

MAŁGORZATA JANUS-MICHALSKA, DOROTA JASIŃSKA*

**ZAGADNIENIE KONTAKTU SPRĘŻYSTEGO
OŚRODKA ANIZOTROPOWEGO
NA PRZYKŁADZIE MATERIAŁU KOMÓRKOWEGO
O UJEMNYM WSPÓŁCZYNNIKU POISSONA**

**CONTACT PROBLEM FOR A CLASS OF ANISOTROPIC
ELASTIC CELLULAR BODIES
WITH NONPOSITIVE POISSON'S RATIO**

Streszczenie

Artykuł przedstawia rozwiązania numeryczne płaskiego zagadnienia kontaktu z tarcieniem z anizotropowym ośrodkiem o ujemnym współczynniku Poissona. Jako przykład takiego continuum wybrano materiał komórkowy. Własności mechaniczne efektywnego continuum w zakresie sprężystym określone są przez rodzaj materiału konstruującego szkielet struktury komórkowej i jego strukturę wewnętrzną. Analiza wyników pozwala określić zależność rozkładu naprężeń w strefie kontaktu oraz zachowania (poślizg lub szczypanie) w zależności od własności anizotropowych materiału reprezentowanych przez tensor sztywności.

Słowa kluczowe: zagadnienie kontaktu, tarcie, materiały komórkowe, ujemny współczynnik Poissona, anizotropia

Abstract

The paper presents numerical solutions of planar frictional contact problem with anisotropic negative Poisson's ratio materials. As an example of anisotropic medium cellular materials are considered. Properties of the effective continuum in elastic range is determined by the type of material constructing cellular skeleton and its structure. Analysis of the obtained results shows relationship of contact stress distribution and type of behaviour in dependence on anisotropic properties represented by stiffness tensor.

Keywords: contact problem, friction, auxetic cellular materials, elasticity, anisotropy

* Dr inż. Małgorzata Janus-Michalska, dr inż. Dorota Jasińska, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

W zagadnieniach mechaniki kontakt jest jednym z podstawowych problemów, ze względu na fakt, że jest to główny sposób przekazywania obciążeń. Większość prac poświęconych temu tematowi skupia się nad wyznaczeniem naprężeń w strefie kontaktu, których maksymalne wartości określają dopuszczalną wartość obciążeń zewnętrznych. Rzeczywiste powierzchnie rozważane w zadaniach inżynierskich są szorstkie, a właściwość tę określa się w skali makroskopowej przez współczynnik tarcia. Najprostszy model tarcia zakłada, że w strefie kontaktu może występować ścieranie lub poślizg zależnie od wielkości powstałych naprężeń stycznych. O zachowaniu się ciał w strefie kontaktu decyduje zarówno sposób i wielkość obciążenia, wartość współczynnika tarcia, jak również sprężyste własności ośrodka sprężystego określone między innymi przez współczynnik Poissona. Kwazistatyczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego kontaktu z ośrodkami anizotropowymi wskazuje na możliwość istotnej zmiany rozkładu naprężeń w strefie kontaktu w porównaniu z ośrodkiem izotropowym [6, 8, 9]. Również występowanie stref ścierania i poślizgu jest zależne od własności anizotropowych ośrodka sprężystego. W pracy [6] pokazano na przykładzie ciał komórkowych o różnorodnej symetrii materiałowej problem projektowania struktury wewnętrznej materiału w celu uzyskania redukcji koncentracji naprężeń normalnych. Wnioski wyraźnie wskazują na materiały o ujemnym współczynniku Poissona, tzw. *auxetic materials* jako te, dla których przy kontakcie powstaje najkorzystniejszy rozkład naprężeń. Dla rozważanych materiałów komórkowych za efekt ujemnego współczynnika odpowiada budowa szkieletu materiału tworząca wielokąty wklęsłe. Taka struktura wewnętrzna daje ponadto tzw. materiał dylatacyjny podatny na odkształcenia objętościowe i stosunkowo sztywny na odkształcenia postaciowe. Sztywność tę mierzy się odpowiednio modułem ściśliwości objętościowej i modułem na ścinanie. Wpływa to istotnie na postać deformacji ciała anizotropowego dla zadania z kontaktem oraz na zachowanie w strefie kontaktu. Jednak należy podkreślić, że współczynnik Poissona, jak i inne moduły sprężyste dla materiału anizotropowego są scharakteryzowane przez rozkłady kierunkowe. Ponadto własności materiału opisują wszystkie niezależne stałe materiałowe, których ilość zależy od typu symetrii i składowych tensora sztywności. Stąd dla wskazanej grupy materiałów komórkowych można dobierać parametry struktury wewnętrznej, które określą materiał odpowiednio wytrzymały i najkorzystniej pracujący ze względu na zachowanie w strefie kontaktu, jak i redukcji naprężeń. Poszukiwaniom tych zależności jest poświęcony niniejszy artykuł.

2. Zagadnienie kontaktu

Rozważane jest zagadnienie płaskiego kontaktu statycznego anizotropowego liniowo sprężystego ośrodka ze sztywnym szorstkim podłożem. Sformułowanie problemu brzegowego w postaci układu równań jest następujące [1]:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad \sigma_{ij} = S_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{w obszarze } \Omega \quad (1)$$

z przemieszczeniowymi i statycznymi warunkami brzegowymi

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{na brzegu } \Gamma_D, \quad \sigma_{ij} \cdot n_j = t_i \quad \text{na brzegu } \Gamma_F \quad (2)$$

oraz warunkami w strefie kontaktu Γ_C

$$\sigma_n \cdot u_n = 0, \quad \sigma_n \leq 0 \quad (3)$$

i warunkami dla tarcia na powierzchni kontaktu Γ_C

$$|\sigma_T| < \mu |\sigma_n| \Rightarrow \Delta \mathbf{u}_T = 0, \quad |\sigma_T| = \mu |\sigma_n| \Rightarrow \exists \lambda > 0; \quad \Delta \mathbf{u}_T = -\lambda \sigma_T \quad (4)$$

gdzie:

σ_{ij}	– tensor naprężeń Cauchyego,
ε_{ij}	– tensor małych odkształceń,
S_{ijkl}	– tensor sztywności anizotropowego ciała sprężystego,
\hat{u}_i	– wektor przemieszczeń,
f_i	– wektor sił masowych,
\hat{u}_i	– zadane przemieszczenia na brzegu Γ_D ,
t_i	– wektor sił brzegowych na brzegu Γ_F ,
n_i	– wersor normalny,
$\Gamma_D \cup \Gamma_F \cup \Gamma_C$	– brzeg obszaru Ω ,
$\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$	– naprężenie normalne w strefie kontaktu,
$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$	– przemieszczenie normalne do brzegu,
$\sigma_{Ti} = \sigma_{ij} \cdot n_j - \sigma_n \cdot n_i$	– naprężenie styczne,
$\Delta \mathbf{u}_T = \Delta(\mathbf{u} - u_n \cdot \mathbf{n})$	– przyrost przemieszczenia stycznego.

Dla rozważanego przypadku zadania dwuwymiarowego rozwiązanie istnieje, gdy współczynnik tarcia μ i współczynnik Poissona ν sprężystego ośrodka spełniają pewien warunek. Dla ciała izotropowego w zadaniu dwuwymiarowym jest on następujący [6]:

$$\mu \leq \frac{\sqrt{3-4\nu}}{(2-2\nu)}.$$

Przedstawiony problem brzegowy nieliniowy ze względu na warunki (3) i (4) jest rozwiązywany za pomocą programu MES.

3. Materiały komórkowe o ujemnym współczynniku Poissona

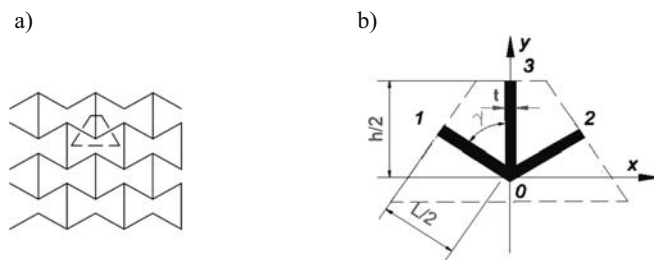
3.1. Anizotropowe własności efektywnego continuum

Jako ośrodek anizotropowy przyjęto materiał komórkowy o komórkach otwartych, którego szkielet jest modelowany przez płaską strukturę belkową połączoną w sztywne węzły [11]. Wyznaczenie wszystkich własności sprężystych materiału komórkowego jako efektywnego continuum oparte jest na modelowaniu dwuskalowym, które szczególnie opisano w pracach [11, 12]. Dla rozważanych struktur periodycznych na podstawie analizy reprezentatywnej komórki wyznaczane są: tensor sztywności oraz wielkości pomocnicze służące do sformułowania hipotezy wyężeniowej.

Typowy przykład struktury auksetycznej, tzn. tworzącej materiał o ujemnym współczynniku Poissona wraz z komórką reprezentatywną, jest pokazany na rys. 1.

Komórkę reprezentatywną opisują geometryczne parametry mikrostruktury: l_{0-i} – długości elementów belkowych dla $i = 1, 2, 3$, t – szerokość przekroju belek, γ – kąt (rys. 1b.); materiałowe parametry mikrostruktury: E_s – moduł Younga, ν_s – współczynnik Poissona, R_e – granica plastyczności dla materiału szkieletu. Modelem mechanicznym struktury szkieletu jest belka Timoshenki. Zastosowanie algorytmu opisanego w pracach [11, 12] prowadzi do numerycznego obliczania wyrazów macierzy sztywności \mathbf{S} ekwiwalentnego continuum zastępczego. Macierz sztywności (w notacji Kelvina) dla materiału o podanej strukturze i symetrii na następującą postać:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \quad (5)$$



Rys. 1a) Struktura materiału komórkowego o ujemnym współczynniku Poissona, b) komórka reprezentatywna

Fig. 1a) Reentrant cellular structure, b) representative unit cell

3.2. Hipoteza wyężeniowa oparta na kryterium energetycznym

Zastosowanie kryterium stanów granicznych w strukturze szkieletu wraz z podejściem dwuskalowym pozwala na wyznaczenie granicznych naprężeń w materiale [11, 12]. Wyznacza się je numerycznie dla stanów własnych tensora sztywności na podstawie analizy komórki reprezentatywnej wg algorytmu podanego w pracy [11].

Dla materiału komórkowego jako ciała anizotropowego przyjęto hipotezę wyężeniową jako energetyczne kryterium w postaci energii ważonych zgromadzonych w stanach własnych tensora sztywności [11, 12, 16]:

$$\sum_{\alpha=1}^{\text{III}} \frac{\alpha \Phi_E}{\alpha \Phi_E^{\text{gr}}} = 1 \quad (6)$$

Energie krytyczne $\alpha \Phi_E^{\text{gr}}$ zgromadzone w stanach własnych wyrażone są wzorami:

$$\alpha \Phi_E^{\text{gr}} = \frac{1}{2\lambda_\alpha} \left(\alpha \boldsymbol{\sigma}^{\text{gr}} \right) \cdot \left(\alpha \boldsymbol{\sigma}^{\text{gr}} \right) \quad (7)$$

gdzie:

$\sigma^{\alpha \text{ gr}}$ – graniczne stany własne naprężeń (załącznik),

λ_{α} – wartości własne tensora sztywności (załącznik).

W dowolnym stanie sprężystym można wprowadzić energetyczny współczynnik, który jest tu obroną miarą wyężenia materiału [8, 9]:

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^{\text{III}} \frac{\alpha \Phi_E}{\alpha \Phi_E^{\text{gr}}} \quad (8)$$

gdzie:

$\alpha \Phi_E$ – energie sprężyste zgromadzone w stanach własnych.

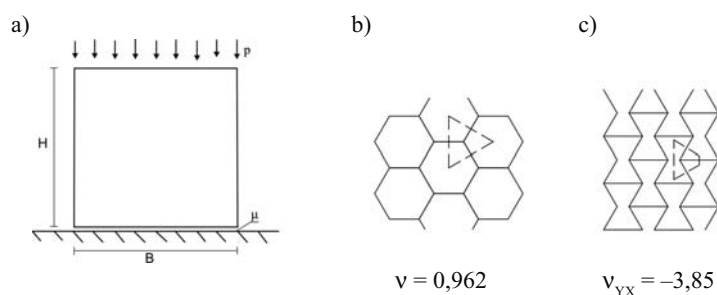
W stanie sprężystym spełniona jest nierówność: $\varphi \leq 1$. Współczynnik φ pozwala na wyznaczenie wartości maksymalnego obciążenia w zakresie sprężystym. Ponadto analiza mapy wyężenia materiału pozwala przewidzieć miejsca, w których spodziewane są pierwsze uplastycznienia materiału.

4. Przykłady

Obliczenia numeryczne dotyczące tensora sztywności i parametrów wyężenia materiałów komórkowych o różnych mikrostrukturach przeprowadzono według algorytmu podanego w pracy [8]. Przyjęto materiały szkieletu o następujących parametrach: $E_s = 10 \text{ GPa}$, $\nu_s = 0,3$, $R_e = 100 \text{ MPa}$.

4.1. Kwadratowy blok obciążony ciśnieniem

Przyjęto blok o wymiarach $B \cdot H = 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$ na sztywnym szorstkim podłożu o współczynniku tarcia $\mu = 0,3$ obciążony ciśnieniem $p = 0,025 \text{ MPa}$ przyłożonym do górnej krawędzi jak na rys. 2a. Przykład ten zacytowano z pracy [9].



Rys. 2a) Blok obciążony ciśnieniem, 2b) struktura materiału izotropowego o dodatnim współczynniku Poissona, 2c) struktura materiału komórkowego o ujemnym współczynniku Poissona

Fig. 2a) Square block under vertical pressure, 2b) *honeycomb* material structure, 2c) *inverted honeycomb* material structure

Inspiracją do dalszych obliczeń numerycznych był uzyskany rozkład naprężeń w materiale o strukturze plastra miodu (ang. *honeycomb*) rys. 2b, dającej materiał izotropowy oraz materiale o strukturze wielokątów wklęsłych ('inverted honeycomb') rys. 2c dającej materiał auksetyczny.

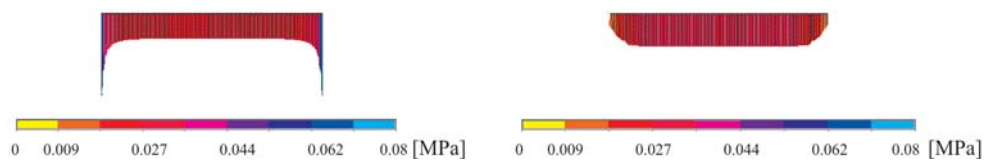
Przyjęto następujące dane geometryczne struktur materiałów:

honeycomb $l_{0-1} = 0,75$ mm, $l_{0-2} = 0,75$ mm, $l_{0-3} = 0,75$ mm, $t = 0,15$ mm,

inverted honeycomb $L = h = 1,575$ mm, $\gamma = 70^\circ$, $t = 0,15$ mm

ze względu na nośność przyjęto ustawienie pionowe struktury rys. 2c.

Rozwiązanie zadania wskazuje na jakościowo inny rozkład naprężeń w strefie kontaktu w materiale o ujemnym współczynniku Poissona, charakteryzujący się redukcją koncentracji naprężeń. Inne będą też przewidywane obszary powstania pierwszych uplastycznień.



Rys. 3. Rozkład naprężeń normalnych w strefie kontaktu: a) dla materiału o dodatnim współczynniku Poissona, b) dla materiału o ujemnym współczynniku Poissona

Fig. 3. Contact pressure distribution: a) for material with positive Poisson's ratio, b) for material with negative Poisson's ratio

4.2. Kwadratowy blok obciążony ciśnieniem – studium parametryczne

Rozważono materiały auksetyczne o różnych własnościach sprężystych otrzymanych przez dobór parametrów mikrostruktury. Dane geometryczne poszczególnych mikrostruktur podano w tabeli 1.

Tabela 1

Specyfikacja struktury materiału komórkowego

Struktura	L [mm]	h [mm]	γ	t [mm]
I	1,50	1,50	80°	0,15
II	1,50	2,00	60°	0,15
III	1,575	1,575	70°	0,15
IV	1,5	3,0	60°	0,15

Otrzymane numerycznie moduły sztywności efektywnego continuum zestawiono poniżej w tabeli 2 (wyniki dotyczą poziomej orientacji struktury względem układu współrzędnych XY jak na rys. 1). Macierze sztywności uzyskanych materiałów oraz wzory na moduły sztywności podano w załączniku.

Materiały o otrzymanych sztywnościach są użyte do obliczeń w zadaniach kontaktowych MES (program ANSYS). Do testów ustawiano materiały strukturą w poziomie jak

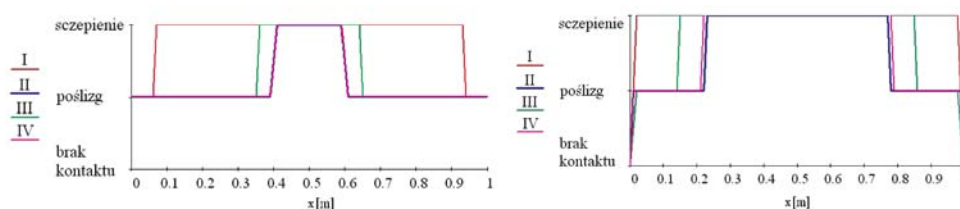
na rys. 1b lub pionowo jak w przykładzie 4.1, rys 2c. Orientacja pionowa jest zazwyczaj wybierana ze względu na większą nośność (dla zadania z ciśnieniem pionowym mierzona modułem Younga na kierunku pionowym). Obliczenia przeprowadzono dla zadania ze współczynnikiem tarcia $\mu = 0,1$ oraz $\mu = 0,2$.

Tabela 2

Moduły sztywności

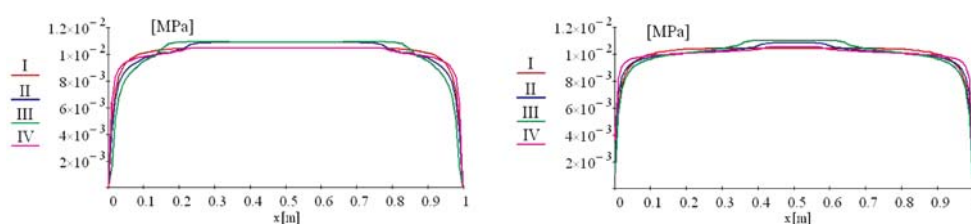
Struktura	E_x [kPa]	E_y [kPa]	ν_{xy}	ν_{yx}	max (G/K)
I	46,183	1,2970	-5,058	-0,142	5,52
II	6,270	1,9410	-1,718	-0,532	28,9
III	1,951	0,1311	-3,850	-0,261	2,23
IV	3,6713	3,4074	-0,982	-0,912	108,3

Wyniki wskazują, że zachowanie w strefie kontaktu zależne jest od wielkości współczynnika tarcia oraz jego relacji ze współczynnikiem Poissona (rys. 4). Analiza naprężeń normalnych wskazuje natomiast na brak zależności rozkładu od wartości współczynnika tarcia oraz współczynnika Poissona w zakresie jego ujemnych wartości (rys. 5).



Rys. 4. Rodzaj kontaktu dla rozważanych materiałów (pionowa orientacja struktur) dla współczynnika tarcia: a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$

Fig. 4. Contact status along contact line for considered types of materials (vertical orientation) for friction coefficient: a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$



Rys. 5. Rozkład naprężeń normalnych w strefie kontaktu: a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$

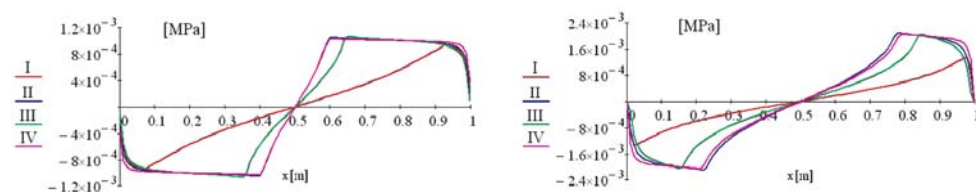
Fig. 5. Contact pressure distribution: a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$

Wartość maksymalnych naprężeń stycznych jest większa dla wyższych wartości współczynnika tarcia (rys. 6) a rozkład zależny od rodzaju kontaktu (wg rys. 3).

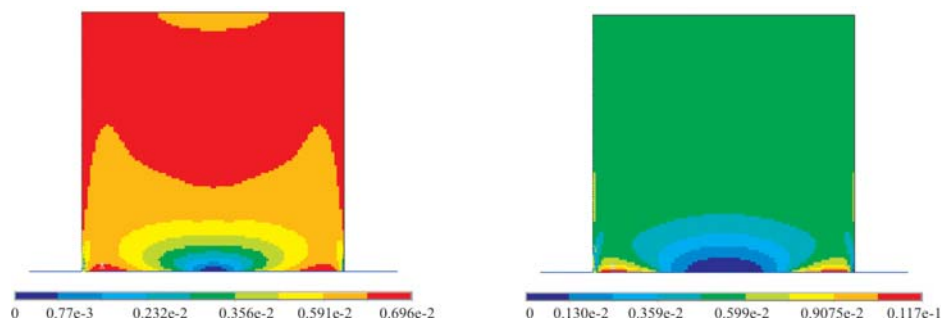
Analiza map wyężenia materiału wskazuje na koncentrację w strefie kontaktu (w strefach poślizgu) dla wyższych wartości współczynnika tarcia z równoczesnym odciążeniem

pozostałej części materiału. Dla niższych wartości współczynnika tarcia wyężenie jest bardziej rozłożone w całym materiale. Do celów porównawczych wybrano materiał o strukturze II pionowa orientacja dla współczynnika tarcia kolejno: $\mu = 0,1$, $\mu = 0,2$.

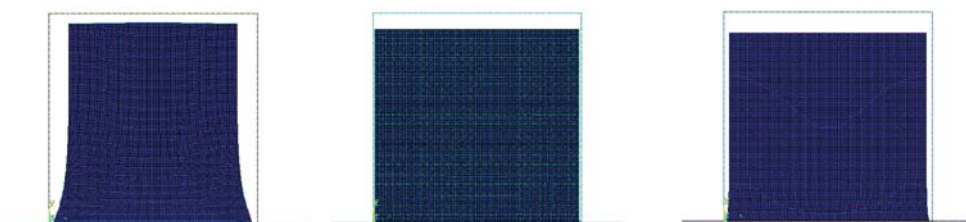
Deformacja bloku przy zadanym obciążeniu zależy od relacji współczynnika Poissona i współczynnika tarcia. Dla niższych wartości współczynnika Poissona deformacja ma kształt dzwonu (rys. 8a i 8c, dla większego współczynnika tarcia deformacja ta bardziej wyraźna rys. 8b i 8c).



Rys. 6. Rozkład naprężeń stycznych w strefie kontaktu: a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$
Fig. 6. Contact tangent stress distribution a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$



Rys. 7. Graficzny obraz wyężenia w materiale (rozkład współczynnika ϕ)
Fig. 7. Distribution of material effort coefficient



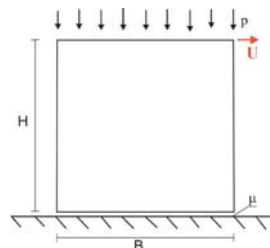
Rys. 8. Deformacja dla wybranych przykładów: a) materiał o strukturze III, $\mu = 0,2$, b) materiał o strukturze II, $\mu = 0,1$, c) materiał o strukturze II, $\mu = 0,2$
Fig. 8. Deformation type for choosen examples: a) material of structure III, $\mu = 0,2$, b) material of structure II, $\mu = 0,1$, c) material of structure II, $\mu = 0,2$

4.3. Złożony stan obciążeń z udziałem deformacji postaciowej – studium parametryczne

Blok z poprzedniego zadania jest dodatkowo obciążony przemieszczeniem geometrycznym prawego górnego naroża $u = 0,1$ m (rys. 9).

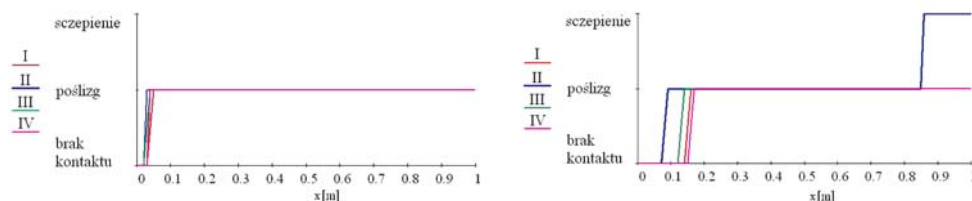
Rys. 9. Blok obciążony ciśnieniem pionowym oraz przemieszczeniem poziomym

Fig. 9. Square block under vertical pressure and horizontal displacement



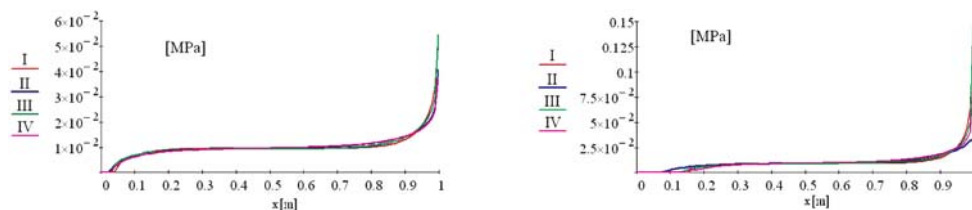
Ze względu na wymuszoną deformację postaciową oraz objętościową należy spodziewać się również wpływu sztywności postaciowej i objętościowej oraz ich wzajemnej relacji na rozwiązanie. Istotną rolę, tak jak w poprzednim zadaniu, odgrywa wielkość współczynnika Poissona i jego relacja ze współczynnikiem tarcia.

Przykładem jest tu materiał o strukturze II, dla którego w zadaniu ze współczynnikiem tarcia 0,2 następuje sczepienie przy równoczesnej znacznej deformacji postaciowej (rys. 10). Towarzyszy temu znaczny spadek naprężeń normalnych (rys. 11) oraz stycznych (rys. 12) w porównaniu z innymi materiałami, dla których dominuje poślizg.



Rys. 10. Rodzaj kontaktu dla rozważanych materiałów (pionowa orientacja struktur) dla współczynnika tarcia: a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$

Fig. 10. Contact status along contact line for considered types of materials (vertical orientation) for friction coefficient: a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$

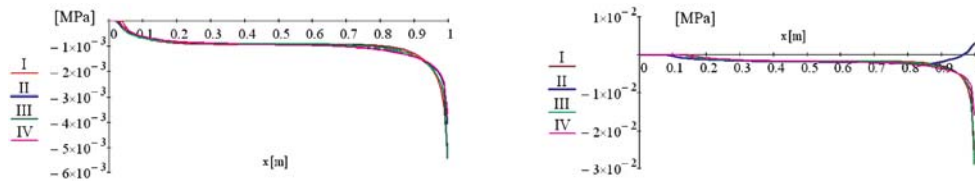


Rys. 11. Rozkład naprężeń normalnych w strefie kontaktu: a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$

Fig. 11. Contact pressure distribution: a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$

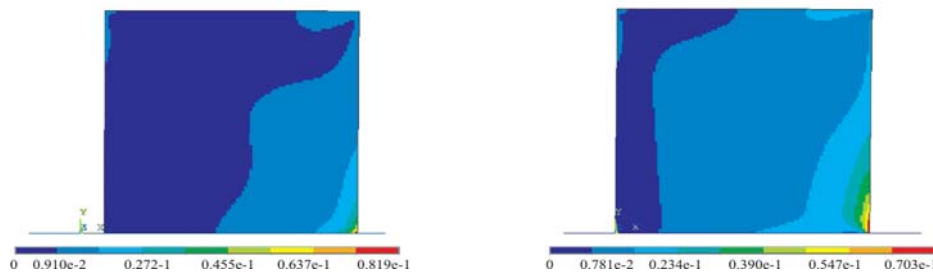
Obszary największego wyczerpania materiału koncentrują się w strefie sczepienia. Nie obserwuje się tu stref odciążenia jak w poprzednim zadaniu.

Mapy wyężenia przedstawiono na przykładzie materiału o strukturze II (orientacja pionowa) dla zadań ze współczynnikiem tarcia kolejno $\mu = 0,1$, $\mu = 0,2$ (rys. 13).



Rys. 12. Rozkład naprężeń stycznych w strefie kontaktu: a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$

Fig. 12. Contact tangent stress distribution: a) $\mu = 0,1$, b) $\mu = 0,2$



Rys. 13. Graficzny obraz wyężenia w materiale (rozkład współczynnika ϕ)

Fig. 13. Distribution of material effort coefficient



Rys. 14. Deformacja dla wybranych przykładów: a) materiał o strukturze II $\mu = 0,1$, b) materiał strukturze II $\mu = 0,2$, c) materiał o strukturze II $\mu = 0,2$ orientacja pozioma

Fig. 14. Deformation type for choosen examples: a) material of structure II $\mu = 0,1$, b) material of structure II $\mu = 0,2$, c) material of structure II $\mu = 0,2$ orientacja pozioma

Deformacja zależna jest od zachowania w strefie kontaktu. Szczepienie związane z większą wartością współczynnika tarcia powoduje znaczną deformację postaciową (możliwe dla małego G) rys. 14b, poślizg występuje dla mniejszych wartości współczynnika tarcia lub sztywniejszych materiałów na odkształcenie postaciowe (rys. 14a i 14c).

5. Wnioski

Zaprezentowane przykłady pokazują rodzaj zależności pomiędzy cechami anizotropowymi materiału komórkowego a własnościami wykazywanymi z zadaniach kontaktu

sprężystego. Stanowią one również wstęp do szerszej analizy parametrycznej, mającej na celu zaprojektowanie wewnętrznej struktury materiału do otrzymania pożądanych własności. Cel niniejszej analizy to wskazanie kierunku poszukiwań i modelowania.

Materiały o ujemnym współczynniku Poissona mają zastosowanie praktyczne. Stosuje się je np. przy projektowaniu materacy antyodleżynowych, charakteryzujących się redukcją naprężeń kontaktowych i odciążeniem materiału w strefie kontaktu (zadanie 4.1, 4.2). Wysoki w porównaniu z innymi materiałami współczynnik G/K decyduje o zachowaniu typu poślizgu (dla innych materiałów w tych samych warunkach obciążenia dominuje szepienie). Wnioski powyższe mające charakter ogólnych wytycznych mają zastosowanie również np. do projektowania podkładek przenoszących obciążenia.

Załącznik

1) Macierze sztywności materiałów o zadanych mikrostrukturach:

$$\mathbf{S}^I = \begin{bmatrix} 164,227 & -23,335 & 0 \\ -23,334 & 4,613 & 0 \\ 0 & 0 & 0,856 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}^{II} = \begin{bmatrix} 72,239 & -38,410 & 0 \\ -38,410 & 22,364 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4502 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^{III} = \begin{bmatrix} 73,122 & -18,489 & 0 \\ -18,489 & 4,8033 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0761 \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}^{IV} = \begin{bmatrix} 35,2704 & -32,162 & 0 \\ -32,1624 & 32,736 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2664 \end{bmatrix}$$

2) Definicje modułów sztywności [12]:

$E(\mathbf{n})$ moduł Younga:

$$\frac{1}{E(\mathbf{n})} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$$

$\nu(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ współczynnik Poissona:

$$\frac{-\nu(\mathbf{n}, \mathbf{m})}{E(\mathbf{n})} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})$$

$K(\mathbf{n})$ uogólniony moduł odkształcalności objętościowej (charakteryzujący własności dylatacyjne materiału):

$$\frac{1}{K(\mathbf{n})} = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$$

$G(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ moduł sztywności postaciowej (podający sztywność na ścinanie między dwoma prostymi kierunkami):

$$\frac{1}{G(\mathbf{n}, \mathbf{m})} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m})$$

gdzie:

- C** – macierz podatności $\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}$,
n – kierunek rozciągania,
m – kierunek prostopadły, na którym obserwowane jest odkształcenie liniowe.
 $(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}), (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m})$ – tensory diadyczne,
I – tensor jednostkowy.

3) Wartości własne tensora sztywności:

$$\lambda_I = \frac{1}{2} \left(S_{11} + S_{22} - \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2} \right),$$

$$\lambda_{II} = \frac{1}{2} \left(S_{11} + S_{22} + \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2} \right), \quad \lambda_{III} = S_{33}$$

naprężeniowe stany własne:

$$^I\sigma_x = 1.0, \quad ^I\sigma_y = \frac{S_{22} - S_{11} - \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2}}{S_{12}}, \quad ^I\sigma_{xy} = 0,$$

$$^{II}\sigma_x = 1.0, \quad ^{II}\sigma_y = \frac{S_{22} - S_{11} + \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}^2}}{S_{12}}, \quad ^{II}\sigma_{xy} = 0,$$

$$^{III}\sigma_x = 0, \quad ^{III}\sigma_y = 0, \quad ^{III}\sigma_{xy} = 1.0$$

Literatura

- [1] Kikuchi N., Oden J.T., *Contact Problems in Elasticity: A study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM Philadelphia, 1988.
- [2] Johnson K.L., *Contact mechanics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1985.
- [3] Hills D.A., Nowell D., Sackfield A., *Mechanics of elastic contact*, Oxford, Butterworth-Heinemann Ltd, 1993.
- [4] Gladwell G.M., *Contact problem in the classical theory of elasticity*, Maryland USA, Sijtoff and Nordhoff, 1980.
- [5] Khludnev A.M., Sokolowski J., *Modeling and control in solid mechanics*, Basel: Birkhauser Verlag, 1997.

- [6] Szefer G., Kędzior D., *Contact of elastic bodies with negative Poisson's ratio*, Springer V., 2002.
- [7] Wang Y., Lakes R., *Analytical parametric analysis of the contact problem of human buttocks and negative Poisson's ratio foam cushions*, Int. J. Sol .Struc. 39, 2002, 4825-38.
- [8] Jasińska D, Janus-Michalska M., *Material design of anisotropic elastic cellular bodies with respect to contact problem*, praca w druku w Engineering Transactions, 2008.
- [9] Jasińska D, Janus-Michalska M., *Contact problem for a class of anisotropic elastic cellular bodies with nonpositive Poisson's ratio*, materiały konferencyjne 22.06.2007, Łódź–Spała.
- [10] Nemat-Naser S., Hori M.: *Micromechanics*, 2nd edition Elsevier, 1999.
- [11] Janus-Michalska M., *Micromechanical Model of Auxetic Cellular Materials*, praca w recenzji w redakcji Archives of Metallurgy and Materials.
- [12] Janus-Michalska M., *Effective Models Describing Elastic Behaviour of Cellular Materials*, Archives of Metallurgy and Materials, Vol. 50, issue 3, 2005, 595-608.
- [13] Lakes R.S., *Design considerations for materials with negative Poisson's ratios*, Trans. ASME J. Mech. 115, 1993, 696-700.
- [14] Overaker D.W., Cuitino A.M., Langrana N.A., *Elastoplastic Micro-mechanical Modeling of Two- dimensional Irregular Convex and Nonconvex (Re-entrant) Hexagonal Foams*, Transactions of ASME, 65, 1998.
- [15] Lakes R.S., *Foam structures with a negative Poisson's ratio*, Science, 235, 1987, 1038-1040.
- [16] Ostrowska-Maciejewska J., Rychlewski J., *Generalized proper states for anisotropic elastic materials*, Arch. Mech. 53 (4–5), 2001, 501-518.