p + \rho_f \mathbf{b} - \rho_f \ddot{\mathbf{u}} - \frac{\rho_f}{n} \dot{\mathbf{w}} - \xi^{-1} \mathbf{w} = 0 \quad (2)$$

gdzie:

$$\xi = \frac{k}{\rho_f g} \quad \text{– zmodyfikowany współczynnik filtracji.}$$

Równania (1) i (2) nie uwzględniają zmian masy podczas przepływu cieczy przez pory szkieletu. Równanie takie zostało wyprowadzone przez Zienkiewicza [5] i Schreflera [3],

przy czym pierwszy z autorów uczynił to na drodze inżynierskiego wycucia i doświadczeń laboratoryjnych, a drugi z równań termodynamiki

$$\nabla^T \mathbf{w} + \alpha \mathbf{m} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\dot{p}}{Q} + n \frac{\dot{\rho}_f}{\rho_f} + \dot{s}_0 = 0 \quad (3)$$

gdzie:

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – wektor prędkości odkształceń,
 $n \frac{\dot{\rho}_f}{\rho_f}, \dot{s}_0$ – człony związane odpowiednio ze zmianami gęstości oraz prędkością ekspansji objętościowej na skutek zmian temperatury.

Przy czym Q nie ma związku z przepływem, lecz jest zdefiniowane jako związek pomiędzy porowatością a modułami ściśliwości cieczy i szkieletu

$$\frac{1}{Q} = \frac{n}{K_f} + \frac{1-n}{K_s} \quad (4)$$

Zaprezentowany komplet trzech równań (1)–(3) stanowi, w dynamice porowatego ośrodka gruntowego, tak zwane sformułowanie pełne, oznaczane również $\mathbf{u}-\mathbf{w}-p$. Występują w nim przemieszczenia szkieletu \mathbf{u} i ich pochodne po czasie $\dot{\mathbf{u}}$ – prędkości, $\ddot{\mathbf{u}}$ – przyspieszenia, prędkości względne cieczy \mathbf{w} i ich pierwsza pochodna po czasie $\dot{\mathbf{w}}$ – przyspieszenia oraz zmiany ciśnień porowych p i ich pierwsza pochodna po czasie \dot{p} – prędkości zmian. W praktycznych obliczeniach stosuje się najczęściej sformułowanie uproszczone $\mathbf{u}-p$, które otrzymuje się ze sformułowania pełnego $\mathbf{u}-\mathbf{w}-p$, zakładając laminarny przepływ cieczy, zgodnie z prawem Darcy'ego, oraz wprowadzając kilka dodatkowych założeń [5]. Równania sformułowania uproszczonego $\mathbf{u}-p$ są następujące

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (5)$$

$$\nabla^T \xi (-\nabla p + \rho_f \mathbf{b} - \rho_f \ddot{\mathbf{u}}) + \alpha \mathbf{m} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\dot{p}}{Q} = 0 \quad (6)$$

2. Model numeryczny metody elementów skończonych

Metoda elementów skończonych sformułowania uproszczonego $\mathbf{u}-p$ (5), (6) wymaga przejścia z równań różniczkowych na równania całkowe. Zgodnie z MES poszukiwane pola ciśnień p i przemieszczenia \mathbf{u} są interpolowane przez wartości węzłowe $\tilde{\mathbf{p}}$ i $\tilde{\mathbf{u}}$ przy zastosowaniu funkcji kształtu. Po podstawieniu i wszystkich wymaganych przekształceniach komplet równań metody elementów skończonych zapisano w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{u}}} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{(1)} \\ \mathbf{f}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Jest to macierzowy układ równań algebraicznych, gdzie niewiadomymi są wartości węzłowe przemieszczeń $\tilde{\mathbf{u}}$ i ciśnień $\tilde{\mathbf{p}}$ oraz ich pochodne po czasie. Wspomniane macierze mają następujący sens fizyczny: \mathbf{M} jest macierzą mas, \mathbf{K} – macierzą sztywności, \mathbf{Q} – macierzą sprzężenia szkieletu z wodą, \mathbf{H} – macierzą filtracji, a \mathbf{S} – macierzą ściśliwości. Po prawej stronie równania (7) są znane wartości obciążeń węzłowych.

Układ równań (7) uwzględnia nieliniowy związek konstytutywny gruntu w ramach teorii plastyczności, zatem jest to układ nieliniowy dla węzłowych zmiennych przestrzennych, a ponadto jest zmienny w czasie (ponieważ występuje pierwsza i druga pochodna w czasie). Proces dyskretyzacji występuje więc zarówno w przestrzeni, jak i w czasie.

Do rozwiązania układu równań różniczkowych względem czasu zastosowano schemat Newmarka. Ostatecznie dla i -tej iteracji rozwiązywania nieliniowego układu przy n -tym kroku czasowym rozwiązywany jest następujący układ równań

$$\begin{Bmatrix} \Psi_{n+1}^{(1)} \\ \Psi_{n+1}^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{n+1} + (\mathbf{K}_T)_{n+1} \beta_2 \Delta t^2 & -\mathbf{Q}_{n+1} \bar{\beta}_1 \Delta t \\ \mathbf{Q}_{n+1}^T \beta_1 \Delta t & \mathbf{S}_{n+1} + \mathbf{H}_{n+1} \bar{\beta}_1 \Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d(\Delta \tilde{\mathbf{u}}_n) \\ d(\Delta \tilde{\mathbf{p}}_n) \end{Bmatrix} = 0 \quad (8)$$

gdzie:

$\beta_1, \beta_2, \bar{\beta}_1$ – parametry interpolacji odpowiednio: prędkości, przemieszczeń i ciśnień porowych.

Wektory sił resztkowych w stopniach swobody, odpowiednio cieczy i szkieletu, wyrażane są wzorami

$$\Psi_{n+1}^{(1)} = \mathbf{M}_{n+1} \Delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_n + \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1} \bar{\beta}_1 \Delta \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_n - \mathbf{f}_{n+1}^{(1)} = 0 \quad (9)$$

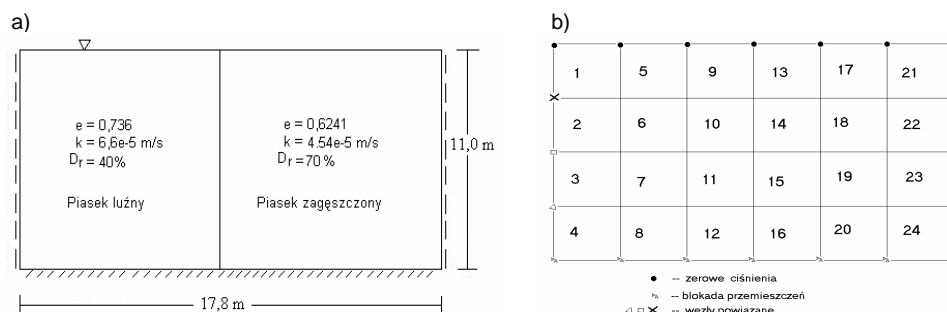
$$\Psi_{n+1}^{(2)} = \mathbf{Q}_{n+1}^T \beta_1 \Delta \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_n \Delta t + \mathbf{S}_{n+1} \Delta \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_n + \mathbf{H}_{n+1} \bar{\beta}_1 \Delta \dot{\tilde{\mathbf{p}}}_n \Delta t - \mathbf{f}_{n+1}^{(2)} = 0 \quad (10)$$

Nieliniowość fizyczna (związki konstytutywne szkieletu) w trakcie różniczkowania po czasie układu równań (9) jest uwzględniona w macierzy \mathbf{P} . W kolejnym kroku czasowym, $t = t_{n+1}$, należy określić \mathbf{P}_{n+1} przez całkowanie sprężysto-plastycznego równania konstytutywnego, przy znanym polu naprężeń z kroku poprzedniego. W tym celu zastosowano procedurę liniowej iteracji Newtona-Raphsona (stąd indeks i w równaniu (8)). W przedstawionych poniżej przykładach przyjęto model konstytutywny szkieletu uogólnionej plastyczności Pastora-Zienkiewicza [5].

3. Zestawienie obliczeń

Celem obliczeń było wyznaczenie zmienności w czasie pól naprężeń w szkielecie i ciśnień wody w porach na przykładzie warstw piasku „Nevada” i ilu „Bonnie” pod wpływem obciążeń dynamicznych. Obliczenia wykonano programem SWANDYNE, przeznaczonym do rozwiązywania nieliniowych zadań dynamiki.

Geometria obszarów nie ulegała zmianie, rozważano prostokątne warstwy o wymiarach 11,0 m na 17,8 m. Przykładowe ułożenie warstw i podział metody elementów skończonych wraz z warunkami brzegowymi przedstawiono na rycinie 1.



Ryc. 1. Warstwa piasku: a) obszar i parametry, b) siatka MES z warunkami brzegowymi

Fig. 1. Sand layer: a) soil area and its parameters, b) FEM mesh and BC

Model MES ośrodka dwufazowego w płaskim stanie odkształcenia wymaga dwóch oddzielnych siatek elementów skończonych: jednej dla szkieletu gruntowego, drugiej dla ciśnień porowych. W każdym węźle występują trzy stopnie swobody: dwa przemieszczeniowe i jeden na ciśnienie porowe. Poza tym przyjęto, że węzły lewego brzegu warstwy mają takie same stopnie swobody jak węzły brzegu prawego i nazwano je węzłami powiązanymi. Założono również, że warstwy spoczywają na nieskończenie sztywnym podłożu, przez które przekazywane jest wymuszenie.

Obliczenia dynamiczne rozpoczęto od stanu naprężenia w gruncie, jaki występuje po statycznym obciążeniu ciężarem własnym. Ponadto rozważano pełne nasycenie wodą (powierzchnia swobodna pokrywa się z powierzchnią warstwy gruntu).

Parametry geotechniczne, takie jak wskaźnik porowatości e , współczynnik filtracji k czy stopień zagęszczenia I_D , dla poszczególnych przypadków zestawiono w tablicy 1. Parametry te przyjęto za międzynarodowym projektem VELACS [1], w ramach którego przeprowadzono badania laboratoryjne próbek piasku „Nevada” i iltu „Bonnie”.

Ze względu na ograniczone ramy niniejszego artykułu skupiono się tylko na dwóch przykładach – oznaczonych tu literami B i D.

Tablica 1

Parametry geotechniczne gruntów użytych w obliczeniach

Przykład	Rodzaj gruntu	e	k [m/s]	I_D
B	piasek	0,736	$6,6 \cdot 10^{-5}$	0,4
D	piasek zagęszczony	0,624	$4,5 \cdot 10^{-5}$	0,7

3.1. Przykład B – rozchodzenie się naprężeń ścinających w dwufazowym ośrodku gruntowym

Rozważano zachowanie się warstwy piasku „Nevada”, w całości wypełnionej piaskiem luźnym. Analizę dynamiczną przeprowadzono dla wymuszenia dynamicznego w postaci impulsu przyspieszenia na kierunku pionowym. Uzyskano w ten sposób odpowiedź gruntu z pełnym widmem częstotliwości.

W celu prześledzenia zmienności w czasie pól naprężeń ścinających sporządzono mapy naprężeń oraz przestrzenne wykresy tych wielkości dla każdej chwili. W pierwszej fazie impulsowego wymuszenia naprężenia tworzyły skośne pasy, wskazując na płaszczyzny poślizgu. Pasy te krzyżowały się ze sobą, tworząc, znane ze statyki gruntów, pasma ścinania (por. [3]). W omawianym przykładzie występowały one nadal po skończeniu impulsu i zmieniły kierunek na poprzeczny do wymuszenia. Mieliśmy zatem do czynienia z falą poprzeczną. Z biegiem czasu następowało powolne wygaszenie naprężeń.

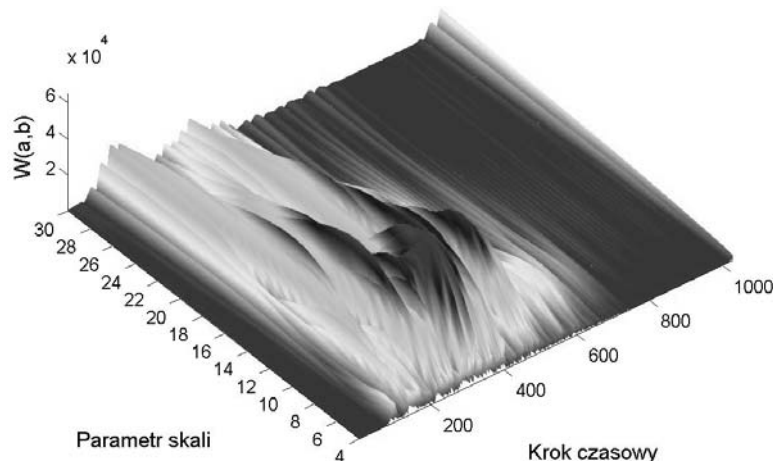
3.2. Przykład D – analiza dynamiczna wyników warstwy zagęszczonego piasku metodą analizy sygnału

Rozważano zachowanie się warstwy zagęszczonego piasku „Nevada” (por. tabl. 1) w czasie. Celem obliczeń było przedstawienie wyników uzyskanych metodami analizy sygnału oraz badanie wpływu gęstości siatki na otrzymywane wyniki.

W celu oszacowania zakresu częstotliwości występujących w wymuszeniu poddano jego zapis dyskretnej transformacie Fouriera.

W niniejszym przykładzie wyznaczono naprężenia styczne w środku warstwy dla siatki rzadkiej i dla siatki zagęszczonej w każdej chwili. Różnice w odpowiedzi obu siatek były nieznaczne, co oznacza, że zagęszczenie siatki nie wpłynęło na wynik analizy.

Aby dokładniej przebadać wpływ wielkości siatki na zmianę częstotliwości odpowiedzi, sporządzono spektrogramy. Badały one wielkość dyskretnej transformaty Fouriera w przedziałach czasu zwanych okienkami. Parametry przyjęte do obliczenia spektrogramu miały na celu przeszukanie jak największej liczby częstotliwości. Porównanie spektrogramów pokazało niewielkie różnice w charakterystyce częstotliwościowej między siatką rzadką a zagęszczoną. W związku z tym dalsze analizy i rozważania przeprowadzano już tylko dla siatki o mniejszej liczbie elementów.



Ryc. 2. Przestrzenny wykres funkcji dopasowania transformaty falkowej „gaus5” dla odpowiedzi

Fig. 2. Response presented by mean of Gaussian wavelet "gaus5" transform

W celu zwiększenia dokładności analizy sygnału skierowano zainteresowanie na transformaty falkowe. Dobór parametrów sterujących falką nie stanowił problemu ze względu na wcześniejsze rozpoznanie zakresu częstotliwości. Niezaprzeczalną zaletą transformaty falkowej w stosunku do transformaty Fouriera jest występowanie dodatkowej osi czasu (por ryc. 2).

Rycina 2 stanowi trójwymiarową ilustrację funkcji współczynnika dopasowania falki $W(a, b)$ dla sygnału, który określa odpowiedź gruntu w naprężeniach ścinających. Tematykę tę dokładniej przedstawiono w pracy [4].

4. Wnioski

Przedstawione przykłady służyły prześledzeniu zmienności w czasie pól naprężeń w szkielecie i ciśnien w porach. Naprężenia ścinające odgrywają dużą rolę w stateczności warstwy gruntu, ponieważ odpowiadają za powstanie płaszczyzn poślizgu w nasypach i skarpach z gruntu. Zjawisko tworzenia się pasów ścinania na skutek obciążeń statycznych jest dobrze znane i opisane. W niniejszym artykule zaprezentowano zmiany takich naprężeń w czasie. W przykładzie B pokazano zjawisko kumulacji naprężeń stycznych i tworzenia się skośnych i krzyżujących się pasm ścinania.

Śledzenie zmian ciśnień porowych przydatne jest w obserwacji zjawiska upłynnienia gruntu. Jako źródło jego powstawania wskazuje się ciśnienia porowe, a dokładniej ich nadmierny wzrost i niemożność swobodnej redystrybucji w trakcie obciążeń dynamicznych.

Otrzymane wyniki poddano obróbce, stosując narzędzia analizy sygnału, szczególną uwagę poświęcając transformatom falkowym.

Analiza układu, w którym występują szybkie zmiany w czasie, ma często charakter globalny, a nie lokalny (w przeciwieństwie do zagadnień statyki), przez co rozwiązanie nie zależy od gęstości siatki.

Na zakończenie warto podkreślić, że równania dynamicznej konsolidacji (7) pozwalają na śledzenie zachowania warstwy gruntu nawet po zaniknięciu wymuszenia. Obserwacje takie nie byłyby możliwe w przypadku stosowania klasycznych równań falowych.

Literatura

- [1] Arulmoli K., et al., VELACS Laboratory Testing Program Soil Data Report, National Science Foundation, Washington 1993.
- [2] Biot M. A., *Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid – Saturated Porous Solid*, The Journal of the Acoustical Society of America, 28 (2), 168-178.
- [3] Schrefler B.A., Lewis R.W., *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, John Wiley & Sons, New York 1998.
- [4] Wrańa B., Borowiec A., *Zastosowanie transformaty falkowej do analizy wyników obliczeń dynamicznych nasyconej warstwy piasku*, Materiały pokonferencyjne

XVI Konf. Nauk.: „Metody komputerowe w projektowaniu i analizie konstrukcji hydrotechnicznych”, Kraków–Korbielów 2004.

- [5] Zienkiewicz O.C., Chan A.H.C., Pastor M., Schrefler B.A., Shiomi T., *Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering*, John Wiley & Sons, Chichester 2000.