

MARIUSZ ZYCH\*

## ANALIZA NUMERYCZNA ZARYSOWANIA W DOJRZEWAJĄCYM BETONIE ŚCIANY ZBIORNIKA ŻELBETOWEGO

---

### NUMERICAL ANALYSIS OF CRACKING IN HARDENING CONCRETE OF RC TANK'S WALL

---

#### Streszczenie

W artykule przedstawiono model MES do analizy rozwoju zarysowania ścian zbiorników żelbetowych powstałego w wyniku rozwoju naprężeń termicznych w okresie dojrzewania betonu. Przedstawiono przykład ściany prostokątnego zbiornika żelbetowego zrealizowanego podczas rozbudowy oczyszczalni ścieków. Model uwzględnia rozwój ciepła hydratacji i wpływ temperatury otoczenia na rozwój pola temperatury. Zastosowano sprężysto-lepki model materiału z zarysowaniem.

*Słowa kluczowe: zarysowanie, zbiornik, młody beton, naprężenia termiczne, materiał sprężysto-lepki*

#### Abstract

In the paper it was presented FEM model to an analysis of the crack width development in the walls of RC tanks, which appeared as a result of thermal stresses during hardening period of concrete. It was presented an example of the rectangular RC tank wall which was realized during the extension of the sewage treatment plant. The influence of the heat of the hydration and ambient temperature of the air on the development of the temperature are included in the proposed model. Viscoelastic material with cracking was used in the calculation.

*Keywords: cracks, tank, early age concrete, thermal stresses, viscoelastic material*

---

\* Mgr inż. Mariusz Zych, Instytut Materiałów i Konstrukcji Budowlanych, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Na etapie wykonywania konstrukcji średniomasywnych bądź masywnych częstym problemem jest stworzenie odpowiedniego projektu, a później zapewnienie właściwego wykonania konstrukcji, tak aby nie uległa ona zarysowaniu na etapie dojrzewania betonu. Problem ten nabiera większego znaczenia w przypadku zbiorników na ciecze, od których wymaga się szczelności nie tylko na etapie wykonania, ale i podczas wieloletniej ich eksploatacji. Dopuszczenie do stosunkowo niewielkiego zarysowania ścian zbiorników w okresie dojrzewania betonu z reguły skutkuje znacznym poszerzeniem się rys pierwotnych, np. do dwukrotnej ich szerokości, co stanowi już przeszkodę we właściwej eksploatacji zbiornika. Wytyczne normowe ograniczają maksymalną szerokość rys przelotowych w tego typu konstrukcjach do wartości 0,1 mm [1, 2].

Powstałe rysy na nowo wznoszonym obiekcie w opinii wykonawców są najczęściej spowodowane złym projektem (np. zła średnica zbrojenia bądź zbyt niski stopień zbrojenia, ewentualnie zbyt niskie parametry wytrzymałościowe betonu). W opinii projektantów zarysowania niektórych ścian najczęściej wynikają ze złej pielęgnacji bądź jej zaniechania, z użycia złej mieszanki betonowej (nieodpowiedni typ cementu). W opinii technologów rodzaj cementu i klasa betonu nie są bez znaczenia, ale stosowanie cementów o niskim stopniu hydratacji w okresach wczesnowiosennych bądź późnojesiennych (czyli niskich temperatur nocą) wiąże się z ryzykiem spowolnionego wiązania betonu. Zatem winę ponoszą przeważnie projektanci wspólnie z wykonawcą (słabe zbrojenie i zła pielęgnacja). Oczywiście, każda ze stron ma poniekąd rację, gdyż każdy po części jest odpowiedzialny za powodzenie w realizacji obiektu. Zapewnienie poprawności z dwóch stron może być zniweczone brakiem doświadczenia trzeciej. Taki stan rzeczy jest, przynajmniej do pewnego stopnia, odzwierciedleniem stanu norm do projektowania tego typu zbiorników. W kraju jedyną normą do projektowania tego typu zbiorników jest norma polska (EC2) [1, 2], w której ujęcie zagadnienia jest raczej ogólne, a problem wymaga od projektanta zdecydowanie większego zakresu wiedzy i większego nakładu pracy w porównaniu z typowymi konstrukcjami żelbetowymi. Oprócz sprawdzenia stanów granicznych wynikających z obciążeń stałych i zmiennych w okresie eksploatacji zbiornika dochodzi często pomijana analiza rozwijających się naprężeń termicznych w okresie dojrzewania betonu, czyli szybkich i ciągłych zmian jego właściwości [3, 4].

Niniejszy artykuł jest kontynuacją prac [5, 6] dotyczących próby stworzenia modelu numerycznego na podstawie doświadczeń, badań i obserwacji w wykonywaniu tego typu obiektów, dającego możliwość analizy pracy konstrukcji na etapie jej wykonywania, głównie zbiorników żelbetowych. Niniejszy artykuł w stosunku do pracy [5] przedstawia uproszczone podejście w zakresie obliczania rozwoju temperatury w przekroju ściany, ale daje możliwość analizy rozwoju rys, ich szerokości, rozmieszczenia oraz oceny wyężenia stali zbrojeniowej w zarysowanych fragmentach konstrukcji. Uproszczenie dotyczące sposobu obliczania rozwoju temperatury jest podyktowane na chwilę obecną jedynie bardzo czasochłonnym okresem obliczeniowym, dochodzącym często do kilku tygodni i niegwarantującym uzyskania zbieżności rozwiązań.

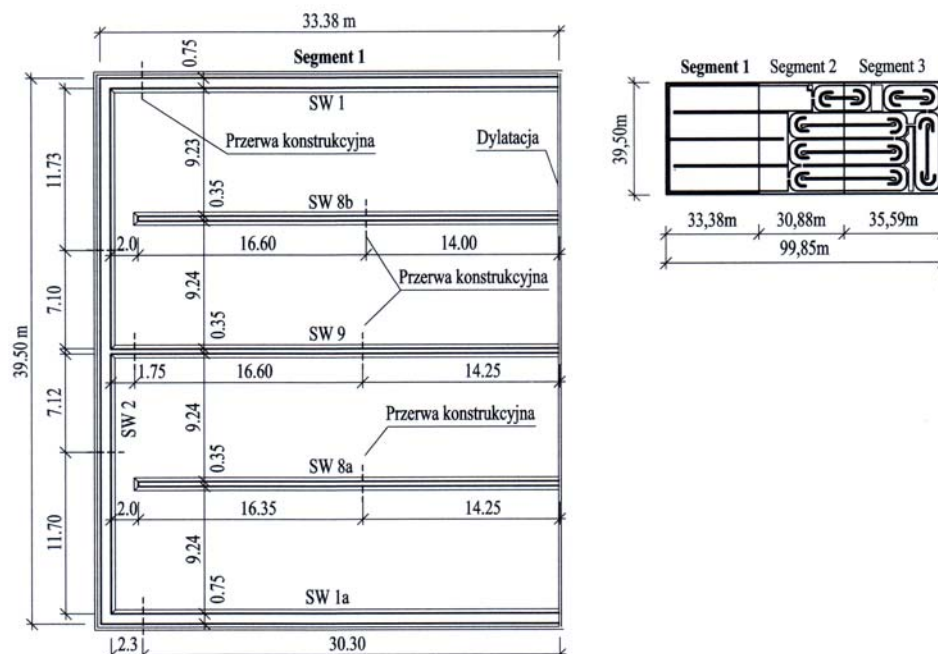
## 2. Opis konstrukcji

W niniejszym artykule analizie obliczeniowej poddano fragment prostokątnego żelbetowego zbiornika o jednostkowej pojemności  $30\,000\text{ m}^3$  (fot. 1) wykonywanego w ramach rozbudowy jednej z krakowskich oczyszczalni ścieków. Zbiornik o wysokości 8,1 m i wymiarach rzutu poziomego  $98,35 \times 38,0\text{ m}$  został zdylatowany na trzy segmenty (rys. 1) na całej wysokości, łącznie z płytą denną o grubości 0,75 m. Całość konstrukcji została wykonana z betonu klasy B-25. Ściany betonowane systemem odcinkowym są połączone monolitycznie z płytą denną, która stanowi podstawowy element kępujący odkształcenia w nowo zabetonowanych ścianach. Do analizy obliczeniowej wybrano zewnętrzną ścianę zbiornika o zmiennej grubości 0,75 m do wysokości 1,8 m powyżej 0,5 m. Analizowana ściana była wykonywana w 6 etapach. Jednak ze względu na bardzo długi czas potrzebny do przeprowadzenia obliczeń nie uwzględniono w obliczeniach dwóch ostatnich faz wznoszenia ściany, gdyż nie uległy one zarysowaniu. Ściana podzielona jest jedną pionową przerwą konstrukcyjną w odległości 15 m od przerwy dylatacyjnej (rys. 2), natomiast skrajne krawędzie pionowe na etapie wykonywania segmentu są swobodne. Dopiero w okresie późniejszym segment betonowany w fazie 4 zostanie skrupowany 2,3 m odcinkiem ściany łączącym się ze ścianą poprzeczną. Ściana podzielona jest również poziomymi przerwami konstrukcyjnymi. Ze względów technologicznych pierwsza przerwa znajduje się na wysokości 1,8 m, w miejscu zmiany grubości ściany, druga na wysokości 4,8 m. Mimo takiego zabiegu podczas dojrzewania betonu zarejestrowano wiele pionowych rys. Faktyczny stan zarysowania powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej przedstawiono na rys. 2. Ściana ta podczas próby szczelności wykazywała liczne przecieki. Pierwsza część ściany o grubości 0,75 m i wysokości 1,4 m, dalej oznaczona jako faza 2 obliczeń, została wykonana 01.02.2004 r. bez pionowej przerwy konstrukcyjnej. W fazie 3 z 16.03.2004 r. został dodany kolejny element ściany o szerokości 0,5 m, wysokości 3 m i długości 15 m. W tych fragmentach ściany zastosowano cement CEM IIIA/42,5. W fazie 4 z 23.03.2004 r. dobetonowano ostatni z analizowanych segmentów wykonany na cemencie CEM IIB-S/32,5R.



Fot. 1. Żelbetowy zbiornik prostokątny o pojemności  $30\,000\text{ m}^3$

Photo 1. Rectangular RC tank, capacity  $30\,000\text{ m}^3$



Rys. 1. Geometria części zbiornika wraz z układem przerw dylatacyjnych

Fig. 1. Rectangular reinforced concrete reservoir geometry and expansion joints layout

Ściana została zazbrojona w kierunku pionowym prętami o średnicy 20 mm w rozstawie 150 mm po obu stronach. Zbrojenie poziome do wysokości 1,4 m (faza 2) stanowiły pręty  $\phi 20$  mm w rozstawie 100 i 150 mm po zewnętrznej i wewnętrznej stronie zbiornika. W kolejnych segmentach ściany (faza 3 i 4) zbrojenie poziome do wysokości 1,2 m było analogiczne do zbrojenia w segmencie poniższym, natomiast powyżej zbrojenie poziome po stronie zewnętrznej i wewnętrznej stanowiły pręty  $\phi 20$  mm w rozstawie 150 mm.

### 3. Schemat obliczeń, modelowanie zbrojenia

Ze względu na długi czas obliczeniowy model wykonano w 2D. Ogólną geometrię modelowanego segmentu wraz z fazami betonowania przedstawiono na rys. 3. Faza pierwsza obliczeń obejmuje samą płytę posadowioną na 4 m warstwie gruntu. W fazie drugiej dobetonowano pierwszy element ściany o długości 30,3 m i grubości 0,75 m. W fazie trzeciej dostawiono segment o długości 15 m i w fazie ostatniej obliczeń dostawiono segment o długości 15,3 m, którego grubość, jak i grubość segmentu poprzedniego wynosi 0,5 m.

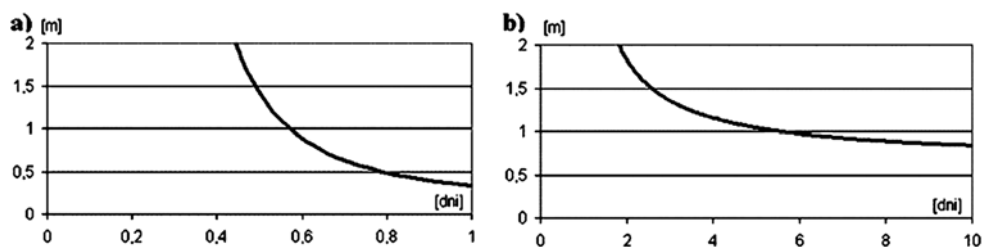
W każdej z faz w pierwszym etapie wykonywane są obliczenia temperatury dojrzewającego betonu (wg p. 4), która stanowi obciążenie w analizie naprężeń (z uwzględnieniem zależnych od czasu właściwości materiału). Po zakończeniu każdej z faz i rozpoczynaniu się kolejnej fazy z nowo dostawioną ścianą wszystkie dane starszego elementu z fazy poprzedniej (np. wygasające ciepło hydratacji, temperatura, naprężenia, wyższe parametry



betonu wywołane zmianami temperatury są niwelowane w znacznym stopniu przez płynięcie i pełzanie. Na podstawie przeliczeń niniejszego przypadku przyjęto wstępnie założenie, że naprężenia, jakie mogłyby powstać w stali zbrojeniowej w okresie pierwszej doby byłyby na poziomie ok. 20 MPa. Stosując równanie na długość zakotwienia (2) wg [8] i zapisując wytrzymałość przyczepnościową w funkcji czasu (1), okazuje się, że nawet przy tak niskim poziomie naprężeń długość zakotwienia wyniesie kilka metrów (rys. 4a)). Stąd też przyjęcie w tym okresie zbrojenia jako współpracującego z betonem jest błędem. W tym przykładzie obliczeniowym założono, że początek współpracy stali z betonem zachodzi po 14 h od początku wiązania. W tym okresie stal zaczyna przenosić jeszcze stosunkowo niewielkie naprężenia. Zbrojenie modelowane jest jako materiał liniowo-sprężysty o współczynniku rozszerzalności termicznej  $\alpha_s = 1,2E-5$  i module Younga  $E = 210$  GPa. W okresie późniejszym, tj. podczas zarysowania, podstawowa długość zakotwienia przy poziomie naprężeń 250 MPa wynosi już tylko 0,8 m (rys. 4b)). Dyskretyzacja siatki MES pod względem wielkości elementu była ograniczona ze względu na czasochłonność obliczeń (ok. 1 tygodnia). Zatem w przyjętym modelu pomiędzy prętami poziomymi znajdował się tylko jeden element skończony.

$$f_{bk}(t) = 0,7 \cdot 0,47 \sqrt[3]{f_{ck}(t)^2} \quad (1)$$

$$l_b(T) = \frac{\phi}{4} \cdot \frac{f_{ys}}{f_{bk}(T)} \quad (2)$$



Rys. 4. Zmiana długości zakotwienia  $l_b(t)$  w funkcji czasu podczas dojrzwania betonu przy naprężeniach w zbrojeniu: a) 20 MPa i b) 250 MPa

Fig. 4. The development of bonded length  $l_b(t)$  as a function of time during hardening of concrete at the stresses in reinforcement at the level: a) 20 MPa and b) 250 MPa

#### 4. Obciążenia dojrzewającego betonu, sposób modelowania

Proces dojrzewania betonu jest ściśle związany z wydzielaniem się znaczących ilości ciepła w wyniku wiązania poszczególnych składników cementu [4, 9, 10]. Zjawisko to zaczyna być zdecydowanie bardziej zauważalne w przypadku konstrukcji bądź jej elementu o znacznych wymiarach. W ogólnym przypadku zagadnienie to należy rozwiązać w 3D. Jednak w pewnych przypadkach możemy je uprościć do zagadnienia 2D, ponosząc z tego powodu większe bądź mniejsze koszty dokładności otrzymanych później wyników. W ni-



niejszym artykule zastosowano model 2D, który w sposób istotny skraca czas obliczeń. Zastosowano zatem podejście Hirschfeld [10] pozwalające na określenie średniej temperatury dojrzewającego betonu, wykorzystując przy tym pracę [10].

Wielkości termofizyczne przyjęte w obliczeniach określonych na podstawie składu mieszanki wg [10]:  $\lambda_b = 3,11$  W/mK,  $c_b = 0,772$  kJ/kgK, współczynnik  $\alpha$  przyjęto jak dla zerowej prędkości wiatru, równy  $5,8$  W/m<sup>2</sup>K. W przypadku ściany w szalunku wprowadzono zastępczy współczynnik przyjmowania ciepła  $\alpha_w$  określony równaniem

$$\alpha_w = \frac{\alpha}{R\alpha + 1} \quad (3)$$

w którym  $R = \frac{d}{\lambda}$

gdzie:

- $d$  – grubość płyty szalunkowej,
- $\lambda$  – współczynnik przewodzenia ciepła szalunku.

Równanie podane przez Hirschfeld oparte jest na rozwiązaniu równania niestacjonarnego przepływu ciepła (5) dla przypadku jednokierunkowego przewodzenia ciepła, przy przyjęciu funkcji  $Q$  w postaci (6). Ponadto zakłada się jednakowe warunki wymiany ciepła na obydwu powierzchniach ściany, stąd temperaturę średnią w przekroju ściany opisuje równanie

$$\begin{aligned} \bar{T}(t) = & \left[ \frac{2\alpha(1-k) + dc_b\gamma_b K_{Tp}}{2\alpha k - dc_b\gamma_b K_{Tp}} \right] \cdot \frac{qC}{c_b\gamma_b} \exp(-K_{Tp}t) + \dots \\ & + \left[ T_p - T_o - \frac{qCdK_{Tp}}{2\alpha_o - dK_{Tp}c_b\gamma_b} \right] \cdot f(\varphi_1) \exp\left(-\frac{\alpha_o}{c_b\gamma_b d}t\right) + T_o \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_b \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c_b \cdot \gamma_b} C \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (5)$$

$$Q_{(t)} = C \cdot q \cdot [1 - \exp(-K_{Tp} \cdot t)] \quad (6)$$

gdzie:

$$\varphi_1 \quad - \quad \text{rozwiązanie równania } \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\alpha d}{2\lambda} = B_i$$

$$P = \frac{d^2 K_{Tp}}{4a_b} \quad - \quad \text{liczba Predwoditielewa}$$

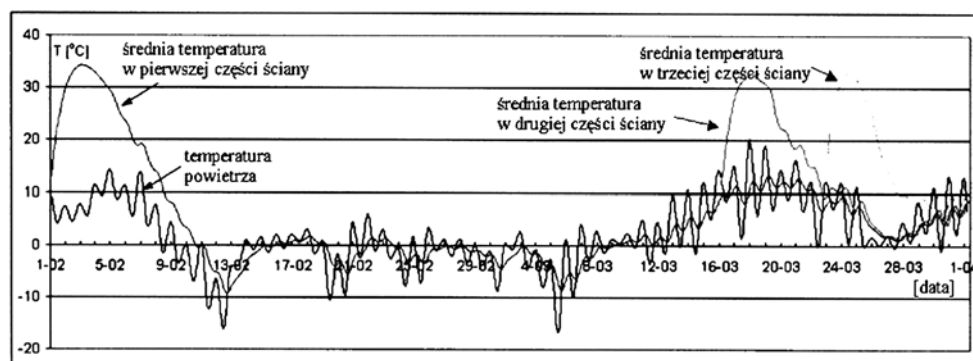
$$f(\varphi_1) = \frac{2 \sin^2 \varphi_1}{\varphi_1^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\varphi_1}{2\varphi_1} \right)} \quad (7)$$

$$\alpha_o^n = \frac{2\lambda\varphi_1^2}{d} \quad (8)$$

$k = \text{ctg}\sqrt{P} \cdot \sqrt{P}$	$T_o$ i $T_p$	– odpowiednio: temperatura otoczenia i początkowa temperatura mieszanki,
$T$		– temperatura betonu [°C],
$Q$		– źródło ciepła hydratacji [kJ/kg h],
$a_b$		– współczynnik dyfuzji temperatury w betonie [m <sup>2</sup> /s],
$c_b$		– ciepło właściwe [kJ/kgK],
$\gamma_b$		– gęstość pozorna betonu [kg/m <sup>3</sup> ],
$C$		– masa cementu [kg/m <sup>3</sup> ],
$d$		– grubość ściany [m].

Model, niestety, nie uwzględnia wpływu promieniowania słonecznego oraz z oczywistych względów niejednorodnego rozkładu temperatury w przekroju, która to temperatura przyczynia się do powstania rys powierzchniowych. Jednak okres betonowania ściany to luty i marzec, zatem pominięcie promieniowania jest uzasadnione. Nie zmienia to jednak faktu, że powyższe rozwiązania należy traktować jako przybliżone.

Wyniki przeprowadzonej analizy rozwoju temperatury średniej dla poszczególnych segmentów ściany w okresie dwóch miesięcy przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Rozwój średniej temperatury w poszczególnych częściach ściany podczas dojrzewania betonu [7]

Fig. 5. The development of the average temperature in each part of the wall during hardening of concrete [7]

Na rysunku 6 przedstawiono rozkłady temperatur dla poszczególnych faz betonowania w wybranych krokach obliczeniowych.

W okresie dojrzewania betonu zmianom temperatury generującym odkształcenia termiczne towarzyszą znacznie mniejsze odkształcenia skurczowe. Ze względu na dłuższy okres obliczeniowy uwzględniono rozwój tych odkształceń, posługując się równaniami (9)–(13) zawartymi w CEB-FIP Model Code 1990 [11]. Podobnie jak w przypadku odkształceń termicznych, odkształcenia skurczowe są modelowane indywidualnie dla każdego



elementu ściany, zależnie od czasu betonowania i miarodajnego wymiaru przekroju. Całkowite odkształcenie od skurczu w czasie  $t$  obliczone jest z wzoru

$$\varepsilon_s(t, t_s) = \varepsilon_{s0} \times \beta_s(t - t_s) \quad (9)$$

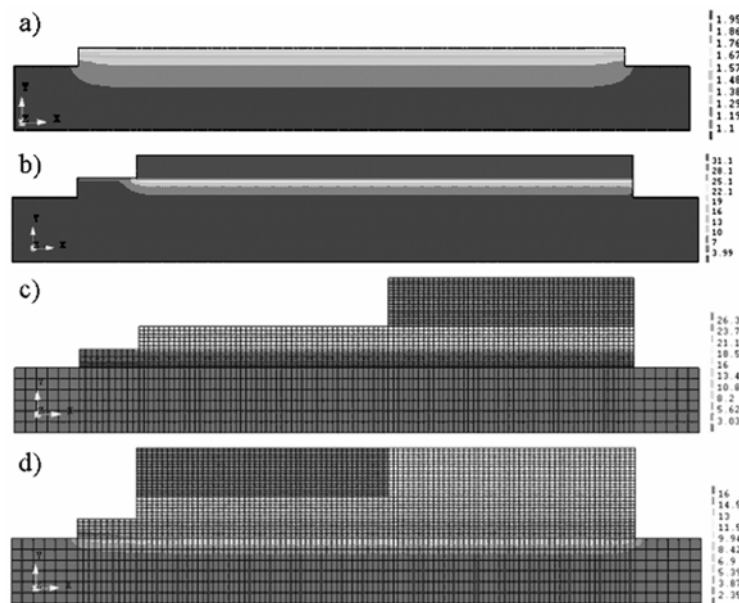
gdzie:

- $\varepsilon_{s0}$  – całkowite odkształcenie skurczowe (10),  
 $\beta_s(t - t_s)$  – funkcja opisującą rozwój skurczu w czasie (11).

$$\varepsilon_{s0} = \varepsilon_s(f_{cm28}) \times \beta_{RH} \quad (10)$$

w którym

$$\varepsilon_s(f_{cm28}) = \left( 160 + 10\beta \left( 9 - \frac{f_{cm28}}{f_{cm0}} \right) \right) \times 10^{-6} \quad (11)$$



Rys. 6. Rozkład temperatury w wybranych krokach obliczeniowych w poszczególnych fazach pracy konstrukcji: a) płyta fundamentowa na gruncie, b) dobetonowany pierwszy fragment ściany, c) dobetonowany drugi segment ściany, d) dobetonowany ostatni z analizowanych elementów ściany

Fig. 6. The distribution of the temperature in selected time steps in each phases of construction work: a) slab and soil, b) the first part of the wall is added, c) the second part of the wall is added, d) the last part of the wall is added

$$\beta_s(t - t_s) = \left( \frac{(t - t_s)}{350 \left( \frac{h}{h_o} \right)^2 + (t - t_s)} \right)^{1/2} \quad (12)$$

Wpływ wilgotności otoczenia uwzględnia współczynnik  $\beta_{RH}$  (13) i został on policzony w uproszczeniu dla  $RH = 80\%$ .

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1,55 \left( 1 - \left( \frac{RH}{RH_o} \right)^3 \right) & \text{dla } 40\% \leq RH < 99\% \\ 0,5 & \text{dla } RH \geq 99\% \end{cases} \quad (13)$$

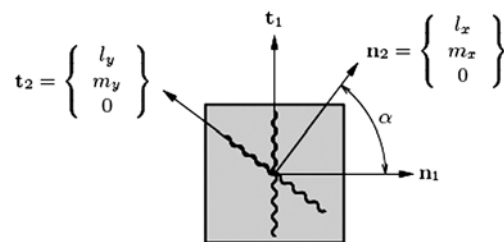
### 5. Model materiału

W obliczeniach zastosowano sprężysto-lepki model materiału Double Power Law wg Bażanta [12], którego opis poparty przykładem obliczeniowym fragmentu cylindrycznego zbiornika żelbetowego o pojemności  $8000 \text{ m}^3$  przedstawiono w poprzedniej pracy [5]. Podstawową cechą modelu sprężysto-lepkiego jest pamiętanie historii odkształceń wpływających na aktualne naprężenia, co jest rzeczą konieczną w przypadku analizy materiału dojrzewającego w zmiennych warunkach obciążenia. Opis i zastosowanie tego modelu można również znaleźć w pracach [13, 14]. W niniejszym artykule model ten został poszerzony o możliwość analizy zarysowania dojrzewających ścian betonowych, wykorzystując przy tym model rysy rozmytej [13] opartej na rozdzieleniu odkształceń. Podejście to prawdopodobnie po raz pierwszy przedstawił Litton [15], później było stosowane przez wielu innych badaczy [16–18]. Przedstawione poniżej podejście zawarte jest w programie Diana [13] i opisane jest w zakresie płaskiego stanu naprężeń, jednak nie tracąc przy tym na ogólności rozwiązania.

Podstawowym założeniem modelu jest rozdzielenie całkowitych odkształceń  $\varepsilon$  na odkształcenie sprężyste  $\varepsilon^e$  i odkształcenie rysujące  $\varepsilon^{cr}$  wg wzoru

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{cr}$$

W przypadku stosowanego modelu sprężysto-lepkiego jest to rozdzielenie odkształceń całkowitych na odkształcenie sprężysto-lepkie  $\varepsilon^{ev}$  i odkształcenie rysujące  $\varepsilon^{cr}$



Rys. 7. Model rysy rozmytej [13]

Fig. 7. Smeared crack model [13]

Dalsze podzielenie odkształceń rysujących  $\varepsilon^{\text{cr}}$  daje możliwość modelowania wielu rys powstających jednocześnie. Podstawową cechą jest to, że naprężenie  $s_i$  i odkształcenie  $e_i^{\text{cr}}$  występują w układzie współrzędnych  $n$ - $t$ , który jest układem lokalnym każdej  $i$ -tej rysy (rys. 7). Wektor zawierający odkształcenia rysujące każdej indywidualnej rysy jest opisany przez  $e^{\text{cr}}$

$$e^{\text{cr}} = \langle e_1^{\text{cr}}, e_2^{\text{cr}}, \dots, e_i^{\text{cr}}, \dots, e_n^{\text{cr}} \rangle^T \quad (14)$$

gdzie odkształcenie rysujące dla  $i$ -tej rysy określone jest jako  $e_i^{\text{cr}} = \langle \varepsilon_{nn,i}^{\text{cr}}, \gamma_{nt,i}^{\text{cr}} \rangle^T$ . Zależność pomiędzy odkształceniem w układzie globalnym i wektorem  $e^{\text{cr}}$  jest określona następująco

$$\varepsilon^{\text{cr}} = N e^{\text{cr}} \quad (15)$$

gdzie  $N$  jest macierzą transformacji

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_i, \dots, N_n] \quad (16)$$

w której  $N_i$  jest macierzą transformacji dla  $i$ -tej rysy, co w przypadku płaskiego stanu przyjmuje następującą postać

$$N_i = \begin{bmatrix} l_x^2 & l_x l_y \\ m_x^2 & m_x m_y \\ n_x^2 & n_x n_y \\ 2l_x m_x & l_x m_y + l_y m_x \end{bmatrix} \quad (17)$$

$n^T = \{l_x, m_x, n_x\}$  jest wektorem normalnym do płaszczyzny rysy. W podobny sposób możliwe jest stworzenie wektora, który zawiera naprężenia dla każdej rysy

$$s^{\text{cr}} = \langle s_1^{\text{cr}}, s_2^{\text{cr}}, \dots, s_i^{\text{cr}}, \dots, s_n^{\text{cr}} \rangle^T \quad (18)$$

naprężenia w  $i$ -tej rysie zapisane są w postaci  $s^{\text{cr}} = \{\sigma_{nn,i}^{\text{cr}}, \tau_{nt,i}^{\text{cr}}\}^T$ . Zależność pomiędzy naprężeniem w układzie globalnym i wektorem  $s^{\text{cr}}$  może być określona zależnością

$$s^{\text{cr}} = N^T \sigma \quad (19)$$

Podstawowym założeniem jest określenie naprężeń w rysie jako funkcji odkształceń rysujących, co możemy zapisać ogólnym równaniem

$$s^{\text{cr}} = f(e^{\text{cr}}) \quad (20)$$

Połączenie oddziaływań pomiędzy różnymi rysami jest możliwe w zakresie tego ogólnego równania, ale biorąc to pod uwagę, prowadziłoby to do nadmiernego i zbytecznego wzrostu poziomu złożoności. Dlatego też naprężenia w rysie są jedynie zależne od odpowiadających im odkształceń rysujących

$$\begin{cases} s_1^{\text{cr}} = f(e_1^{\text{cr}}) \\ s_2^{\text{cr}} = f(e_2^{\text{cr}}) \\ \vdots \\ s_i^{\text{cr}} = f(e_i^{\text{cr}}) \\ \vdots \\ s_n^{\text{cr}} = f(e_n^{\text{cr}}) \end{cases} \quad (21)$$

Do skompletowania modelu konstytutywnego konieczne jest określenie kryterium powstawania rys i podanie zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami w rysie. Początek zarysowania jest zależny od spełnienia następujących warunków:

- główne naprężenie rozciągające musi przekroczyć maksymalne dopuszczalne naprężenie,
- kąt pomiędzy istniejącą rysą i głównym naprężeniem rozciągającym musi przekroczyć wartość graniczną kąta  $\alpha_{TD}$ .

W przypadku niespełnienia drugiego z warunków możliwy jest brak zarysowania przy jednoczesnym przekroczeniu naprężeń dopuszczalnych.

Jak zdefiniowano w równaniu (21), naprężenia w rysie w układzie lokalnym  $n$ - $t$  rysy określone są przez odpowiadające im odkształcenia  $s_i^{\text{cr}} = f(e_i^{\text{cr}})$ . Dalsze uproszczenie polega na rozprężeniu zależności pomiędzy naprężeniami normalnymi  $\sigma_{nn}^{\text{cr}}$  i naprężeniami ścinającymi  $\tau_{nt}^{\text{cr}}$ . Co pozwala zapisać zależność konstytutywną dla  $i$ -tej rysy w postaci

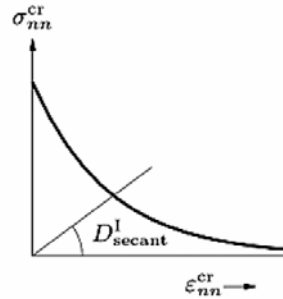
$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn}^{\text{cr}} \\ \tau_{nt}^{\text{cr}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{\text{secant}}^{\text{I}} & 0 \\ 0 & D^{\text{II}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{nn}^{\text{cr}} \\ \gamma_{nt}^{\text{cr}} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

indeks dolny  $i$  został opuszczony ze względu na uproszczenie zapisu.

Moduł sieczny  $D_{\text{secant}}^{\text{I}}$  (rys. 8) jest określony przez zastosowanie funkcji mięknięcia  $\sigma_{nn}^{\text{cr}} = f_{nn}(\epsilon_{nn}^{\text{cr}})$  według następującego związku

$$D_{\text{secant, current}}^{\text{I}} = \min \left[ D_{\text{secant, previous}}^{\text{I}}, \frac{f_{nn}(\epsilon_{nn}^{\text{cr}})}{\epsilon_{nn}^{\text{cr}}} \right] \quad (23)$$

W przypadku odciążenia rysy moduł sieczny pozostaje stały. Oznacza to, że w zamykającej się rysie naprężenia i odkształcenia normalne zmniejszają się.



Rys. 8. Sztywność sieczna w rysie

Fig. 8. Secant crack stiffness

Na podstawie założenia rozdzielania odkształceń zależność pomiędzy wektorem naprężeń i wektorem odkształceń w układzie globalnym można zapisać w sposób następujący

$$\sigma = D \{ \varepsilon - \varepsilon^{cr} \} \quad (24)$$

Podstawiając (15), otrzymujemy

$$\sigma = D \{ \varepsilon - N e^{cr} \} \quad (25)$$

Według (22) można zapisać, że  $s^{cr} = D_{secant}^{cr} e^{cr}$ . Podstawiając dalej do tej zależności zależność pomiędzy wektorem naprężeń w układzie globalnym i wektorem naprężeń w układzie lokalnym rysy (19), otrzymamy

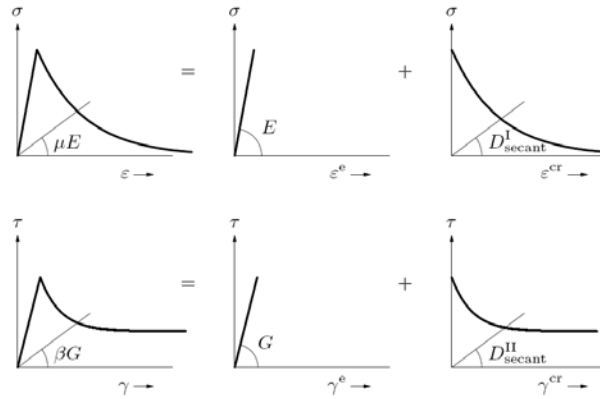
$$\sigma = D \{ \varepsilon - N [D_{secant}^{cr}]^{-1} N^T \sigma \} \quad (26)$$

po kilku algebraicznych przekształceniach możemy zapisać

$$\sigma = [D - DN [D_{secant}^{cr} + N^T DN]^{-1} N^T D] \cdot \varepsilon \quad (27)$$

Zależność pomiędzy tradycyjnymi parametrami zarysowania, tj. współczynnikiem  $\mu$  redukującym moduł Younga i współczynnikiem  $\beta$  redukującym moduł ścinania, została zilustrowana na rys. 9. Do czasu zarysowania materiał jest izotropowy, później materiał jest ortotropowy, w którym parametry  $\mu$  i  $\beta$  są związane z modułami siecznymi  $D_{secant}^I$  i  $D_{secant}^{II}$  w następujący sposób

$$D_{secant}^I = \frac{\mu}{1 - \mu} E \quad D_{secant}^{II} = \frac{\beta}{1 - \beta} G \quad (28)$$



Rys. 9. Zależność pomiędzy modułami siecznymi a tradycyjnymi parametrami rysy [13]

Fig. 9. Relation between traditional and secant crack parameters [13]

Dla przyjętej funkcji mięknienia  $y(\dots)$  zależności pomiędzy naprężeniem rysującym  $\sigma_{nn}^{cr}$ , a odkształceniem rysującym  $\varepsilon_{nn}^{cr}$  na kierunku normalnym można zapisać równaniem

$$\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr}) = f_t \cdot y\left(\frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}}\right) \quad (29)$$

gdzie  $f_t$  jest wytrzymałością na rozciąganie, a  $\varepsilon_{nn,ult}^{cr}$  jest granicznym odkształceniem rysującym. W programie wytrzymałość na rozciąganie i odkształcenie graniczne może być funkcją różnych zmiennych, np. dojrzłości. Jeśli mięknienie odniesione do energii pęknięcia  $G_f^I$  na długości ekwiwalentnej lub *crack band* (tj. strefy zarysowania) oznaczmy jako  $h$ , to można zapisać następującą zależność

$$G_f^I = h \int_{\varepsilon_{nn}^{cr}=0}^{\varepsilon_{nn}^{cr}=\infty} \sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr}) d\varepsilon_{nn}^{cr} \quad (30)$$

Podstawiając (29) do (30), otrzymamy

$$G_f^I = h \cdot f_t \int_{\varepsilon_{nn}^{cr}=0}^{\varepsilon_{nn}^{cr}=\infty} y\left(\frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}}\right) d\varepsilon_{nn}^{cr} \quad (31)$$

zakładając, że  $f_t$  jest stałą i zamieniając zmienną  $\varepsilon_{nn}^{cr}$  na

$$x = \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}} \quad (32)$$



oraz  $d\varepsilon_{nn}^{cr}$  na  $\varepsilon_{nn,ult}^{cr} dx$ , otrzymamy

$$G_f^I = h \cdot f_t \left( \int_{x=0}^{x=\infty} y(x) dx \right) \cdot \varepsilon_{nn,ult}^{cr} \quad (33)$$

Ostateczne równanie na graniczne odkształcenie rysujące podane jest zależnością

$$\varepsilon_{nn,ult}^{cr} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{G_f^I}{h \cdot f_t} \quad (34)$$

gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem określonym przez całkę

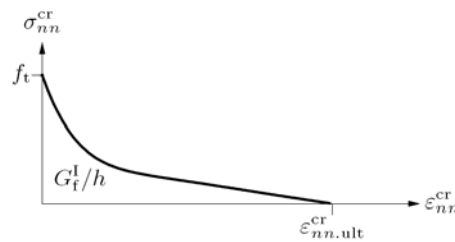
$$\alpha = \int_{x=0}^{x=\infty} y(x) dx \quad (35)$$

Wielkość  $\varepsilon_{nn,ult}^{cr}$  jest przyjęta jako właściwość materiału związana z elementem, która może być policzona na podstawie właściwości materiału, wytrzymałości na rozciąganie, energii pęknięcia i pola elementu reprezentowanego przez długość ekwiwalentną  $h$ .

W obliczeniach zastosowano krzywą mięknięcia wg Hordijk [19] opisaną następującym równaniem

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}(\varepsilon_{nn}^{cr})}{f_t(r)} = \begin{cases} \left( 1 + \left( c_1 \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}} \right)^3 \right) \exp \left( -c_2 \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}} \right) - \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}} (1 + c_1^3) \exp(-c_2) & \text{gdy } 0 < \varepsilon_{nn}^{cr} < \varepsilon_{nn,ult}^{cr} \\ 0 & \text{gdy } \varepsilon_{nn,ult}^{cr} < \varepsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (36)$$

Parametry  $c_1$  i  $c_2$  wynoszą – odpowiednio – 3,0 i 6,93.



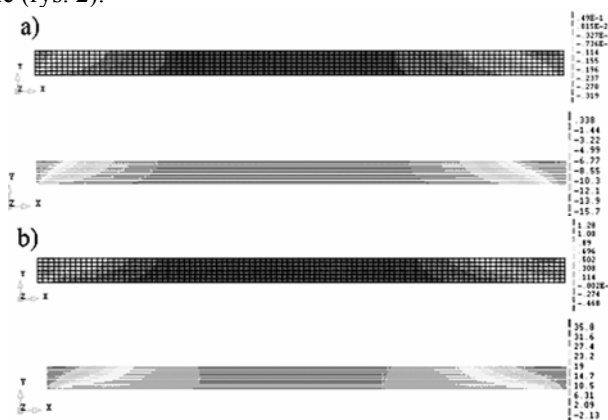
Rys. 10. Funkcja nieliniowego mięknięcia wg [19]

Fig. 10. The nonlinear tension softening according to [19]

## 6. Wyniki obliczeń i wnioski końcowe

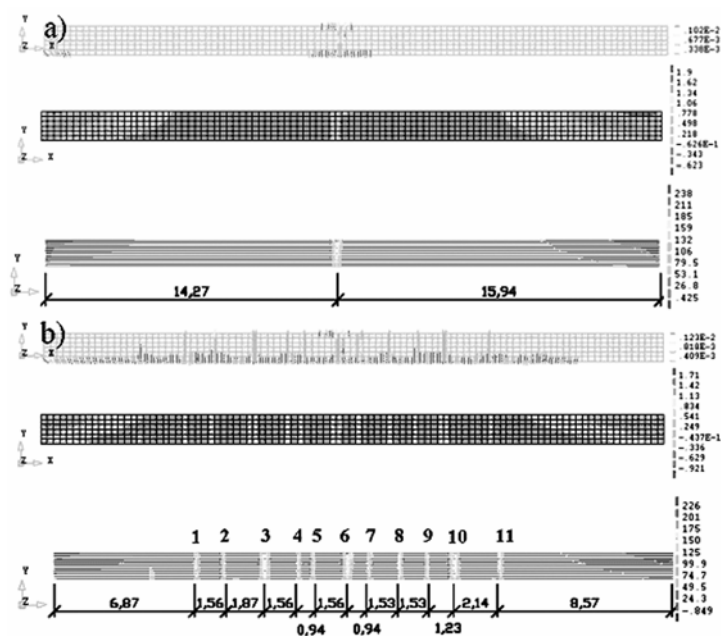
W wyniku powyższych założeń obliczeniowych, przyjętych właściwości materiałów oraz etapowości analizy uzyskano następujące wyniki obliczeń. Podczas procesu hydratacji obserwowane jest pęcznienie betonu, które skutkuje powstaniem naprężeń ściskających zarówno w betonie, jak i stali (rys. 11a)). Gdy proces hydratacji ulega stopniowemu wygasaniu, temperatura zewnętrzna ma większy wpływ na zmiany temperatury w przekroju ściany. Powoduje to schłodzenie ściany i rozwój naprężeń rozciągających zarówno w betonie, jak i stali zbrojeniowej (rys. 11b)). W miarę dalszego schładzania się ściany następuje wzrost naprężeń rozciągających, które po przekroczeniu efektywnej wytrzymałości betonu na rozciąganie powodują powstanie pierwszych rys. Sytuacja ta, przedstawiona na rys. 12b), obrazowana jest w następującej kolejności: odkształcenia rysujące, spadek naprężeń w betonie i znaczny wzrost naprężeń w zbrojeniu poziomym. Dalsze obniżanie się temperatury powoduje pojawianie się kolejnych rys, raz po jednej, raz po drugiej stronie, stopniowo się zagęszczając (rys. 12b)).

W momencie dostawienia kolejnego segmentu ściany (faza 3) następuje wzrost temperatury i jego pęcznienie, skutkuje to powstaniem naprężeń ściskających w nim samym. Powoduje to również wzrost naprężeń rozciągających w segmencie poniższym zarówno w betonie, jak i w stali zbrojeniowej (rys. 13a)) oraz poszerzeniem się rys pod nowo dostawionym segmentem. W momencie spadku temperatury powstają naprężenia rozciągające w schładzanym segmencie, a rysy i naprężenia rozciągające w segmencie poniższym ulegają zmniejszeniu (rys. 13b)). W przypadku dostawienia kolejnego segmentu (faza 4) sytuacja jest analogiczna, z tym że podczas obniżania się temperatury w segmencie najmłodszym, skrzepowanym zarówno na dolnej krawędzi, jak i na jednej pionowej, pojawia się zarysowanie (rys. 14a)). W miarę dalszego obniżania się temperatury powstają kolejne rysy, co przedstawiono na rys. 14b)). Rysy, które powstają w segmencie z fazy 4 usytuowane są bezpośrednio nad rysami z segmentu z fazy 2, co było również obserwowane na badanym obiekcie (rys. 2).



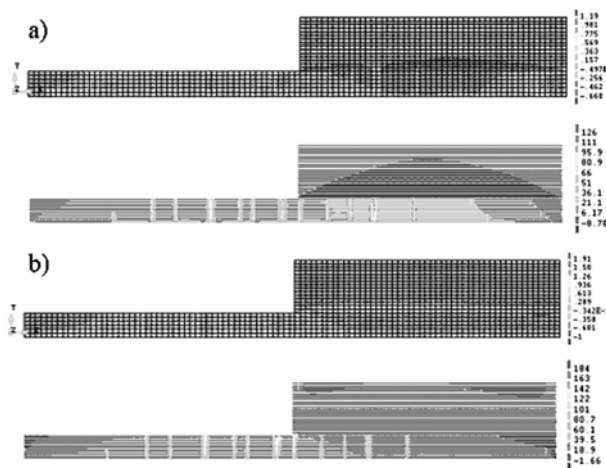
Rys. 11. Rozkład naprężeń równoleżnikowych w betonie i zbrojeniu poziomym dla pierwszego fragmentu ściany: a) podczas wzrostu i b) spadku temperatury [7]

Fig. 11. The distribution of the horizontal stresses in concrete and steel for first part of the wall during: a) heating and b) cooling process [7]



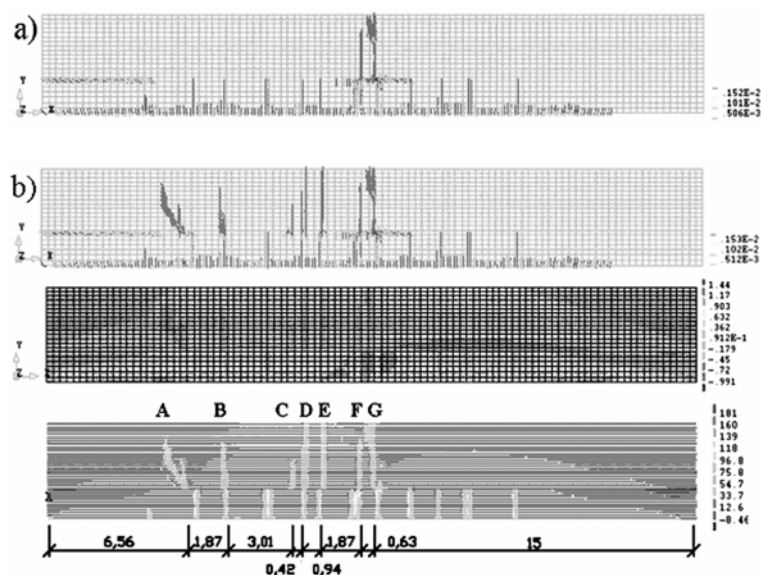
Rys. 12. Odształcenia rysujące oraz rozkłady naprężeń równoleżnikowych w betonie i zbrojeniu poziomym podczas postępującego procesu obniżania się temperatury

Fig. 12. The crack strains and the distribution of the horizontal stresses in concrete and steel during progressive cooling process



Rys. 13. Rozkład naprężeń równoleżnikowych w betonie i zbrojeniu poziomym w fazie 3 podczas a) wzrostu i b) spadku temperatury w nowo dobetonowanym fragmencie ściany [7]

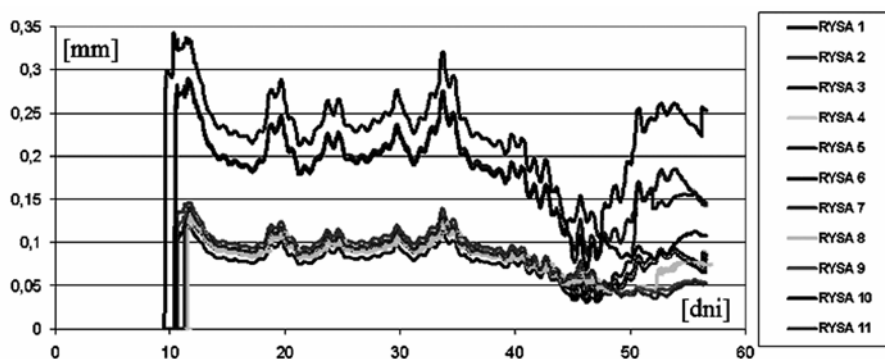
Fig. 13. The distribution of the horizontal stresses in concrete and steel in phase 3 during a) heating and b) cooling process in added part of the wall [7]



Rys. 14. Odształcenia rysujące oraz rozkłady naprężeń równoleżnikowych w betonie i zbrojeniu poziomym podczas postępującego procesu obniżania się temperatury (faza 4)

Fig. 14. The crack strains and the distribution of the horizontal stresses in concrete and steel during progressive cooling process (phase 4)

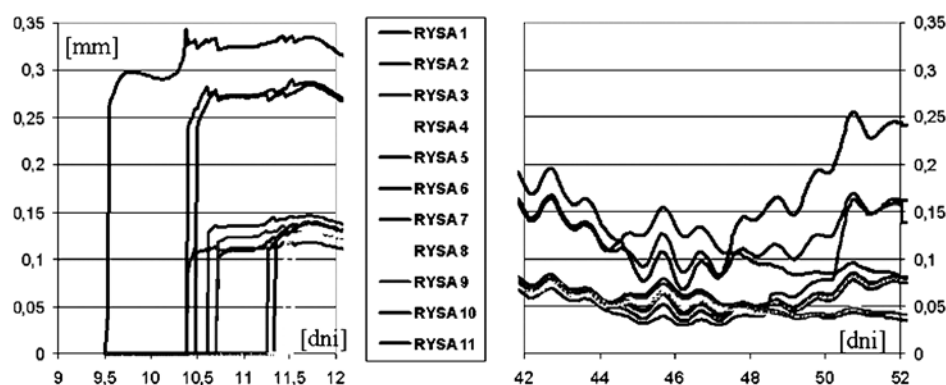
Na rysunku 5 przedstawiono zmiany rozwartości powstających rys w funkcji czasu dla pierwszego segmentu ściany. Pierwsze zarysowanie powstaje w okresie szybszego spadku temperatury, tj. podczas pory nocnej (9,5 doby od zabetonowania – rys. 6a)). Analogicznie, kolejne rysy powstają również porą nocną 10,5 i 11,5 doby od zabetonowania. Charakterystyczne dla tego typu zarysowania jest to, że rysy, które powstają jako pierwsze, mają największą rozwartość. Ów segment uległ zarysowaniu w okresie niskich temperatur zewnętrznych,



Rys. 15. Rozwartość rys w funkcji czasu dla pierwszego segmentu ściany

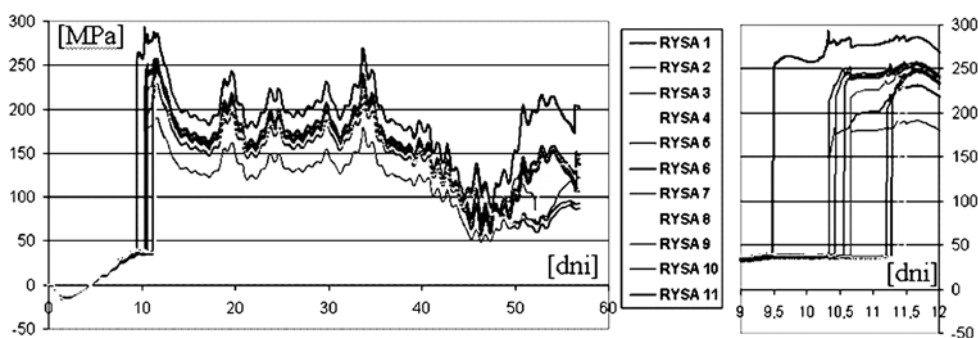
Fig. 15. The cracks width as a function of time for first part of the wall

natomiast kolejne miesiące były zdecydowanie cieplejsze, toteż rozwarło się rys uległy zmniejszeniu. W początkowym okresie, tj. przed zabetonowaniem segmentu z fazy 3, wszystkie rozwarło się rys zmieniają się w zależności od aktualnej zmiany temperatury segmentu w niemal równoległy sposób. W momencie dostawienia segmentu z fazy 3 każda rysa przy tej samej lub podobnej zmianie temperatury zachowuje się w nieco odmienny sposób, co wynika – oczywiście – z wpływu odkształceń i sztywności nowo dostawionego segmentu (rys. 16b)).



Rys. 16. Szczegóły zmiany rozwarło się rys w charakterystycznych przedziałach czasu: a) w okresie powstawania rys, b) w okresie dobetonowywania kolejnych segmentów

Fig. 16. The details of cracks width variation in special time's interval: a) when cracks appeared, b) when the next part of the wall was added

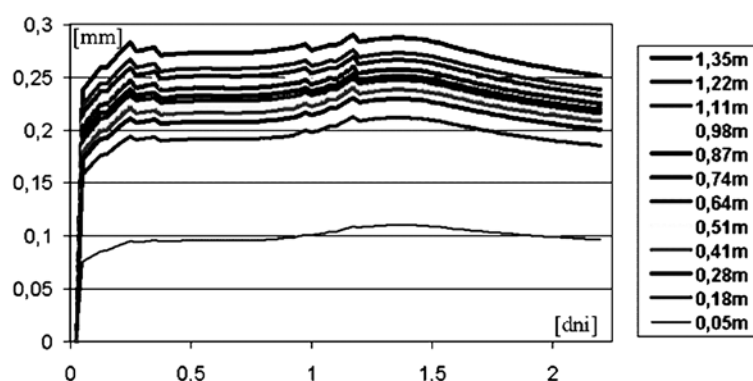


Rys. 17. Zmiana naprężeń maksymalnych w wybranych punktach stali zbrojeniowej przechodzącej przez rysy w funkcji czasu

Fig. 17. The development of maximal stresses in reinforcement chosen points crossing through the cracks as a function of time

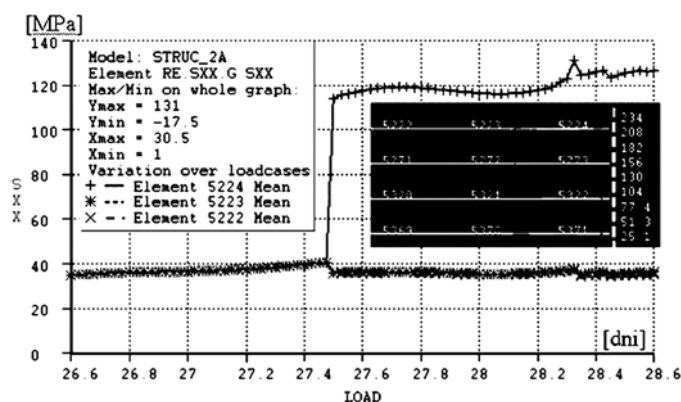
Na rysunku 17 przedstawiono zmiany maksymalnych naprężeń w poziomych prętach zbrojeniowych przechodzących przez rysy przedstawione na rys. 15. Wielkości otrzymanych naprężeń są znaczące. Jednak ulegają one znacznemu zmniejszeniu nie tylko w wyniku zmian temperatury, ale w momencie zabetonowania nad nimi nowych segmentów, które kurcząc się, powodują zmniejszenie rozwartości rys.

Zaprezentowane na rys. 15 i 16 rozwartości rys zostały odczytane z górnej krawędzi segmentu. Przy tak niskim elemencie zamocowanym w płycie fundamentowej rozwartość rys po wysokości zmienia się w sposób istotny (rys. 18). W miejscu utwierdzenia wartość ta wynosi oczywiście zero, ok. 5 cm nad utwierdzeniem wielkość ta jest prawie trzykrotnie mniejsza od wartości maksymalnej, natomiast na wysokości 18 cm stanowi już ok. 60% maksymalnej rozwartości.



Rys. 18. Rozwartość drugiej rysy po wysokości segmentu w okresie pierwszych dwóch dni od jej powstania

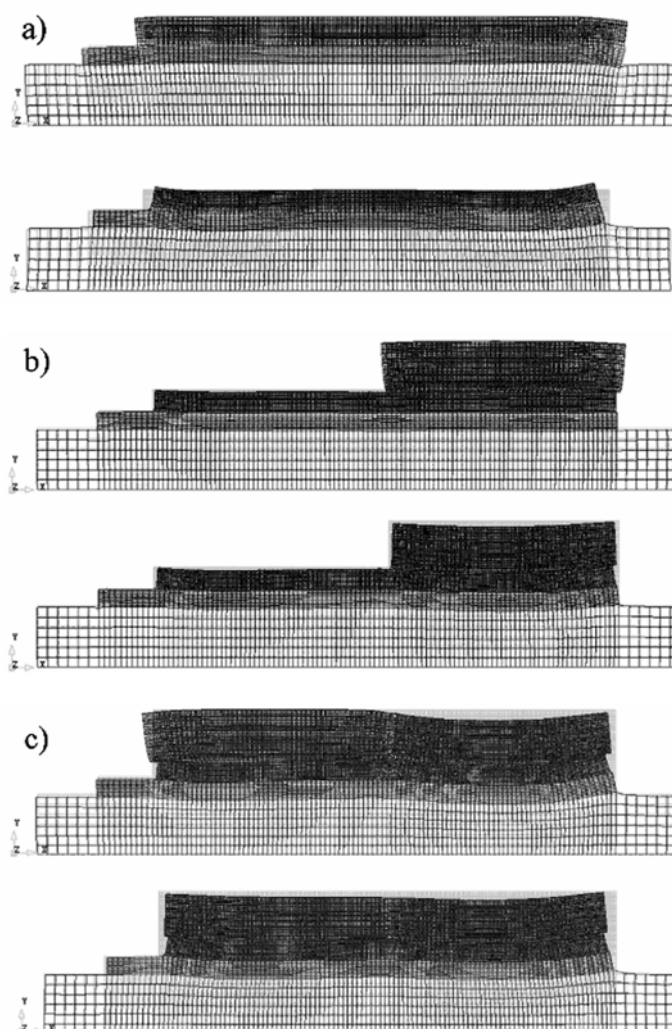
Fig. 18. The widths of the second crack for different heights presented in first two days when the crack appeared



Rys. 19. Naprężenia średnie w zbrojeniu przed zarysowaniem i po zarysowaniu

Fig. 19. Mean stresses in reinforcement before and after cracking





Rys. 20. Mapy przemieszczeń w poszczególnych fazach pracy konstrukcji podczas wzrostu i spadku temperatury: a) dla pierwszego fragmentu ściany o grubości 0,75 m (na płycie fundamentowej), b) dobetonowany drugi fragment o grubości 0,5 m, c) dobetonowany kolejny fragment ściany o grubości 0,5 m

Fig. 20. The maps of the displacements in each phases during heating and cooling process: a) for first part of the wall (based on slab), b) when the second part of the wall is added (the thickness 0,5 m), c) and the next part of the wall is added (the thickness also 0,5 m).

W przypadku analizy konstrukcji poddanych obciążeniom zewnętrznym (np. obciążenie stałe, zmienne użytkowe) przed zarysowaniem i po zarysowaniu naprężenia w stali zbrojeniowej w przekroju przez rysę i obok rysy wzrastają. W elemencie, którego obciążenie wynika z właściwości samego materiału, tj. ciepła hydratacji bądź skurczu, naprężenie w mo-

mencie zarysowania elementu ulega zmniejszeniu. Naprężenia wzrastają jedynie w zbrojeniu przechodzącym przez rysę, natomiast w jej sąsiedztwie, zarówno w betonie, jak i w stali, spadają (rys. 19).

Na rysunku 20a)–c) przedstawiono mapy przemieszczeń dla poszczególnych faz betonowania ściany zarówno w fazie nagrzewu, tj. wzrostu temperatury od ciepła hydratacji (wtedy następuje pęcznienie elementu), jak i podczas fazy studzenia, gdy następuje kurczenie się elementu.

Powyższe obliczenia należy traktować jako przybliżone, gdyż model ze względu na objętość zadania nie uwzględnia przestrzennej pracy konstrukcji. Jednak przyjęty model obliczeniowy daje zbliżony układ rys powstałych we wczesnym okresie dojrzewania betonu do rzeczywistego układu rys zarejestrowanego podczas wznoszenia obiektu.

Zarysowanie segmentu wykonywanego na segmencie istniejącym przedstawione w obliczeniach odzwierciedla zjawisko powstawania rys bezpośrednio nad istniejącymi rysami w segmencie wykonywanym wcześniej.

W przedstawionym przykładzie obliczeniowym naprężenia w otoczeniu rys spadają, ściana odpręża się i kolejna rysa może powstać w innym obszarze.

We wczesnym okresie dojrzewania betonu i znikomej przyczepności zbrojenia powinno ono być modelowane jako bezprzyczepnościowe.

Dalsze badania i obliczenia (na szerszej liczbie przypadków) są potrzebne, aby uzyskać pełniejszą zgodność wyników z obserwacjami. Toteż przedstawiony model obliczeniowy zostanie skorelowany z większą bazą obserwowanych zbiorników żelbetowych, jak również zostaną zbadane parametry materiałowe mające istotny wpływ na pracę konstrukcji, których w przypadku konstrukcji masywnych – chociażby ze względu na stale zmieniające się parametry dojrzewającego betonu – jest więcej i są one trudniejsze do zbadania.

## Literatura

- [1] PN-EN 1992-3, Eurokod 2, Projektowanie konstrukcji betonowych, Część 3: Silosy i zbiorniki, Sierpień 2006.
- [2] Eurocode 2, Design of concrete structures, Part 3: Liquid retaining and containment structures, October 2004.
- [3] RILEM RAPORT 15, *Prevention of Thermal Cracking in Concrete at Early Ages*, Edited by R. Springenschmid, London 1998.
- [4] Kordecki Z., Szarliński J., Urbański A., Biliński W., Truty A., *Odkształcenia termiczno-wilgotnościowe w masywnych konstrukcjach z betonu. Konstrukcje hydrotechniczne – analiza numeryczna*, Politechnika Krakowska, Kraków 1993.
- [5] Zych M., *Naprężenia termiczne w dojrzewającym betonie ściany zbiornika żelbetowego*, Czasopismo Techniczne z. 12/2007, seria Środowisko z. 1-S/2007, Kraków.
- [6] Zych M., *Numerical analysis of reinforcement stresses and stages of early age cracking in concrete tank's wall*, Juniorstav, 23 January 2008, Brno.
- [7] Seruga A., Zych M., *The modeling of early age cracking in monolithic reinforced concrete rectangular tank wall*, AMCM 2008, 6<sup>th</sup> International Conference, Łódź, 9–11 June 2008.

- [8] PN-B-03264:2002. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie.
- [9] Witkowski P., *Termodynamiczna teoria dojrzewania*, Kraków 1998.
- [10] Kiernożycki W., *Betonowe konstrukcje masywne*, Polski Cement, Kraków 2003.
- [11] *CEB-FIP Model Code 1990*. Comité Euro-International du Béton, 1993.
- [12] Bazant Z.P., Panula L., Part II: *Basic creep*, *Materiaux et constructions*, Vol. 11, No. 65.
- [13] TNO Diana Analysis Procedures, Edited by: Frits C. de Witte and Wijnze Pieter Kikstra March 8, 2005.
- [14] Witasse R., Hendriks M.A.N., *Finite Element Modeling of Early Age Concrete Behavior using Diana*, TNO Building and Construction Research, Delft, The Netherlands.
- [15] Litton R.W., *A Contribution to the Analysis of Concrete Structures Under Cyclic Loading*, PhD thesis, University of California, Berkeley 1974.
- [16] De Borst R., Nauta P., *Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model*, *Engineering Computations* 2 (1985), 35-46.
- [17] Rots J.G., *Computational Modeling of Concrete Fracture*, PhD thesis, Delft University of Technology, 1988.
- [18] Szarliński J., Winnicki A., Podleś K., *Konstrukcje z betonu w płaskich stanach*, Kraków 2002.
- [19] Cornelissen H.A.W., Hordijk D.A., Reinhardt H.W., *Experimental determination of crack softening characteristics of normalweight and lightweight concrete*, *Heron* 31, 2 (1986).