

CZESŁAW CICHÓN\*, SŁAWOMIR KOCZUBIEJ\*\*

## KONSYSTENTNY MODEL MES DLA RAM PRZESTRZENNYCH O PRĘTACH CIENKOŚCIENNYCH

### CONSISTENT FEM MODEL FOR THIN-WALLED SPACE FRAMES

#### Streszczenie

W artykule zaproponowano model skończenie elementowy 1D/3D do analizy statycznej ram przestrzennych o prętach cienkościennych i dowolnym przekroju poprzecznym otwartym. W modelu tym standardową dyskretyzację konstrukcji belkowymi elementami cienkościennymi połączono z przestrzenną dyskretyzacją węzłów. Rozpatrzono też szczególnie przypadek konstrukcji węzłów zapewniający kompletną transmisję spaczenia. W takim przypadku możliwa jest dyskretyzacja konstrukcji tylko belkowymi elementami cienkościennymi. Efektywność zaproponowanej w artykule metody analizy skończenie elementowej została potwierdzona w przykładach.

*Słowa kluczowe: konstrukcje cienkościenne, MES, przestrzenny element węzłowy*

#### Abstract

In the paper the finite model 1D/3D for static analysis of thin-walled space structures with open cross-section has been proposed. The standard discretization using beam thin-walled elements is connected with the space discretization of the frame joints. The case of special construction of joints is where complete warping transmission is assured has also been considered. In such case it is possible to discretize the structure with the help of beam thin-walled elements only. Examples confirmed effectiveness of the propose FEM analysis.

*Keywords: thin-walled structures, FEM, space joint element*

\* Prof. dr hab. inż. Czesław Cichoń, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

\*\* Mgr inż. Sławomir Koczubiej, Wydział Zarządzania i Modelowania Komputerowego, Politechnika Świętokrzyska.

## 1. Wstęp

Rozwiązanie problemu metodą elementów skończonych (MES) jest przybliżone i z natury obarczone błędem. Błąd rozwiązania może być szacowany na różne sposoby, rozmaite są też metody poprawy jakości rozwiązania [23]. W tym kontekście w mechanice konstrukcji rozwijana jest obecnie pewna procedura obliczeń metodą elementów skończonych znana pod nazwą AM-FEM (ang. *Adaptive Modelling – Finite Element Method*) [22]. W tej procedurze błąd rozwiązania przybliżonego jest kontrolowany *a posteriori* i poprawę jakości obliczeń otrzymuje się, łącząc adaptację modelu matematycznego z adaptacją skończenie wymiarowej przestrzeni aproksymacji (typu:  $h$ ,  $p$  lub  $hp$ ).

Taką procedurę postępowania wykorzystano w artykule do analizy statycznej sprężystych ram przestrzennych o prętach cienkościennych, formułując spójny i stosunkowo prosty model matematyczny konstrukcji, będący pewną adaptacją dokładniejszego modelu, lecz obliczeniowo bardziej złożonego. Jakość tak otrzymanego modelu obliczeniowego MES poprawiano następnie poprzez odpowiednie modelowanie skończenie elementowe konstrukcji.

Spotykane dość powszechnie w praktyce inżynierskiej modelowanie ram przestrzennych tylko za pomocą belkowych elementów skończonych nie pozwala uwzględnić efektów lokalnych, takich jak wyboczenie środników, lub koncentracji naprężeń powodującej deformacje plastyczne oraz opisać rzeczywistych warunków podparcia. Oznacza to, że ramy złożone z prętów cienkościennych powinny być w zasadzie modelowane z zastosowaniem elementów skończonych powłokowych [27], co jednak znacznie podnosi koszt obliczeń.

Racjonalnym rozwiązaniem przyjętym w niniejszym artykule jest wykorzystanie faktu lokalności deformacji i odróżnienie w modelowaniu konstrukcji przestrzennego charakteru obszarów węzłowych od geometrycznie liniowego charakteru łączących ich belek. Istotnym problemem obliczeniowym, który występuje w takim modelu (oznaczonym jako model 1D/3D), jest złożenie różnie modelowanych części konstrukcji (tzn. opisywanych różnymi modelami matematycznymi) w jeden układ dyskretny MES. Problem ten rozwiązano, traktując obszar węzła jako obiekt przestrzenny, modelowany elementami powłokowymi. Następnie w obiekcie tym dokonywana jest kondensacja statyczna prowadząca do *przestrzennego elementu węzłowego* z translacyjnymi stopniami swobody na każdej ze ścianek tego elementu łączącej węzeł z prętami ramy. W końcu, wykorzystując równania więzów wynikające z przyjęcia teorii Własowa dla belek cienkościennych [26], dokonywana jest transformacja translacyjnych stopni swobody do siedmiu stopni swobody w węzłach belkowych elementów cienkościennych. W efekcie otrzymujemy macierz sztywności i wektor sił dla przestrzennego elementu węzłowego zgodnego z belkowymi elementami cienkościennymi [10]. Dalsze postępowanie jest już typowe dla MES.

Jakość rozwiązania stosującego model 1D/3D zależy od wielu czynników, a mianowicie od wielkości przyjętych podobszarów modelowanych przestrzennymi elementami węzłowymi, od jakości użytych elementów powłokowych i belkowych elementów cienkościennych oraz od gęstości siatki skończenie elementowej. Ocenę końcowych rozwiązań dokonywano przez ich porównanie z rozwiązaniami dla ram modelowanych jak w pełni konstrukcje powłokowe (oznaczonymi jako model 3D).

W artykule rozważono ponadto ważny dla praktyki projektowej problem określenia warunków szczególnych dla konstrukcji węzłów ram, które muszą być spełnione, aby rezultaty obliczeń takich ram modelowanych tylko za pomocą belkowych elementów cienko-

ściennych (oznaczonych jako model 1D) mogły być uznane za wiarygodne. Poprawność tych warunków sprawdzono na przykładach różnych konstrukcji węzłów.

Opisana idea przestrzennego elementu węzłowego została wykorzystana w [24] do analizy statycznej rusztów z belkami o symetrycznym przekroju dwuteowym. Macierz sztywności elementu węzłowego konstruowana jest w niniejszym artykule jednak w sposób bezpośredni, metodą jednostkowych stanów wymuszeń. W [8] rozważane są problemy termosprężyste w ramach złożonych z prętów cienkościennych, a do połączenia modelu powłokowego z modelem belkowym zastosowano elementy przejściowe z dodatkowymi mechanicznymi i termicznymi równaniami więzów, uwzględniającymi deformację spaczenia. Według rozeznania autorów w [6] po raz pierwszy zastosowano koncepcję elementów przejściowych do modelowania połączenia półsztywnego rygla ze słupem w węźle ramy przestrzennej, dyskretyzowanej cienkościennymi elementami belkowymi.

Oprócz ciągle rozwijanych prac podstawowych w teorii pręta cienkościennego, zwłaszcza tych dotyczących problemów stateczności [3, 4, 11, 17, 20], oraz wprowadzania do analizy statycznej i dynamicznej metodą elementów skończonych prętów o złożonych przekrojach cienkościennych [12], konstrukcje cienkościenne były również przedmiotem wielu badań eksperymentalnych [9, 13, 21]. W [9] dokonano krytycznego omówienia wyników takich badań przeprowadzonych do 1995 r., cytując 286 pozycji literatury.

Zakres niniejszego artykułu jest następujący. W drugim rozdziale podano podstawowe wzory opisujące pola przemieszczeń w pręcie cienkościennym. Następnie – wykorzystując równania więzów, wiążące przemieszczenia w płaszczyznach środkowych powłoki i pręta cienkościennego – sformułowano metodę obliczania macierzy sztywności i wektora obciążenia dla przestrzennego elementu węzłowego, ze stopniami swobody odpowiadającymi stopniom swobody w węźle belkowego elementu skończonego. Efektywność i skuteczność proponowanej metody obliczeń zweryfikowano na przykładach. W rozdziale trzecim sformułowano wspomniane wyżej postulaty dla szczególnej konstrukcji ramy, których spełnienie pozwala na zastosowanie w obliczeniach metodą elementów skończonych tylko belkowych elementów skończonych i wykonano stosowne przykładowe obliczenia. Wszystkie obliczenia przeprowadzono w systemie MATLAB [16] za pomocą autorskiego oprogramowania. W przypadku modeli 3D obliczenia były weryfikowane z wynikami uzyskanymi w programie ABAQUS [1]. W zadaniach obliczanych w programie ABAQUS używano takiej samej dyskretyzacji jak dla MATLAB-a i ośmiowęzłowych, powłokowych elementów skończonych S8R. W rozdziale czwartym podsumowano wyniki pracy i wskazano na możliwości jej praktycznego wykorzystania.

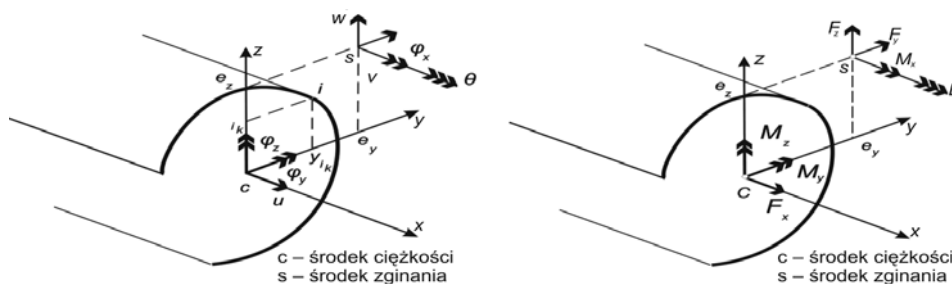
## 2. Model skończenie elementowy dla ramy przestrzennej 1D/3D

### 2.1. Pole przemieszczeń i równania więzów

Przyjmijmy hipotezę Własowa, że powierzchnia środkowa pręta cienkościennego o dowolnym profilu otwartym deformuje się tak, jakby w płaszczyźnie każdego przekroju poprzecznego rozpostarta była na linii środkowej sztywna tarcza, jednak idealnie wiotka dla deformacji w kierunku prostopadłym do tego przekroju [18]. Zgodnie z tą hipotezą pole przemieszczeń punktów linii środkowej dowolnego przekroju można wyznaczyć poprzez złożenie przemieszczenia linii środkowej należącej do nieodkształcalnej tarczy oraz jej spaczenia. Przesunięcie tarczy sztywnej możemy z kolei przedstawić jako sumę prze-

mieszczenia translacyjnego środka zginania<sup>1</sup> oraz przemieszczenia od obrotu wokół osi obrotu przechodzącej przez ten punkt.

Pole przemieszczeń dla niesymetrycznego otwartego przekroju cienkościennego wyznaczymy w lokalnym układzie współrzędnych pręta  $(x, y, z)$ , przyjmując siedem parametrów przemieszczeń (nazywanych dalej stopniami swobody), z którymi zwiążemy siły przekrojowe (rys. 1).



Rys. 1. Parametry przemieszczeniowe i siły przekrojowe  
Fig. 1. Displacement parameters and stress resultants

Oś  $x$  jest osią ciężkości pręta, a osie  $y, z$  są osiami głównymi centralnymi przekroju poprzecznego. Przeszaczenia  $u, v, w$  opisują sztywną translację przekroju poprzecznego, odpowiednio, w kierunku  $x$  – środka ciężkości  $C$  i w kierunkach  $y, z$  – środka zginania  $S$ .  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  są z kolei kątami sztywnych obrotów wokół osi  $x$  w środku zginania i  $y, z$  w środku ciężkości. Stosownie do teorii pręta cienkościennego spłaszczenie jest definiowane przez iloczyn pochodnej kąta skręcenia  $\theta = \frac{d\varphi_x}{dx}$  i współrzędnej wycinkowej  $\omega$ .

W rezultacie współrzędne wektora przemieszczeń  $\mathbf{u}_i^{kc}(y_{i_k}, z_{i_k})$  dowolnego punktu  $i$  w przekroju poprzecznym pręta cienkościennego  $x = x_k$  obliczane są ze wzorów

$$\begin{aligned} u_i^{kc}(y_{i_k}, z_{i_k}) &= u^k - \varphi_z^k \cdot y_{i_k} + \varphi_y^k \cdot z_{i_k} + \theta^k \cdot \omega_{i_k} \\ v_i^{kc}(y_{i_k}, z_{i_k}) &= v^k + (e_z^k - z_{i_k}) \cdot \varphi_x^k \\ w_i^{kc}(y_{i_k}, z_{i_k}) &= w^k + (-e_y^k + y_{i_k}) \cdot \varphi_x^k \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie  $e_y^k$  i  $e_z^k$  są współrzędnymi środka zginania, a  $y_{i_k}$  oraz  $z_{i_k}$  są współrzędnymi punktu  $i$ .

Utożsamiając następnie  $u_i^{kc}(y_{i_k}, z_{i_k})$ ,  $v_i^{kc}(y_{i_k}, z_{i_k})$  i  $w_i^{kc}(y_{i_k}, z_{i_k})$  ze współrzędnymi wektora przemieszczeń  $u_i^{kp}(y_{i_k}, z_{i_k})$  dla punktów  $x = x_k$  powierzchni środkowej powłoki<sup>2</sup> wężła, możemy napisać układ równań więzów wiążących przemieszczenia powłoki z prze-

<sup>1</sup> Nazywanego też środkiem ścinania.

<sup>2</sup> Przez powłokę rozumiemy powłokę przestrzennego elementu węzłowego.

mieszczeniami belki cienkościennej we wspólnym przekroju poprzecznym, który w dalszym ciągu będziemy nazywać ścianką  $k$ , w postaci

$$\mathbf{u}_i^{kp}(y_{i_k}, z_{i_k}) = \mathbf{u}_i^{kc}(y_{i_k}, z_{i_k}) \quad (2)$$

Wykorzystując (1), w (2) otrzymamy w każdym punkcie  $i$  układ trzech równań, który ma formę macierzową

$$\mathbf{u}_i^{kp}(y_{i_k}, z_{i_k}) = \mathbf{B}_{i_k}^k(y_{i_k}, z_{i_k}, \omega_{i_k}) \cdot \mathbf{q}^{kc} \quad (3)$$

gdzie  $\mathbf{q}^{kc}$  jest wektorem lokalnych stopni swobody belkowego elementu cienkościennego<sup>3</sup>

$$\mathbf{q}^{kc} = \{u^k \quad v^k \quad w^k \quad \varphi_x^k \quad \varphi_y^k \quad \varphi_z^k \quad \theta^k\} \quad (4)$$

a macierz  $\mathbf{B}_{i_k}^k(y_{i_k}, z_{i_k}, \omega_{i_k})$  definiuje prawo transformacji pomiędzy translacyjnymi stopniami swobody elementów powłokowych i stopniami swobody belkowego elementu cienkościennego na ścianie  $k$

$$\mathbf{B}_{i_k}^k(y_{i_k}, z_{i_k}, \omega_{i_k}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{i_k} & -y_{i_k} & \omega_{i_k} \\ 0 & 1 & 0 & e_z^k - z_{i_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -e_y^k + y_{i_k} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

## 2.2. Przestrzenny element węzłowy

Przyjmujemy, że ze struktury ramy wydzielony został węzeł przestrzenny łączący się z prętami na ściankach  $k = 1, 2, \dots, K$ . Węzeł ten dyskretyzujemy skończonymi elementami powłokowymi w taki sposób, aby węzły elementów powłokowych opisywały również geometrię przekrojów poprzecznych prętów łączących się z węzłem ramy na każdej ze ścianek  $k$ . Pręty ramy dyskretyzujemy belkowymi elementami cienkościnnymi (rys. 2).

W niniejszym artykule do modelowania węzła wykorzystano element powłokowy otrzymany przez uzupełnienie szóstym stopniem swobody [6, 19, 30] ośmiowęzłowego, izoparametrycznego elementu skończonego płytowego RSE-V [19]. Po przeprowadzeniu wielu obliczeń testowych macierz sztywności modyfikowano, przyjmując

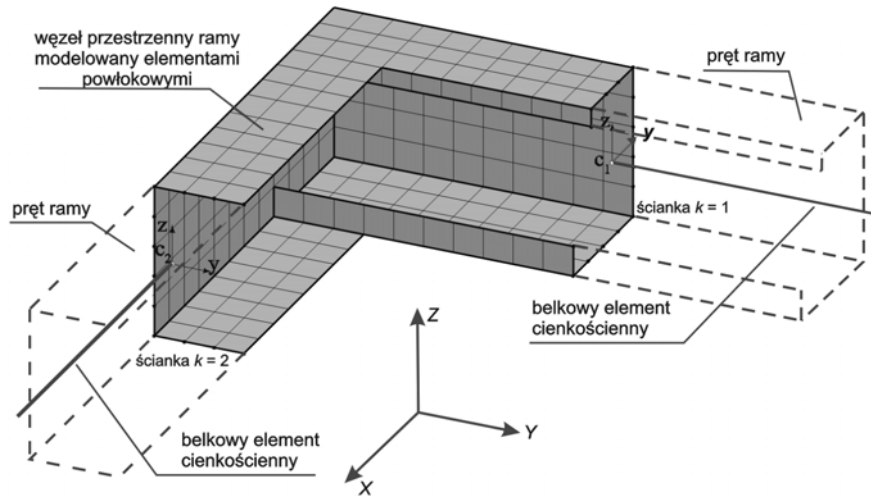
$$K_{\varphi_z} = \min(K_{\varphi_x}, K_{\varphi_y}) \cdot 10^{-8} \quad (6)$$

gdzie  $K_{\varphi_x}, K_{\varphi_y}, K_{\varphi_z}$  są elementami na przekątnej macierzy sztywności związanymi z obrotowymi stopniami swobody w poszczególnych węzłach elementu.

Pręty ramy modelowano dwuwęzłowymi cienkościnnymi elementami skończonymi z siedmioma stopniami swobody w węźle [14, 15, 28].

Pierwszym krokiem w sformułowaniu macierzy sztywności i wektora sił dla *przestrzennego elementu węzłowego* jest kondensacja statyczna pełnej macierzy sztywności węzła do postaci ze stopniami swobody zredukowanymi tylko do translacyjnych stopni swobody na ściankach  $k = 1, 2, \dots, K$ , we wspólnych węzłach powłoki i prętów ramy,  $i_k, i_k = 1, 2, \dots, I_k$ .

<sup>3</sup>  $\{\dots\}$  jest oznaczeniem wektora kolumnowego.



Rys. 2. Przestrzenny element węzłowy  
Fig. 2. Space joint element

Wektor stopni swobody  $\mathbf{u}_i^{kc}$  transformujemy do globalnego układu współrzędnych  $(X, Y, Z)$  wg wzoru

$$\mathbf{Q}_{i_k}^k = (\mathbf{T}_{i_k}^k)^T \cdot \mathbf{u}_i^{kc} \quad (7)$$

gdzie  $\mathbf{Q}_{i_k}^k$  jest wektorem globalnych translacyjnych stopni swobody w węźle  $i_k$  na ścianie  $k$  oraz  $\mathbf{T}_{i_k}^k$  jest macierzą transformacji.

Wykorzystując w (7) zależność (3) z warunkiem (2), otrzymamy

$$\mathbf{Q}_{i_k}^k = (\mathbf{T}_{i_k}^k)^T \cdot \mathbf{B}_{i_k}^k \cdot \mathbf{q}^{kc} \quad (8)$$

Wektor lokalnych stopni swobody  $\mathbf{q}^{kc}$  możemy z kolei wyrazić przez wektor globalnych stopni swobody  $\mathbf{Q}^{kc}$  wzorem

$$\mathbf{q}^{kc} = \mathbf{T}^{kc} \cdot \mathbf{Q}^{kc} \quad (9)$$

gdzie  $\mathbf{T}^{kc}$  jest macierzą transformacji cienkościennych stopni swobody [29].

W końcu, podstawiając (9) do (8), otrzymamy wzór wiążący globalne translacyjne stopnie swobody w węźle  $i_k$  z globalnymi cienkościennymi stopniami swobody na ścianie  $k$  w postaci

$$\mathbf{Q}_{i_k}^k = (\mathbf{T}_{i_k}^k)^T \cdot \mathbf{B}_{i_k}^k \cdot \mathbf{T}^{kc} \cdot \mathbf{Q}^{kc} \quad (10)$$

który możemy zapisać w formie

$$\mathbf{Q}_{i_k}^k = \mathbf{A}_{i_k}^k \cdot \mathbf{Q}^{kc} \quad (11)$$

gdzie macierz transformacji  $\mathbf{A}_{i_k}^k$  wynosi

$$\mathbf{A}_{i_k}^k = (\mathbf{T}_{i_k}^k)^T \cdot \mathbf{B}_{i_k}^k \cdot \mathbf{T}^{kc} \quad (12)$$

Wektor globalnych translacyjnych stopni swobody  $\mathbf{Q}^k$  dla wszystkich węzłów  $i_k = 1, 2, \dots, I_k$  na ścianie  $k$  wiąże z cienkościennymi stopniami swobody  $\mathbf{Q}^{kc}$  wzór

$$\mathbf{Q}^k = \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{Q}^{kc} \quad (13)$$

z macierzą transformacji  $\mathbf{A}^k$  w formie

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^k \\ \mathbf{A}_2^k \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{I_k}^k \end{bmatrix} \quad (14)$$

Definiując następnie wektor  $\mathbf{Q}^c$  globalnych cienkościennych stopni swobody dla całego przestrzennego elementu węzłowego z  $K$  ściankami w postaci

$$\mathbf{Q}^c = \{\mathbf{Q}^{1c}, \mathbf{Q}^{2c}, \dots, \mathbf{Q}^{Kc}\} \quad (15)$$

oraz wektor globalnych translacyjnych stopni swobody dla tego elementu skończonego  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \{\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \dots, \mathbf{Q}^K\} \quad (16)$$

otrzymamy wzór

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^c \quad (17)$$

z macierzą transformacji  $\mathbf{A}$  w formie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^2 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^3 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^K \end{bmatrix} \quad (18)$$

### 2.3. Układ równań MES

Równanie równowagi MES dla przestrzennego elementu węzłowego po kondensacji statycznej z translacyjnymi stopniami swobody ma formę

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \quad (19)$$

gdzie  $\mathbf{K}$  jest globalną macierzą sztywności, a  $\mathbf{P}$  jest wektorem obciążenia.

Wykorzystując w (19) wzór (17), otrzymano końcową postać równania równowagi MES wyrażonego poprzez cienkościennie stopnie swobody

$$\tilde{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{Q}^c = \tilde{\mathbf{P}} \quad (20)$$

gdzie  $\tilde{\mathbf{K}}$  jest nową macierzą sztywności przestrzennego elementu węzłowego

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{A} \quad (21)$$

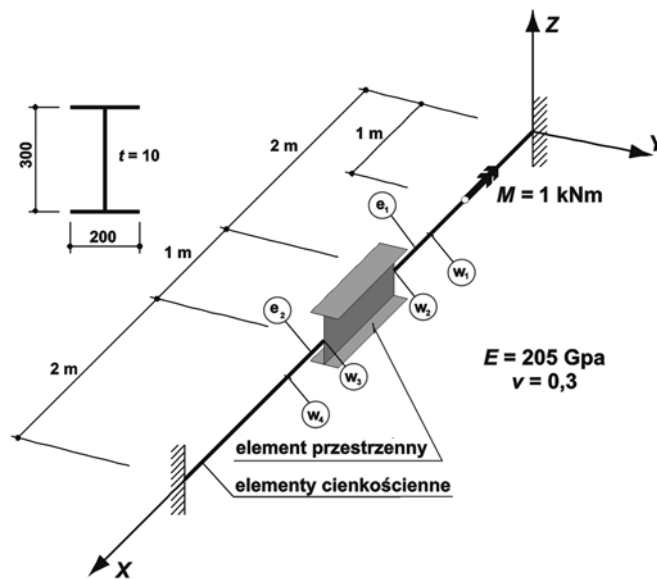
a  $\tilde{\mathbf{P}}$  jest wektorem obciążenia

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \quad (22)$$

W celu otrzymania globalnego układu równań równowagi MES należy zastosować standardową procedurę agregacji elementów skończonych w jeden dyskretny system.

#### 2.4. Przykład 1

Rozważono belkę cienkościenną o przekroju dwuteowym (rys. 3) i obciążoną momentem skręcającym  $M = 1$  kNm. W celu oceny zaproponowanego modelu skończenie elementowego belka została zdyskretyzowana z zastosowaniem tylko elementów cienkościennych (model 1D), tylko elementów powłokowych (model 3D) i stosując oba rodzaje elementów skończonych (model 1D/3D). W przypadku modelu 1D/3D przestrzenny element węzłowy został umieszczony w środku belki. W modelu 1D zastosowano 41 elementów skończonych, natomiast w modelu 3D użyto 520 elementów powłokowych. W modelu 1D/3D zastosowano 104 elementy powłokowe i 40 belkowych elementów cienkościennych.



Rys. 3. Przykład 1. Belka obustronnie utwierdzona  
Fig. 3. Example 1. Beam with clamped supports

Wyniki obliczeń zestawiono w tab. 1, gdzie podano niezerowe wartości przemieszczeń w węzłach  $w_1$  i  $w_2$  dla różnych modeli MES.

W tabeli 2 przedstawione są natomiast niezerowe wartości sił przywęzłowych dla modeli 1D i 1D/3D.

Z przedstawionych danych wynika dobra zgodność rezultatów obliczeń wykorzystujących model 1D/3D z dokładniejszym modelem 3D oraz oczekiwana w tak prostym przykładzie zgodność modeli 1D i 1D/3D.



Tabela 1

Przykład 1. Niezerowe przemieszczenia w węzłach  $w_2$  i  $w_3$ 

Model	Przemieszczenie uogólnione	Węzeł $w_2$	Węzeł $w_3$
1D	$\varphi_x$	-0,003516	-0,002472
	$\theta$	0,0002937	0,001551
1D/3D	$\varphi_x$	-0,003519	-0,002466
	$\theta$	0,0002913	0,001547
3D	$\varphi_x$	-0,003613	-0,002508
	$\theta$	—	—

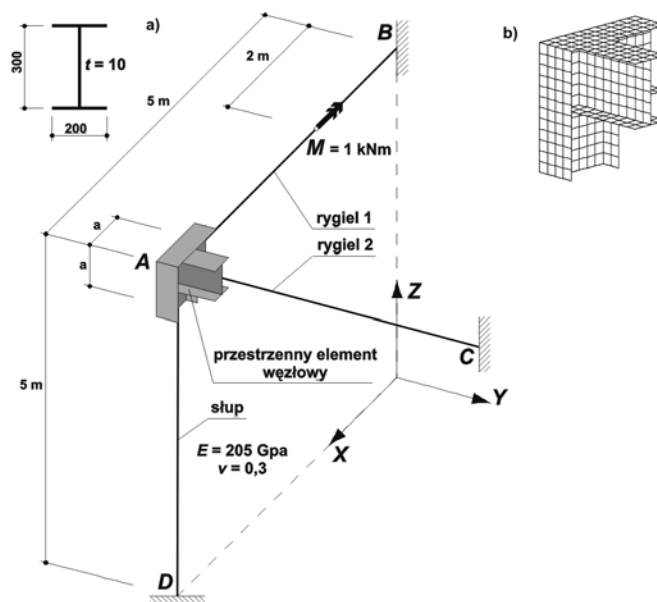
Tabela 2

Przykład 1. Niezerowe siły przywęzłowe w elementach  $e_1$  i  $e_2$ 

Model	Siła uogólniona	Element $e_1$		Element $e_2$	
		węzeł $w_1$	węzeł $w_2$	węzeł $w_3$	węzeł $w_4$
1D	$M_x$	-109,3115	109,3115	-109,3115	109,3115
	$B$	-134,8989	124,317	-34,2119	26,1818
1D/3D	$M_x$	-109,1522	109,1522	-109,1522	109,1522
	$B$	-134,9287	124,3581	-34,2645	26,2417

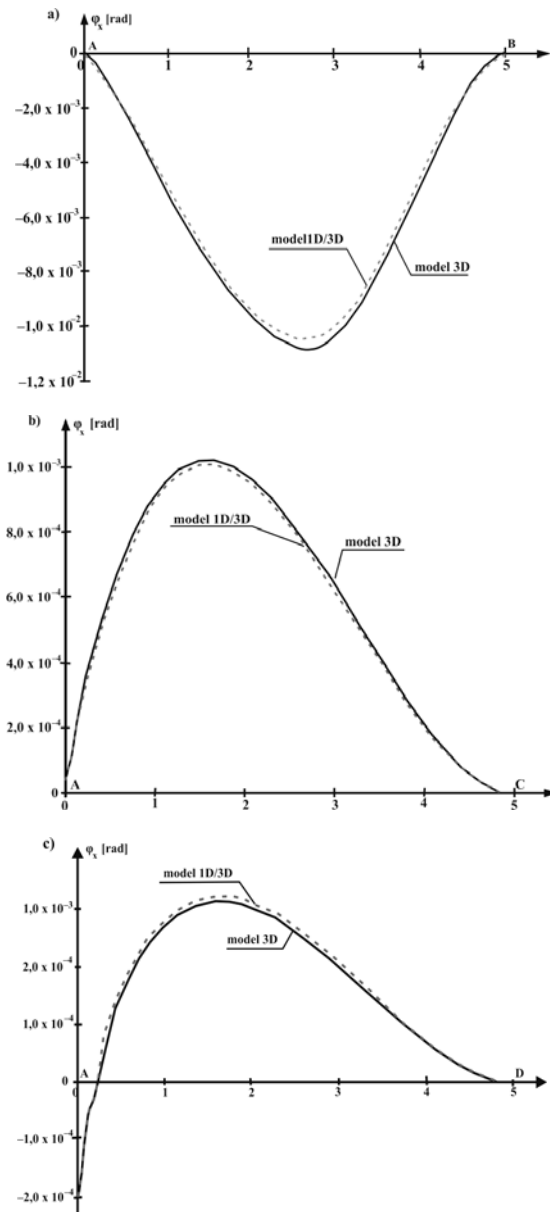
## 2.5. Przykład 2

W tym przykładzie sprawdzono efektywność modelu 1D/3D dla złożonego już przypadku konstrukcji węzła ramy łączącego trzy pręty. Analizowaną ramę o przekrojach dwuteowych przedstawiono na rys. 4a). Obliczenia wykonane z zastosowaniem modelu 1D/3D



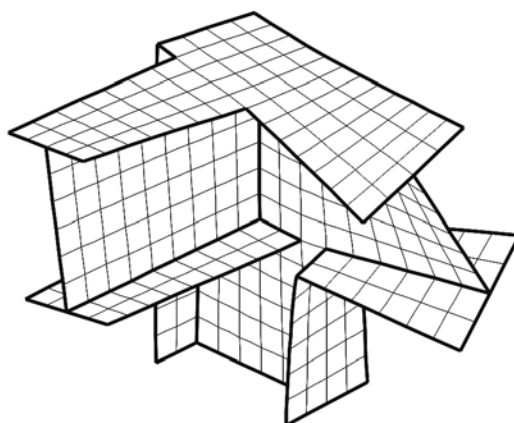
Rys. 4. Przykład 2: a) rama trójprętowa, b) przestrzenny element węzłowy  
Fig. 4. Example 2: a) three-bar frame, b) space joint element

zweryfikowano z obliczeniami wykorzystującymi model 3D. Ramę obliczono, dyskretyzując ją w przypadku modelu 3D 4192 elementami powłokowymi, natomiast w przypadku modelu 1D/3D użyto 370 elementów powłokowych i 128 belkowych elementów cienkościennych.

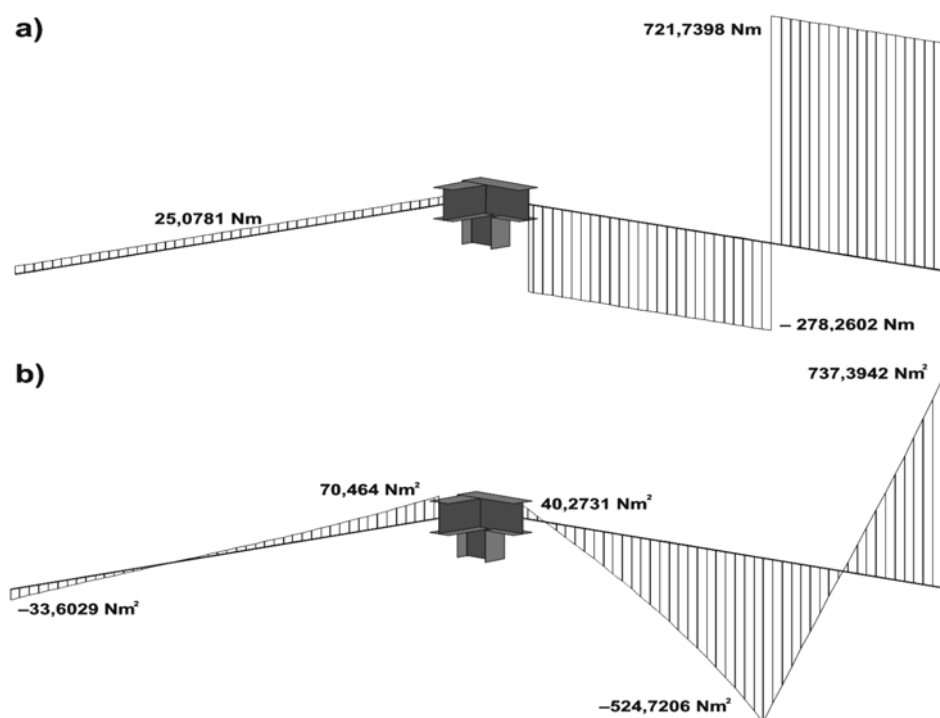


Rys. 5. Przykład 2. Wykresy kąta skręcenia dla ryglu 1 (a), dla ryglu 2 (b) i dla słupa (c)  
Fig. 5. Example 2. Twist angle diagrams for beam 1 (a), beam 2 (b) and for column (c)

Na rysunku 4b) przedstawiono sposób budowy elementu przestrzennego i jego dyskretyzację. Węzeł ramy jest tak skonstruowany, żeby środki zginania poszczególnych prętów schodziły się w jednym punkcie.



Rys. 6. Przykład 2. Deformacja węzła ramy  
Fig. 6. Example 2. Space joint element deformation



Rys. 7. Przykład 2. Wykres momentów skręcających (a) i bimomentów (b) dla rygli ramy  
Fig. 7. Example 2. Diagrams of torsional moments (a) and bimoments (b) for beams

Przy budowie przestrzennego elementu węzłowego ważną kwestią jest odpowiedni dobór wymiarów węzła (parametr  $a$  na rys. 4a)). Jest to odległość pomiędzy geometrycznym środkiem węzła ramy a początkiem belkowego elementu cienkościennego. Zbyt mały wymiar  $a$  powoduje zwiększenie sztywności elementu przestrzennego. Zatem odpowiedni dobór wielkości elementu przestrzennego ma decydujące znaczenie dla jakości modelu 1D/3D. Aby oszacować właściwy wymiar  $a$ , wykonano obliczenia testowe dla różnych wielkości parametru  $a$ , wiążąc go z wysokością przekroju poprzecznego profilu dwuteowego prętów ramy, oznaczoną jako  $h$  i wynoszącą 300 mm.

Na rysunkach 5a), b) i c) znajdują się wykresy kąta skręcania  $\varphi_x$  dla obu rygli i słupa przy przyjęciu modelu 3D<sup>4</sup> oraz modelu 1D/3D i  $a = 1,5 h$ . Tę wielkość parametru  $a$  przyjęto za optymalną, podobnie jak zaproponowano to w [24]. Obliczenia zostały przeprowadzone dla danych:  $a = 1 h$ ;  $1,25 h$ ;  $1,5 h$ ;  $1,75 h$ ;  $2 h$ .

Na rysunku 6 przedstawiono postać deformacji węzła ramy. Z kolei na rys. 7 zilustrowano wykresy momentów skręcających i bimomentów w ryglach obliczonych dla modelu 1D/3D. W słupie wartość momentu skręcającego jest stała i wynosi  $-8,3021 \text{ Nm}$ , a wartość bimomentu zmienia się od  $-24,0498$  do  $11,005 \text{ Nm}^2$ .

W przykładzie tym wykonano również obliczenia wg modelu 1D, których wyniki, jak należało się spodziewać, znacznie odbiegają od rezultatów obliczeń wykorzystujących model 1D/3D. Wiąże się to z problemem tzw. transmisji spaczenia, omawianym w następnym rozdziale.

### 3. Rama płaska o szczególnej konstrukcji

#### 3.1. Transmisja spaczenia

Model skończenie elementowy ramy o prętach cienkościennych powinien zapewnić ciągłość transmisji spaczenia. W [4] dla opisu spaczenia przekroju poprzecznego dwuteowego lub ceowego, czyli przekrojów złożonych z trzech ścianek, wprowadzono definicję powierzchni spaczenia utworzonej z punktów brzegowych ścianek po deformacji i kąta obrotu powierzchni spaczenia. Definicję powierzchni spaczenia wykorzystano do wykazania, że w węźle utworzonym z dwóch lub więcej prętów dwuteowych lub ceowych o dowolnych kątach pomiędzy osiami tych prętów<sup>5</sup> zawsze jest *kompletna transmisja spaczenia* pod warunkiem, że konstrukcja węzła jest taka, iż nie wystąpi zginanie poprzeczne środników.

Bowiem tylko w takim przypadku przemieszczenia podłużne wspólnych punktów przekrojów poprzecznych łączących się prętów będą miały te same wartości bezwzględne. Rozważono dwa przypadki połączenia prętów w węźle, a mianowicie połączenie zachowujące ciągłość środników i połączenie zachowujące ciągłość półek (tzn. środniki lub półki prętów leżą w jednej płaszczyźnie). Wykazano, że w przypadku ciągłości środników ma miejsce niekompletna transmisja spaczenia, możliwa jednak do zredukowania poprzez odpowied-

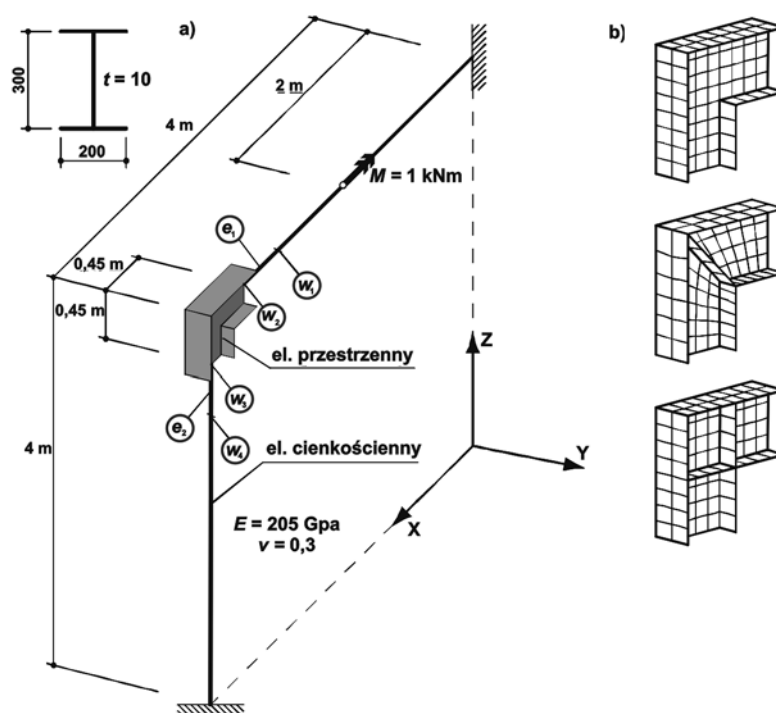
<sup>4</sup> W przypadku modelu 3D były to wartości odpowiedniego stopnia swobody elementu skończonego w węzłach na osi ciężkości przekrojów poprzecznych prętów.

<sup>5</sup> Możliwość łączenia prętów pod dowolnym kątem wynika z przyjętego w [6] 1D modelu belkowego elementu skończonego, wykorzystującego tzw. uogólnioną teorię belek (ang. *Generalised Beam Theory*, GBT), będącą pewną kombinacją teorii belek z teorią płyt.

nie usztywnienie węzła za pomocą przepon. W dalszej części niniejszego rozdziału fakt ten zilustrowano na przykładzie rozwiązania skończenie elementowego oraz sformułowano postulaty szczególnej konstrukcji węzła, których spełnienie zapewnia kompletność transmisji spaczenia.

### 3.2. Przykład 3

W przykładzie analizowano ramę dwuprętową (rys. 8a)) z różnie skonstruowanymi węzłami (rys. 8b)).



Rys. 8. Przykład 3: a) rama dwuprętowa, b) trzy przypadki konstrukcji węzła  
Fig. 8. Example 3: a) two-bar frame, b) three cases of frame joint

Rozważono model 1D ramy zdyskretyzowanej tylko belkowymi elementami cienkościennymi (82 elementy) i trzy modele 1D/3D ramy: z węzłem 1 (72 elementy belkowe i 175 elementów powłokowych), z węzłem 2 (72 elementy belkowe i 250 elementów powłokowych) i z węzłem 3 (72 elementy belkowe i 235 elementów powłokowych). W tabeli 3 zestawiono obliczone wartości sił przywęzłowych w elementach belkowych przylegających do ścianek węzła przestrzennego. Na szczególną uwagę zasługują wartości bimomentów oznaczonych przez  $B$  (w węzłach 2 i 3, bezpośrednio przy ściankach elementu przestrzennego) jako ilustracja transmisji spaczenia.

Wyniki obliczeń potwierdzają oczekiwane zbliżanie się do rozwiązania dla modelu 1D rozwiązań dla modeli 1D/3D wraz ze zwiększaniem się sztywności węzła. Różnica

w znakach bimomentu jest efektem występujących postaci deformacji węzła i potwierdzona jest również w [4].

Tabela 3

Przykład 3. Niezerowe siły przywęzłowe w elementach  $e_1$  i  $e_2$ 

Model	Siła uogólniona	Element $e_1$		Element $e_2$	
		węzeł $w_1$	węzeł $w_2$	węzeł $w_3$	węzeł $w_4$
1D	$F_y$	-63,5719	63,5719	-63,5719	63,5719
	$M_x$	-413,4494	413,4494	74,3992	-74,3992
	$M_z$	-106,1851	103,0065	-384,8420	381,6634
	$B$	47,5637	-64,3252	164,9734	-159,659
1D/3D węzeł 1	$F_y$	-74,1764	74,1764	-74,1764	74,1764
	$M_x$	-340,3747	340,3747	-8,0061	8,0061
	$M_z$	-29,0821	25,3733	-306,995	303,2862
	$B$	-87,385	75,2625	6,0179	-5,9748
1D/3D węzeł 2	$F_y$	-75,4224	-94,4123	-75,4224	75,4224
	$M_x$	-404,3047	-423,3997	46,3723	-46,3723
	$M_z$	-84,0899	32,6612	-370,3505	366,5794
	$B$	30,3219	66,7098	107,183	-103,7579
1D/3D węzeł 3	$F_y$	75,4224	94,4123	-94,4123	94,4123
	$M_x$	404,3047	423,3997	-79,8671	79,8671
	$M_z$	80,3188	-37,3818	-380,9137	376,1931
	$B$	-46,4935	-84,1235	-167,8494	162,3837

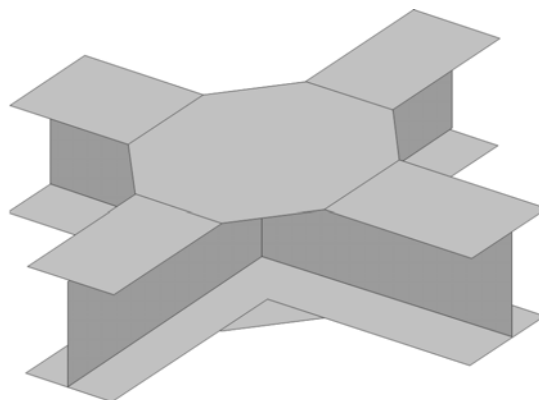
### 3.3. Postulaty szczególnej konstrukcji ramy

Zapewnienie kompletności transmisji spaczenia w węźle wymaga spełnienia następujących postulatów szczególnej konstrukcji węzła [7, 25]:

- 1) osie geometryczne wszystkich prętów ramy powinny leżeć w jednej płaszczyźnie i przecinać się w tym samym punkcie,
- 2) teoretyczny węzeł ramy jest punktem przecięcia się osi zginania, a nie punktem przecięcia się osi ciężkości,
- 3) pręty schodzą się w węzłach pod kątem prostym, leżą w jednej płaszczyźnie i mają tę samą wysokość,
- 4) pręty muszą mieć takie przekroje poprzeczne, aby można było przyjąć jednakową wartość pochodnej kąta skręcenia we wszystkich przywęzłowych przekrojach schodzących się w węźle.

Ostatni warunek wynika ze sposobu opisu spaczenia za pomocą iloczynu  $\theta \cdot \omega$ . Jak już wcześniej stwierdzono, dwa czynniki decydują o równości spaczenia:  $\theta$  i  $\omega$ , z których pierwszy jest liczbą – zwaną często miarą spaczenia, a drugi funkcją zależną od kształtu linii środkowej przekroju poprzecznego.

Jeśli zostaną zapewnione równość spaczenia wszystkich przekrojów przywęzłowych i równość  $\omega$ , wówczas możliwe jest przyjęcie, że wspólna jest także wielkość  $\theta$ . Tak jest w przypadku połączenia prętów w węźle, zapewniającym ciągłość półek. Przykład węzła ze wspólną deplanacją i wspólną współrzędną wycinkową  $\omega$  przedstawiono na rys. 9. Należy podkreślić, że tylko w przypadku takiej konstrukcji węzła dopuszczalna jest dyskretyzacja za pomocą tylko belkowych elementów cienkościennych (model 1D).



Rys. 9. Węzeł z ciągłością pólek  
Fig. 9. Joint with flange continuity

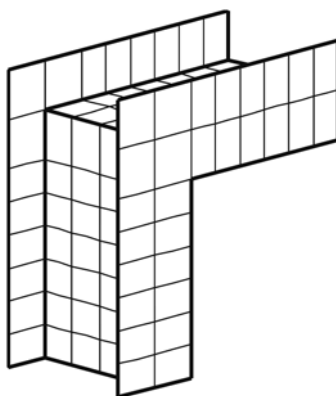
#### 3.4. Przykład 4

W kolejnym przykładzie wykonano obliczenia statyczne dla ramy dwuprętowej (rys. 8a)) z obróconym o  $90^\circ$  profilem dwuteowym dla zapewnienia ciągłości pólek rygla i słupa. Na rysunku 10 pokazano dyskretyzację skończenie elementową przestrzennego elementu węzłowego. Celem obliczeń było porównanie wyników obliczeń wg modelu 1D z obliczeniami wykorzystującymi model 1D/3D. W przypadku modelu 1D rama została zdyskretyzowana 82 belkowymi elementami cienkościnnymi, w modelu 1D/3D wykorzystano 72 belkowe elementy cienkościenne i 112 powłokowych elementów skończonych.

W tabeli 4 zestawiono wartości przemieszczeń w elementach przylegających do ścianek przestrzennego elementu węzłowego.

W tabeli 5 zestawiono wartości sił przywęzłowych w elementach przylegających do ścianek przestrzennego elementu węzłowego.

Jak należało się spodziewać, wyniki obliczeń wykorzystujących model 1D są zgodne z obliczeniami wykorzystującymi dokładniejszy model 1D/3D.



Rys. 10. Przykład 4. Przestrzenny element węzłowy  
Fig. 10. Example 4. Space joint element

Tabela 4

Przykład 4. Niezerowe przemieszczenia w węzłach  $w_2$  i  $w_3$ 

Model	Przemieszczenie uogólnione	Węzeł $w_2$	Węzeł $w_3$
1D	$\varphi_x$	-0,03516	-0,02472
	$\theta$	0,002937	0,01551
1D/3D	$\varphi_x$	-0,0352	-0,02466
	$\theta$	0,002912	0,01546

Tabela 5

Przykład 4. Niezerowe siły przywęzłowe w elementach  $e_1$  i  $e_2$ 

Model	Siła uogólniona	Element $e_1$		Element $e_2$	
		węzeł $w_1$	węzeł $w_2$	węzeł $w_3$	węzeł $w_4$
1D	$M_x$	-109,3115	109,3115	-109,3115	109,3115
	$B$	-134,8989	124,317	-34,2119	26,1818
1D/3D	$M_x$	-109,1519	109,1519	-109,1519	109,1519
	$B$	-134,9269	124,3562	-34,263	26,2404

#### 4. Zakończenie

W artykule zaproponowano mieszany model skończenie elementowy 1D/3D do analizy statycznej ram o prętach cienkościennych i dowolnym przekroju poprzecznym otwartym. Ograniczenie dyskretyzacji za pomocą powłokowych elementów skończonych do obszaru węzłów znacznie upraszcza obliczenia w porównaniu z pełną analizą trójwymiarową oraz pozwala na zastosowanie tej metody do ram z dowolnie skonstruowanymi węzłami.

Zamierzeniem autorów w zakresie analizy statycznej ram sprężystych jest opracowanie procedur obliczania macierzy sztywności dla przestrzennych elementów węzłowych podatnych oraz dla przestrzennych elementów podporowych, z uwzględnieniem rzeczywistych warunków brzegowych.

Efektywność proponowanej metody wzrasta wraz ze wzrostem złożoności konstrukcji. Dalsze oszczędności można uzyskać w zastosowaniu metody do analizy typowych konstrukcji cienkościennych, dla których można opracować bibliotekę typowych przestrzennych elementów węzłowych (różnie skonstruowanych), z odpowiednimi procedurami do wyznaczania macierzami sztywności.

*Czesław Cichoń bardzo dziękuje Panu prof. Stefanowi Piechnikowi za inspirujące dyskusje na temat teorii pręta cienkościennego, które miały wpływ na końcową postać artykułu.*

#### Literatura

- [1] ABAQUS, *ABAQUS Version 6.5 Documentation*, ABAQUS, Inc. 2004.
- [2] ADINA, *Theory and Modelling Guide*, ARD 2003.



- [3] Baigent A., Hancock G.J., *Structural analysis of assemblages of thin-walled members*, Engineering Structures 4(7), 1982, 207-216.
- [4] Basaglia C., Camotim D., Silvestre N., *Global buckling analysis of plane and space thin-walled frames in the context of GBT*, Thin-Walled Structures 46, 2008, 79-101.
- [5] Bathe K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewoods Clifs, New York 1996.
- [6] Blandfort G.E., *Thin-walled space frame analysis with geometric and flexible connection nonlinearities*, Computers and Structures, Vol. 35, No. 5, 1990, 609-617.
- [7] Byczkow D.W., *Mechanika budowli cienkościennych konstrukcji prętowych* (ros.), Gosudarstbennoje izdatelstwo literatury po stroitelstvu, architekture i stroitelnym materiałom, Moskwa 1962.
- [8] Chavan K.S., Wriggers P., *Consistent coupling of beam and shell elements for thermo-elastic analysis*, International Journal for Numerical Method in Engineering 59, 2004, 1861-1876.
- [9] Chou S.M., Rhodes J., *Review and compilation of experimental results on thin-walled structures*, Computers and Structures, Vol. 65, No. 1, 1997, 47-67.
- [10] Cichoń C., Pluciński P., *Analiza statyki i wyboczenia ram cienkościennych o dowolnym otwartym przekroju poprzecznym z mieszanym 1D/3D sformulowaniem metody elementów skończonych*, IX Sympozjum Stateczności Konstrukcji, materiały konferencyjne, Zakopane 2000, 29-36.
- [11] Erkmén R.E., Mohareb M., *Torsion analysis of thin-walled beams including shear deformation effects*, Thin-Walled Structures 44, 2006, 1096-1108.
- [12] Hu Y., Jin X., Chen B., *A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections*, Computers and Structures, Vol. 61, No. 5, 1996, 89-908.
- [13] Jankowska N., *Wpływ odkształcalności węzłów na rozkład sił przekrojowych w ramach cienkościennych*, praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 2006.
- [14] Kim M.Y., Chang S.P., Kim S.B., *Spatial stability analysis of thin-walled space frames*, International Journal for Numerical Method in Engineering 39, 1996, 499-525.
- [15] Kim N.I., Kim M.Y., *Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects*, Thin-Walled Structures 43, 2005, 701-734.
- [16] MATLAB, *MATLAB Help*, The MathWork, Inc. 2007.
- [17] Mohri F., Azrar L., Potier-Ferry M., *Lateral post-buckling analysis of thin-walled open section beams*, Thin-Walled Structures 40, 2002, 1013-1036.
- [18] Piechnik S., *Mechanika techniczna ciała stałego*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007.
- [19] Radwańska M., Bielski J., *Computational problems of FE-analysis of elastic-plastic surface structures*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences 8, 2001, 17-42.
- [20] Rasmussen K.J.R., *Bifurcation of locally buckled point symmetric columns – analytical developments*, Thin-Walled Structures 44, 2006, 1161-1174.
- [21] Rasmussen K.J.R., *Bifurcation of locally buckled point symmetric columns – experimental investigations*, Thin-Walled Structures 44, 2006, 1175-1184.

- [22] Stein E., *AM-FEM in structural mechanics, a challenge for the next decade*, iacm expressions 16/04, 2004, 10-13.
- [23] Stein E., Ruter M., *Finite element methods for elasticity with error-controlled discretization and model adaptivity*, Encyclopedia of Computer Mechanics, Vol. 2, Wiley, 2004.
- [24] Szymczak C., Mikulski T., *Modelowanie węzłów ram zbudowanych z prętów cienkościennych*, VIII Konferencja Naukowa „Połączenia i węzły w konstrukcjach metalowych”, materiały konferencyjne, Olsztyn–Łańsk, 16–19 października 2003, 399-408.
- [25] Torbunow B.N., Stielbickaja A.I., *Teoria ram o prętach cienkościennych*, (ros.), OGIZ Gostiechizdat, Moskwa–Leningrad 1948.
- [26] Vlasov V.Z., *The Walled Elastic Beams*, 2<sup>nd</sup> Edition, Israel Program for Scientific Transactions, Jerusalem 2000.
- [27] Wagner W., Klinkel S., Gruttmann F., *Elastic and plastic analysis of thin-walled structures using improved hexahedral elements*, Computers and Structures 80, 2002, 857-869.
- [28] Waszczyszyn Z., Cichoń C., Radwańska M., *Stability of Structures by Finite Element Methods*, Elsevier, Amsterdam 1996.
- [29] Yuren H., Xianding J., Bozhen C., *A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections*, Computers and Structures, Vol. 61, No. 5, 1996, 897-908.
- [30] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The finite element method for solid and structural mechanics*, 6<sup>th</sup> Edition, Elsevier, Butterworth–Heinemann, Oxford 2005.