

JÓZEF NIZIOŁ\*, ZBIGNIEW PIEKARSKI\*\*, WŁODZIMIERZ WÓJCIK\*\*

## OPTYMALIZACJA NIEOKRESOWA I OKRESOWA Z WYKORZYSTANIEM POCHODNYCH STEROWANIA

### THE NONPERIODIC AND PERIODIC OPTIMIZATION BY MEANS OF CONTROL DERIVATIVES

#### Streszczenie

W niniejszym artykule przedstawiono rozwiązanie problemu optymalizacji dla przypadku, gdy na funkcje sterujące nałożone są warunki brzegowe. Aby rozwiązać to zagadnienie, trzeba założyć, że sterowanie jest ciągłe. Wtedy można je zastąpić przez dodatkowe zmienne stanu spełniające odpowiednie warunki. W przedstawionej metodzie nowym sterowaniem stają się pochodne pierwotnych funkcji sterowania. Jako przykład teoretyczny została przeanalizowana optymalizacja okresowa drgań swobodnych pręta sprężystego. Przekrój poprzeczny tego pręta jest sterowaniem, które na swoim początku i końcu ma określone wartości. Przyjmujemy, że nowe sterowanie jest okresowe. Problem rozwiązany został za pomocą zmodyfikowanej zasady maksimum, która takie okresowe sterowanie pozwala obliczać.

*Słowa kluczowe: sterowanie okresowe, warunki brzegowe na sterowanie, pochodne sterowania, drgający pręt, okresowa optymalizacja*

#### Abstract

In the paper for the case when control functions fulfil the definite boundary conditions the optimization is investigated. In order to solve this problem we assume that the control is continuous. This can be substituted by additional state variables. In this method the derivatives of the primitive controls are new functions. As the theoretical example the periodic optimization of the vibrating elastic bar has been researched. The cross – section is the control which has date values on the beginning and the end of the interval. We assume that the new control is periodic. The problem of the periodic optimization on the basis of the modified maximum principle has been solved.

*Keywords: periodic control, the control under boundary conditions, derivative of the control, vibrating bar, periodic optimization*

\* Prof. zw. dr hab. Józef Nizioł, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

\*\* Dr hab. Zbigniew Piekarski, prof. PK, prof. dr hab. Włodzimierz Wójcik, Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

W artykule rozwiązany został problem optymalizacji w przypadku, gdy na sterowanie narzucone są warunki brzegowe. Oznacza to, że wartości sterowania są dokładnie określone w początkowym i końcowym punkcie przedziału optymalizacji. Wykorzystujemy metodę polegającą na zamianie funkcji sterowania na zmienne stanu. Stosując zasadę Pontriagina [1] lub zmodyfikowaną zasadę maksimum dla sterowań okresowych [2, 3], znajdujemy optymalne sterowanie z odpowiedniego warunku optymalności.

Zastąpienie sterowania przez zmienne stanu implikuje pojawienie się nowych funkcji sterowania. Są nimi pochodne zwyczajne „starych” sterowań, czyli pochodne wprowadzonych zmiennych stanu. Pochodne te istnieją, ponieważ początkowe funkcje sterujące są ciągłe.

## 2. Sformułowanie problemu optymalizacyjnego

W ogólnym przypadku przyjmujemy, że optymalizowany obiekt opisany jest przez układ równań stanu

$$z'_k(x) = f_k(\bar{z}(x), \bar{u}(x), \bar{u}'(x)), \quad (1)$$

gdzie

$$(\cdot)' \equiv \frac{d}{dx}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{oraz} \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

Do równania (1) dołączone są warunki brzegowe

$$z_k(0) = a_k, \quad z_k(l) = b_k \quad (3)$$

Niektóre stałe  $a_k$  mogą być dokładnie określone, inne zupełnie dowolne. Dla pewnych  $k$  między nieznanymi stałymi mogą istnieć określone liniowe związki. Te same uwagi dotyczą stałych  $b_k$ .

Przyjmujemy, że dla funkcji sterujących

$$u_l(x), \quad l = 1, 2, \dots, m$$

obowiązują równości

$$u_l(0) = u_{1l}, \quad u_l(l) = u_{2l} \quad (4)$$

Spośród  $u_{1l}$ ,  $u_{2l}$  niektóre stałe (lub wszystkie) mogą być nieokreślone.

W badanym problemie funkcjonał celu ma postać

$$J = \int_0^l f_0(\bar{z}, \bar{u}, \bar{u}') dx = \min_u \quad (5)$$

Z założenia funkcje

$$f_j, \quad \frac{\partial f_j}{\partial z_k}, \quad \frac{\partial f_j}{\partial u_l}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

są określone i ciągłe ze względu na wszystkie swoje argumenty.

Aby przeprowadzić optymalizację tak postawionego zadania, wprowadzamy nowe zmienne stanu  $y_l$

$$y_l(x) = u_l(x), \quad (6)$$

które są ciągłe, na mocy założenia, że funkcje sterujące  $u_l(x)$  są ciągłe. Ponadto przyjmujemy, że nowymi funkcjami sterującymi będą pochodne  $u'(x)$

$$u'_l(x) = v_l(x) \quad (7)$$

na które narzucamy ograniczenia typu

$$v_1 \leq v_l(x) \leq v_2 \quad (8)$$

Postawiony na wstępie problem optymalizacji możemy teraz zastąpić problemem określonym poniższymi formułami:

a) równania stanu

$$\begin{aligned} z'_k(x) &= f_k(\bar{z}, \bar{y}, \bar{v}), & k &= 1, 2, \dots, n \\ y'_l(x) &= v_l, & l &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (9)$$

b) warunki brzegowe

$$\begin{aligned} z_k(0) &= a_k, & z_k(l) &= b_k \\ y_l(0) &= u_{1l}, & y_l(l) &= u_{2l} \end{aligned} \quad (10)$$

c) funkcjonal celu

$$J = \int_0^l f_0(\bar{z}, \bar{y}, \bar{v}) dx \quad (11)$$

d) ograniczenia na sterowanie

$$\bar{v}_1 \leq \bar{v}(x) \leq \bar{v}_2 \quad (12)$$

Do optymalizacji określonej związkami (9)–(12) można bezpośrednio zastosować zasadę maksimum Pontriagina [1], którą dla badanego zadania zapisujemy jak podano poniżej.

Jeżeli  $\bar{v}^0(x)$  jest sterowaniem optymalnym problemu (9)–(12), to istnieje niezerowa wektorowa funkcja

$$\bar{\lambda}(x) = (\lambda_0, \lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x), \Psi_1(x), \dots, \Psi_m(x)) \quad (13)$$

spełniająca warunki:

$$\text{i) } \lambda_0 = \text{const} \leq 0 \quad (14)$$

ii) zmienne sprzężone  $\lambda_k(x)$  oraz  $\Psi_l(x)$  spełniają układ równań sprzężonych

$$\lambda'_k(x) = -\frac{\partial H(x)}{\partial z_k(x)}, \quad k = 1, \dots, n \quad (15)$$

$$\Psi'_l(x) = -\frac{\partial H(x)}{\partial y_l(x)}, \quad l = 1, \dots, m \quad (16)$$

gdzie hamiltonian  $H(x)$  dany jest wzorem

$$H(x) = \lambda_0 f_0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) f_k + \sum_{l=1}^m \Psi_l(x) v_l \quad (17)$$

iii) warunki brzegowe dla zmiennych sprzężonych wynikają z warunków transversalności

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k(0) \partial z_k(0) + \sum_{l=1}^m \Psi_l(0) \partial y_l(0) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \lambda_k(l) \partial z_k(l) + \sum_{l=1}^m \Psi_l(l) \partial y_l(l) &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

We wzorach (18) muszą być uwzględnione zależności wynikające z warunków (10);

iv) optymalne sterowanie  $\bar{v}^0(x)$  wyznaczamy z warunku optymalności

$$H_{\text{opt}}(x) = \max_{\bar{v} \in U} H(x) \quad (19)$$

gdzie

$$H_{\text{opt}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } l - \text{nieznane} \\ \text{const} \neq 0, & \text{gdy } l - \text{znane} \end{cases} \quad (20)$$

### 3. Przykład matematyczny

Rozpatrujemy prosty przykład optymalizacji, w której nie występują pochodne sterowania, a jedynie w punktach  $x = 0, 1$  zadane są wartości tego sterowania. Problem określony jest przez:

a) równanie stanu

$$z'(x) = u(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (21)$$

b) warunki brzegowe

$$z(0) = a_1, \quad u(0) = u_1, \quad u(1) = u_2 \quad (22)$$

c) funkcjonal celu

$$J = \int_0^1 (z + u) dx = \min_u \quad (23)$$

Zgodnie z założeniami, że sterowanie jest ciągłe, przyjmujemy

$$y(x) = u(x) \quad (24)$$

czyli

$$y'(x) = u'(x) = v(x) \quad (25)$$

Na nowe sterowanie  $v(x)$  narzucamy ograniczenia dane nierównościami (8) w postaci

$$v_1 \leq v(x) \leq v_2 \quad (26)$$

Po wprowadzeniu dodatkowej zmiennej  $y$  problem optymalizacji określony jest wzorami (9)–(12), które przyjmują postać:

a) równanie stanu

$$\begin{aligned} z'(x) &= y(x) \\ y'(x) &= v(x) \end{aligned} \quad (27)$$

b) warunki brzegowe

$$z(0) = a_1, \quad y(0) = u_1, \quad y(1) = u_2 \quad (28)$$

c) funkcjonal celu

$$J = \int_0^1 (z + y) dx \quad (29)$$

Wprowadzony hamiltonian (17) dla  $\lambda_0 = -1$  przyjmuje postać

$$H(x) = -z - y + \lambda(x)y + \Psi(x)v \quad (30)$$

Zmienne sprzężone spełniają wówczas równania

$$\begin{aligned} \lambda'(x) &= 1, \\ \Psi'(x) &= 1 - \lambda(x) \end{aligned} \quad (31)$$

Z warunków transwersalności (18) wynika warunek brzegowy

$$\lambda(1) = 0 \quad (32)$$

Uwzględniając (31) i (32), dostajemy

$$\Psi(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + C_2 \quad (33)$$

Warunek optymalności (19) dla hamiltonianu (30) prowadzi do

$$v(x) = \begin{cases} v_2, & \text{dla } \Psi \geq 0 \\ v_1, & \text{dla } \Psi < 0 \end{cases} \quad (34)$$

Aby określić sterowanie  $v(x)$  musimy obliczyć w jakich punktach zachodzi

$$\Psi(l_1) = 0 \quad (35)$$

Z (33) i (35) wynika warunek na  $C_2$ :  $C_2 > -2$  oraz dla  $-1,5 < C_2 < 0$  mamy

$$0 < l_1 < 1 \quad (36)$$

Z równań (27) przy (34) i (36) wynika

$$y_1(x) = v_1 x + u_1 \quad \text{dla } 0 \leq x \leq l_1 \quad (37)$$

$$y_1(x) = v_2 x + u_2 - v_2 \quad \text{dla } l_1 \leq x \leq 1 \quad (38)$$

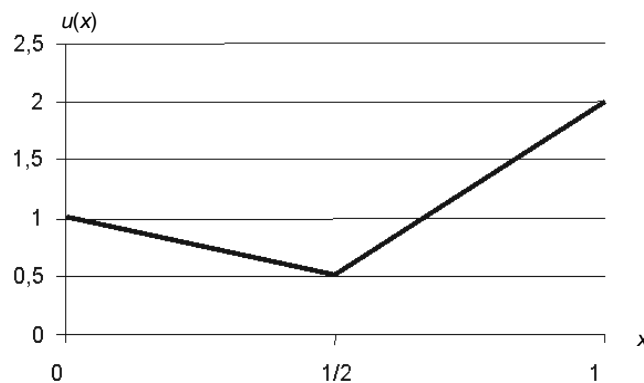
oraz

$$l_1 = \frac{u_1 - u_2 + v_2}{v_2 - v_1} \quad (39)$$

Na przykład dla  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 2$ ,  $v_2 = 3$ ,  $v_1 = -1$  mamy  $l_1 = \frac{1}{2}$ . Ostatecznie dostajemy

$$\begin{aligned} u(x) &= -x + 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ u(x) &= 3x - 1 & \text{dla } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (40)$$

Na rysunku 1 przedstawiono graficzny przebieg optymalnego sterowania opisanego formułą (40). Zgodnie z założeniem optymalne sterowanie spełnia dane warunki brzegowe dla  $x = 0$  oraz  $x = 1$ .



Rys. 1. Zależność sterowania od zmiennej  $x$   
Fig. 1. Dependence of the control as a function of  $x$

#### 4. Optymalizacja podłużnie drgającego pręta

Przyjmujemy, że przekrój poprzeczny podłużnie drgającego pręta jest pierwotnym sterowaniem, które na początku i na końcu przedziału optymalizacji ma zadane wartości. Zakładamy również, że pręt jest sprężysty i wykonuje drgania swobodne.

Po rozdzieleniu zmiennych przestrzennych i czasu badane drgania opisuje równanie

$$\frac{d}{d\tau_1} \left( F(\tau_1) \frac{dz}{d\tau_1} \right) + \omega^2 \frac{\rho}{E} F(\tau_1) z(\tau_1) = 0 \quad \text{dla } 0 \leq \tau_1 \leq l \quad (41)$$

gdzie:

$\rho$  – gęstość,

$E$  – moduł Younga,

$\omega$  – częstość drgań pręta.

Do równania dołączamy warunki brzegowe na zmienne stanu

$$z(0) = 0, \quad \frac{dz(l)}{d\tau_1} = 0 \quad (42)$$

oraz dodatkowe warunki brzegowe na pierwotną funkcję sterującą, czyli pole przekroju pręta

$$F(0) = F_1, \quad F(l) = F_2 \quad (43)$$

Poszukujemy takiego sterowania  $F(\tau_1)$  dla którego objętość pręta będzie przyjmować minimalną wartość

$$J = \int_0^l F(\tau_1) d\tau_1 = \min \quad (44)$$

przy założeniu, że

$$\omega^2 = \text{const} \quad (45)$$

Sformułowana metoda optymalizacji wymaga, aby sterowanie  $F(\tau)$  było ciągłe. Możemy wtedy w równaniu (41) wykonać różniczkowanie

$$\frac{d^2 z}{d\tau_1^2} + \frac{1}{F} \frac{dF}{d\tau_1} \frac{dz}{d\tau_1} + k^2 z = 0 \quad (46)$$

gdzie

$$k^2 = \omega^2 \frac{\rho}{E} \quad (47)$$

Po wprowadzeniu bezwymiarowych wielkości

$$x = \frac{\tau_1}{l}, \quad z_1 = \frac{z}{l}, \quad u(x) = \frac{F}{F_0}, \quad \alpha = kl \quad (48)$$

oraz

$$\left( \frac{\quad}{\quad} \right)' = \frac{d}{dx}, \quad F_0 = l^2 \quad (49)$$

z równania (46) otrzymujemy równanie, w którym występuje pierwsza pochodna bezwymiarowego sterowania

$$z_1'' + \frac{u'}{u} z_1' + \alpha^2 z_1 = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (50)$$

Definiujemy nową zmienną stanu za pomocą równości

$$y_1(x) = u(x) \quad (51)$$

oraz nowe sterowanie  $v(x)$

$$u'(x) = v(x) \quad (52)$$

Wtedy dodatkowe równanie stanu ma postać

$$y_1'(x) = v(x) \quad (53)$$

Po sprowadzeniu równania (50) do układu dwóch równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu dostajemy następujący problem optymalizacji

a) równanie stanu

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= -\frac{z_2}{y_1} v - \alpha^2 z_1 \\ y_1' &= v \end{aligned} \quad (54)$$

b) warunki brzegowe

$$\begin{aligned} z_1(0) &= 0, & z_2(1) &= 0 \\ y_1(0) &= f_1, & y_1(1) &= f_2 \end{aligned} \quad (55)$$

przy

$$f_1 = \frac{F_1}{l^2}, \quad f_2 = \frac{F_2}{l^2} \quad (56)$$

c) funkcjonal celu

$$J = l^3 \int_0^1 y_1(x) dx \quad (57)$$

d) ograniczenia na sterowanie

$$v_1 \leq v(x) \leq v_2 \quad (58)$$

Tak postawiony problem możemy rozwiązać metodą przedstawioną w rozdz. 2. za pomocą zasady maksimum Pontriagina [1] dla nieokresowego sterowania.

W wypadku gdy mamy do czynienia ze sterowaniem okresowym, musimy zastosować zmodyfikowaną zasadę maksimum przedstawioną w pracach [2, 3].

Przedział  $[0, 1]$  zmiennej niezależnej  $x$  dzielimy za pomocą punktów o współrzędnych  $\ell_q$

$$0 = \ell_0 < \ell_1 < \dots < \ell_N = \ell \quad (59)$$

na  $N$  przedziałów o tej samej długości  $T$

$$T = \frac{1}{N}$$

co oznacza, że

$$\begin{aligned} T &= \ell_q - \ell_{q-1}, \quad q = 1, 2, \dots, N, \\ \ell_q &= \frac{q}{N} \quad \text{oraz} \quad \ell_0 = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Zmienną niezależną przebiegającą podprzedział  $[\ell_{q-1}, \ell_q]$  oznaczamy przez  $x_q$ , którą można wyrazić wzorem

$$x_q = T\tau + (q-1)T \quad (61)$$

gdzie  $0 \leq \tau \leq 1$ .



Wprowadzamy oznaczenia

$$\begin{aligned} z_k(x_q(\tau)) &= z_k^q(\tau) \\ y_1(x_q(\tau)) &= y_1^q(\tau) \quad k = 1, 2, \dots, n \\ v(x_q(\tau)) &= v^q(\tau) \end{aligned} \quad (62)$$

Żądamy, aby sterowanie  $v(\tau)$  było okresowe w całym przedziale  $[0, 1]$  zmiennej niezależnej  $\tau$ . Przyjmujemy takie założenie dlatego, że sterowania określone w każdym podprzedziale spełniają warunek okresowości [2]

$$v^1(\tau) = v^2(\tau) = \dots = v^N(\tau) = a(\tau) \quad (63)$$

Sterowanie  $a(\tau)$  nazywamy sterowaniem podstawowym.

Po uwzględnieniu dokonanych założeń nowy proces okresowej optymalizacji możemy zapisać za pomocą następujących związków:

a) równanie stanu (liczba równań wynosi  $3N$ )

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} z_1^q(\tau) &= T z_2^q(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} z_2^q(\tau) &= -T \frac{z_2^q(\tau)}{y_1^q(\tau)} a(\tau) - \alpha^2 T z_1^q(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} y^q(\tau) &= T a(\tau) \end{aligned} \quad (64)$$

b) warunki brzegowe

$$\begin{aligned} z_1^1(0) &= 0, \quad z_2^N(1) = 0 \\ y_1^1(0) &= f_1, \quad y_1^N(1) = f_2 \end{aligned} \quad (65)$$

c) warunki ciągłości

$$\begin{aligned} z_k^{p+1}(0) &= z_k^p(1), \quad k = 1, 2, \dots, n \\ y_1^{p+1}(0) &= y_1^p(1), \quad p = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (66)$$

d) funkcjonal celu

$$V = \ell^3 T \int_0^1 \sum_{q=1}^N y_1^q(\tau) d\tau \quad (67)$$

e) ograniczenia na sterowanie

$$v_1 \leq a(\tau) \leq v_2 \quad (68)$$

Zgodnie ze zmodyfikowaną zasadą maksimum [2] całkowity hamiltonian ma postać

$$H(\tau) = \sum_{q=1}^N H^q(\tau) \quad (69)$$

gdzie hamiltoniany cząstkowe  $H^q(\tau)$  dane są wzorami

$$\begin{aligned} H^q(\tau) = & \lambda_0 \ell^3 T y_1^q(\tau) + T \lambda_1^q(\tau) z_2^q(\tau) - T \lambda_2^q(\tau) \frac{z_2^q(\tau)}{y_1^q(\tau)} a(\tau) - \\ & - \alpha^2 T \lambda_2^q(\tau) z_1^q(\tau) + T \Psi_1^q(\tau) a(\tau) \end{aligned} \quad (70)$$

Za pomocą hamiltonianów (70) możemy zapisać równania, które muszą spełniać zmienne sprzężone

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \lambda_k^q(\tau) &= - \frac{\partial H^q(\tau)}{\partial z_k^q(\tau)}, \quad k = 1, 2 \\ \frac{d}{d\tau} \Psi_1^q(\tau) &= - \frac{\partial H^q(\tau)}{\partial y_1^q(\tau)} \end{aligned} \quad (71)$$

z których otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \lambda_1^q(\tau) &= \alpha^2 T \lambda_2^q(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} \lambda_2^q(\tau) &= -T \lambda_1^q(\tau) + T \frac{\lambda_2^q(\tau)}{y_1^q(\tau)} a(\tau) \\ \frac{d}{d\tau} \Psi_1^q(\tau) &= -T \lambda_2^q(\tau) z_2^q(\tau) \frac{1}{(y_1^q(\tau))^2} a(\tau) - \lambda_0 \ell^3 T \end{aligned} \quad (72)$$

Do powyższych równań należy dołączyć warunki brzegowe. Wyprowadzamy je z warunków transwersalności (18) po uwzględnieniu warunków (22) czy (28)

$$\begin{aligned} \lambda_2^1(0) &= 0, & \lambda_1^N(1) &= 0 \\ \lambda_k^{p+1}(0) &= \lambda_k^p(1), & \Psi_1^{p+1}(0) &= \Psi^p(1) \end{aligned} \quad (73)$$

W zmodyfikowanej zasadzie maksimum okresowe sterowanie, a więc również sterowanie podstawowe, znajdujemy z warunku optymalności, w którym występuje suma hamiltonianów cząstkowych

$$H_{\text{opt}}(\tau) = \max_{a(\tau)} \sum_{q=1}^N H^q(\tau) \quad (74)$$

Z warunku (73) z uwzględnieniem (70) widać, że sterowanie podstawowe będzie optymalne, gdy będzie równe stałym  $v_1$  lub  $v_2$  (68) w zależności od znaku współczynnika występującego przy tym sterowaniu

$$a(\tau) = \begin{cases} v_2, & \sum_q (\Psi_1^q - \frac{\lambda_2^q z_2^q}{y_1^q}) \geq 0 \\ v_1, & \sum_q (\Psi_1^q - \frac{\lambda_2^q z_2^q}{y_1^q}) < 0 \end{cases} \quad (75)$$

Ostatecznie zagadnienie optymalizacji podłużnie drgającego pręta wymaga rozwiązania układu równań stanu (64) i układu równań zmiennych sprzężonych (72) z warunkami brzegowymi (65), (66) i (73) oraz sterowaniem podstawowym (75).

## 5. Wnioski

Przeprowadzone rozważania pozwalają wyciągnąć następujące wnioski:

- 1) w procesie optymalizacji dla ciągłych funkcji sterujących można dokonać zamiany tych funkcji na dodatkowe zmienne stanu,
- 2) na wprowadzone nowe zmienne stanu można narzucić warunki brzegowe, tzn. sterowanie w początkowym i końcowym punkcie przyjmuje z góry zadane wartości,
- 3) jak pokazuje przykład w rozdz. 3, można wprowadzić nowe funkcje sterujące, którymi są pierwsze pochodne funkcji sterowania pierwotnego. Zrobić to można nawet w wypadku gdy problem optymalizacji nie zależy na wstępie od takich pochodnych,
- 4) z przykładu w rozdz. 4 wynika, że badana procedura może być zastosowana do optymalizacji, w której końcowe funkcje sterujące (odpowiednie pochodne) są okresowe przy założeniu, że zmienne stanu nie są okresowe.

Przedstawiona metoda może być z powodzeniem stosowana do wielu bardzo różnych zadań optymalizacji, jak np. do omówionych w pracach [4, 5], lub do problemów optymalnego kształtowania przedstawionych w pracach [6, 7] po przyjęciu, że wykorzystane w nich sterowanie jest ciągłe.

## Literatura

- [1] Leitman G., *Wprowadzenie do teorii sterowania optymalnego*, WNT, Warszawa 1971.
- [2] Piekarski Z., *Pewne problemy teorii sterowania okresowego*, Monografia 337, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2006.
- [3] Nizioł J., Piekarski Z., *The quasi-periodic optimization with the various system functions*, Machine Dynamics Problems, No. 1, Vol. 31, 2007, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2007, 60-71.
- [4] Gajewski A., Piekarski Z., *Optimization of vibrating column with periodic cross – section and various foundation*, Papers of the Fifth Word Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, 19–23 May, Lido di Jesolo, 2003.
- [5] Kurzyk J., Piekarski Z., Wójcik W., *Okresowa optymalizacja drgań pręta z punktowymi ograniczeniami zmiennych stanu*, Czasopismo Techniczne z. 4-M/2008, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2008, 83-95.
- [6] Mikulski L., *Optymalne kształtowanie sprężystych układów prętowych*, Monografia 259, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999.
- [7] Mikulski L., *Teoria sterowania w problemach optymalizacji konstrukcji i systemów*, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007.