MECHANIKA
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
MECHANICS
WYDAWNICTWO
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
4-M/2010
ZESZYT 20
ROK 107
ISSUE 20
YEAR 107

ANTONI GAJEWSKI*

WPŁYW WSPÓŁCZYNNIKA ŚLEDZENIA NA DRGANIA I STATECZNOŚĆ ŚCISKANEGO PRĘTA W WARUNKACH NIELINIOWEGO PEŁZANIA

INFLUENCE OF THE TANGENCY COEFFICIENT ON VIBRATION AND STABILITY OF A COMPRESSED COLUMN IN NON-LINEAR CREEP CONDITIONS

Streszczenie

W niniejszym artykule: 1 przedstawiono prostą interpretację tzw. współczynnika śledzenia oraz podano możliwe zastosowania praktyczne siły nadśledzącej; 2. zbadano zależność krzywych charakterystycznych (tzn. zależności części rzeczywistej i części urojonej zespolonej częstości drgań od obciążenia) od współczynnika śledzenia dla pryzmatycznego pręta ściskanego siłą niekonserwatywną w warunkach nieliniowego pełzania; 3. wyznaczono zależności obciążenia krytycznego od współczynnika śledzenia dla różnych wartości parametrów prawa nieliniowego pełzania. Obciążenie krytyczne obliczano na podstawie kryterium Lapunowa.

Słowa kluczowe: kolumna pryzmatyczna, stabilność, wibracje, siła niekonserwatywna

Abstract

In this paper: 1. the simple interpretation of the so called „tangency coefficient" and its possible applications have been presented; 2. the dependence of the characteristic curves (i.e. real and imaginary parts of the complex frequency of vibration versus compressive force) on the tangency coefficient for prismatic column in non-linear creep conditions compressed by non-conservative load was considered; 3. the dependence of the critical loading on the tangency coefficient for various values of parameters describing non-linear creep law were shown. The critical loading has been determined on the basis of Lyapunov critetion.

Keywords: prismatic column, stability, vibration, nonconservative problem

* Prof. dr hab. inż. Antoni Gajewski, Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

1.1. Niekonserwatywne problemy stateczności ściskanych prętów sprężystych

Szybki rozwój problematyki niekonserwatywnych zagadnień stateczności ściskanych kolumn (prętów) nastąpił po roku 1952. W roku tym Beck [1] po raz pierwszy zastosował kinetyczne kryterium stateczności do pryzmatycznego pręta wspornikowego, ściskanego stałą siłą o kierunku stycznym do osi pręta na swobodnym końcu. Jest to tzw. **siła śledząca** (tangencjalna), której kierunek zależy od kąta ugięcia osi pręta na swobodnym końcu. Zagadnienie Becka ma istotne znaczenie z uwagi na zastosowania praktyczne, bowiem taki charakter ma stała siła ciągu rakiety lub stała siła reakcji strumienia płynu, wypływającego przez koniec przewodu rurowego. W tych przypadkach układy sprężyste mogą być niekonserwatywne, nie tylko z powodu dysypatywności układu lub zależności od czasu działających obciążeń.

Literatura poświęcona problemom stateczności i optymalizacji kształtu prętów ściskanych siłą śledzącą jest bardzo obszerna i jest szeroko omawiana np. w pracach: Bogacza i Janiszewskiego [3], Gajewskiego i Życzkowskiego [17], Przybylskiego [25], Elishakoffa [6] i innych.

W rozwoju tej problematyki znaczący udział mają prace M. Życzkowskiego i Jego współpracowników. W roku 1963 w opracowaniu Kordas i Życzkowskiego [19] wprowadzono po raz pierwszy uogólnienia dotyczące opisu kierunku ściskającej siły niekonserwatywnej, działającej na swobodny koniec pręta. Autorzy wprowadzili tzw. **współczynnik śledzenia** η, który został zdefiniowany jako stosunek kąta zawartego między kierunkiem siły i kierunkiem nieodkształconej osi pręta do kąta zawartego między styczną do osi pręta na jego swobodnym końcu i nieodkształconej osi pręta. Stosownie do przedziału, w którym leżą wartości współczynnika śledzenia, wprowadzono również odpowiednią terminologię dla działającej siły. Tak więc gdy $\eta < 0$ siłę nazwano **przeciwśledzącą**, gdy $\eta = 0$ jest to siła **eulerowska**, gdy $0 < \eta < 1$ siłę nazwano **podśledzącą**, gdy $\eta = 1$ siła jest **śledząca** (tangencjalna) oraz gdy $\eta > 1$ siłę nazwano **nadśledzącą**. Również, w zależności od wartości współczynnika śledzenia, mamy do czynienia z różnymi sposobami utraty stateczności pręta pryzmatycznego: dla $\eta \leq 0$ jest to wyboczenie (dywergencja), dla $0 < \eta < 1$ może to być wyboczenie lub flutter, dla $\eta \geq 1$ jest to zawsze flutter. Po raz pierwszy przedstawiono zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia dla pręta pryzmatycznego, ściskanego siłą nadśledzącą. Niestety, jak piszą Autorzy w roku 1963: „The physical interpretation of the <<supertangential>> loading has not so far been known, but the theoretical analysis of this range leads to interesting conclusions”.

W dalszym ciągu niniejszej pracy przedstawimy prostą interpretację fizyczną siły nadśledzącej.

1.2. Problemy optymalizacji ściskanych sprężystych prętów poddanych obciążeniom niekonserwatywnym

Zagadnienie optymalizacji sprężystego pręta ściskanego siłą niekonserwatywną badano po raz pierwszy w pracy Życzkowskiego i Gajewskiego [35]. Ograniczono się jednak do zakresu siły podśledzącej i przeciwśledzącej, dla których wystarczające jest stosowanie statycznego kryterium stateczności. Pierwszą próbę optymalnego kształtowania sprężystego pręta ściskanego siłą niekonserwatywną o dowolnej wartości współczynnika śledzenia, dla której konieczne jest stosowanie kinetycznego kryterium stateczności, podjęto w pracy Gajewskiego [7]. Rzeczywisty pręt o ciągłym rozkładzie masy zastąpiono jednak modelem o dwóch stopniach swobody (wahadłem podwójnym, modelem Zieglera). Optymalizacja pręta o ciągłym rozkładzie masy, ściskanego siłą śledzącą (tangencjalną) została przeprowadzona w pracy Claudona [4]. Rozwój pokrewnych zagadnień, badanych do roku 1986 omówiono w publikacjach Weisshaara i Plauta [31], Hanaoki i Washizu [18], Błachuta i Gajewskiego [2], Bogacza i Janiszewskiego [3] oraz Gajewskiego i Życzkowskiego [17]. Z nowszych badań należy wymienić wyniki zamieszczone w pracach: Ringertza [27], Langthjema i Sugiyamy [20, 21, 22] oraz Langthjema, Sugiyamy, Kobayashiego i Yutani [23].

1.3. Niekonserwatywne zagadnienia stateczności i optymalizacji elementów konstrukcyjnych w warunkach pełzania

W przypadku zagadnień niekonserwatywnych własności reologiczne materiału są związane z tłumieniem wewnętrznym drgań oraz z odkrytym przez Zoriya i Leonowa [33] interesującym efektem destabilizacji. O ile tłumienie zewnętrzne drgań podnosi wartość niekonserwatywnego obciążenia krytycznego (flutteru), to tłumienie wewnętrzne materiału (nawet nieskończenie małe) powoduje gwałtowny spadek tego obciążenia. Jak wykazano w opracowaniach Gajewskiego i Życzkowskiego [8, 16] wielkość efektu destabilizacji zależy jednak od stosunku parametrów charakteryzujących tłumienie zewnętrzne i wewnętrzne, gdy oba te parametry zmierzają do zera. Przeprowadzone badania eksperymentalne (cf. Yagn, Parshin [32], Sugiyama i in. [29, 30]) wykazują jednak, że wartości siły krytycznej dla układów z tłumieniem wewnętrznym są zbliżone do siły krytycznej obliczonej dla układów bez tłumienia. Stąd też pojawiły się pewne nowe kryteria kinetycznej utraty stateczności, związane z przyjęciem określonego wzrostu amplitudy drgań tłumionych (inkrementu amplitudy drgań). Jedno z takich kryteriów zaproponowano w pracy Sugiyamy i in. [28]. W wielu pracach badano również wpływ wewnętrznego tłumienia materiału na optymalne kształty ściskanych prętów, obciążonych siłami śledzącymi. Z reguły tłumienie wewnętrzne materiału było opisywane za pomocą liniowego modelu reologicznego Voigta – Kelvina. Przegląd tych prac zawiera monografia Przybylskiego [25].

Stateczność pryzmatycznych prętów ściskanych niekonserwatywną siłą śledzącą, wykonanych z materiału wykazującego nieliniowe własności reologiczne była badana po raz pierwszy przez Życzkowskiego i Kowalskiego [36]. Wpływ tych własności na tzw. **krzywe charakterystyczne** (zależność części rzeczywistej i części urojonej zespolonej częstości drgań od wielkości obciążenia ściskającego) w przypadku pryzmatycznego pręta ściskanego siłą śledzącą (tangencjalną) przedstawiono w pracy Gajewskiego [10]. Uwzględniono w niej wiele dodatkowych efektów, a mianowicie: ściśliwość osi pręta, tłumienie zewnętrzne oraz moment bezwładności obrotu elementów pręta w płaszczyźnie drgań.

Ogólne podstawy problematyki optymalnego kształtowania konstrukcji w warunkach nieliniowego pełzania zostały sformułowane przez Życzkowskiego [34]. Wpływ nieliniowych własności reologicznych materiału na krzywe charakterystyczne w przypadku niepryzmatycznego lub optymalnie ukształtowanego pręta ściskanego siłą śledzącą (tangencjalną) przedstawiono w publikacji Gajewskiego [9]. W dalszym ciągu badania te uogólniono do zagadnienia poszukiwania krzywych charakterystycznych dla pręta optymalnego w zależności od wartości współczynnika śledzenia (Gajewski [11]). Na tej podstawie otrzymano zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia dla wybranych wartości parametrów, charakteryzujących nieliniowe pełzanie materiału. Rozszerzenie omawianej problematyki na zagadnienia stateczności i optymalizacji płyt pierścieniowych zamieszczono w pracach Gajewskiego i Cupiała [15] oraz Gajewskiego [12, 13, 14].

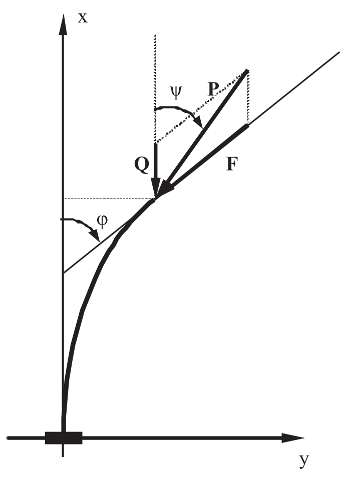
1.4. Cel i zakres pracy

Głównymi celami niniejszej pracy są: 1. przedstawienie prostej interpretacji fizycznej siły nadśledzącej, 2. zbadanie zależności krzywych charakterystycznych od współczynnika śledzenia dla pręta pryzmatycznego ściskanego siłą niekonserwatywną, w warunkach nieliniowego pełzania, 3.wyznaczenie zależności obciążenia krytycznego od współczynnika śledzenia. Realizacja tych celów będzie pewnym uzupełnieniem pracy autora [10], opublikowanej w zeszycie specjalnym *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, wydanym z okazji 70. rocznicy urodzin Prof. Michała Życzkowskiego. Wszystkie podstawowe równania przedstawione zostały w powyższej pracy. W niniejszej pracy zestawimy je w bardzo skróconej formie.

2. Interpretacja fizyczna współczynnika śledzenia

2.1. Siła podśledząca, śledząca i eulerowska: $0 \le \eta \le 1$

Na rysunku 1 przedstawiono pręt wspornikowy, obciążony na swobodnym końcu dwiema siłami: ściskającą siłą eulerowską $\boldsymbol{Q}$ (o stałym punkcie przyłożenia i kierunku działania) oraz ściskającą siłą śledzącą (tangencjalną) $\boldsymbol{F}$. Suma tych sił $\boldsymbol{P}$ jest nachylona pod kątem ψ do nieodształconej osi pręta (do osi x), natomiast styczna do ugiętej osi pręta jest nachylona pod kątem φ.



Rys. 1. Siła podśledząca

Fig. 1. Subtangential load

Spełnione są tu następujące równania wektorowe

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{F}\,,\;\; \boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}\times(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{F})=(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q})+(\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{F})=\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{F}\,,\;\; \left|\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{P}\right|=\left|\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{F}\right|, \tag{1}$$

z których wynikają związki skalarne

$$P=Q\cos\psi+F\cos(\varphi-\psi)\,, \qquad P\sin\psi=F\sin\varphi\,. \tag{2}$$

Ponieważ ograniczamy się tu do badania małych drgań poprzecznych pręta, kąty φ i ψ są dowolnie małe. Wobec tego z równań (2) otrzymujemy

$$P=Q+F\,, \qquad P\psi=F\varphi\,, \tag{3}$$

skąd wynika

$$\psi=\frac{F}{P}\varphi=\frac{F}{Q+F}\varphi=\eta\varphi\,, \tag{4}$$

gdzie

$$\eta=\frac{F}{P}=\frac{F}{Q+F}=\frac{1}{1+\dfrac{Q}{F}}=\frac{\dfrac{F}{Q}}{1+\dfrac{F}{Q}}\,. \tag{5}$$

Wprowadzono tu współczynnik śledzenia η, który zależy tylko od stosunku sił (Q/F) lub od jego odwrotności (F/Q). Z uwagi na dodatnie wartości długości sił Q i F współczynnik śledzenia zawarty jest w przedziale [0, 1]. Gdy $F=0$ (siła śledząca jest równa zeru) wartość $\eta=0$, gdy natomiast $Q=0$ wartość $\eta=1$. Na przykład dla $Q=F$ mamy $\eta=0.5$.

Równocześnie możemy zapisać odpowiedni warunek brzegowy, określający siłę poprzeczną na końcu pręta w postaci

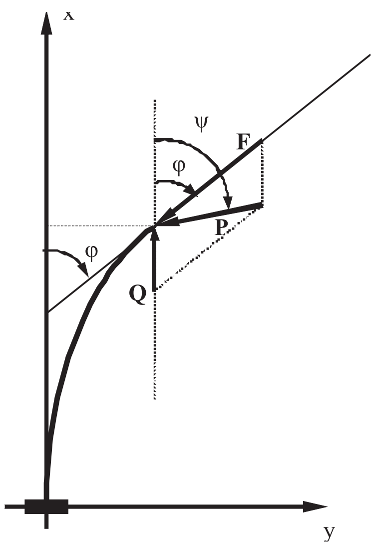
$$Q_{\perp}=-Q\varphi=-(P-F)\varphi=-(\mathrm{P}-\eta P)\varphi=-P(1-\eta)\varphi \tag{6}$$

Dla wszystkich wartości współczynnika śledzenia różnych od zera zagadnienie drgań poprzecznych ściskanego pręta sprężystego (odpowiednie równanie różniczkowe z warunkami brzegowymi) jest zagadnieniem niesamosprzężonym. Powoduje to istotne komplikacje w problemach optymalnego kształtowania prętów drgających i narażonych na utratę stateczności.

Nie trudno wyobrazić sobie zastosowanie praktyczne powyżej opisanego obciążenia. Może to być obciążenie końca pręta wspornikowego, umieszczonego w polu grawitacyjnym Ziemi, z uruchomionym silnikiem rakietowym, lub siła działająca na masywną tarczę umieszczoną poprzecznie do końca pręta opływaną strumieniem płynu.

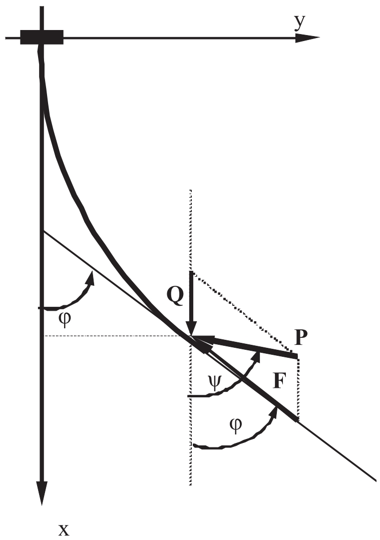
2.2. Siła nadśledząca i śledząca: $\eta\geq 1$

Na rysunku 2a przedstawiono pręt wspornikowy, obciążony na swobodnym końcu dwiema siłami: rozciągająca siłą eulerowską $\boldsymbol{Q}$ (o stałym punkcie przyłożenia i kierunku działania) oraz ściskającą siłą śledzącą (tangencjalną) $\boldsymbol{F}$. Wektorowa suma tych sił $\boldsymbol{P}$ jest nachylona pod kątem ψ do nieodształconej osi pręta (do osi *x*).



Rys. 2a. Siła nadśledząca

Fig. 2a. Super-tangential load



Rys. 2b. Siła nadśledząca – zastosowanie

Fig. 2b. Super-tangential load – an application

Spełnione są tu równania wektorowe (1), z których wynikają związki skalarne

$$p = F\cos(\alpha - \psi) - Q\cos\psi, \qquad P\sin\psi = F\sin\varphi\,. \tag{7}$$

Wobec tego z równań (7) otrzymujemy

$$P = F - Q\,, \qquad P\psi = F\varphi\,, \tag{8}$$

skąd wynika

$$\psi = \frac{F}{P}\varphi = \frac{F}{F-Q}\varphi = \eta\varphi\,, \tag{9}$$

gdzie

$$\eta = \frac{F}{P} = \frac{F}{F-Q} = \frac{1}{1-\frac{Q}{F}} = \frac{\frac{F}{Q}}{\frac{F}{Q}-1}\,. \tag{10}$$

Podobnie jak poprzednio, wprowadzono tu współczynnik śledzenia η, który zależy tylko od stosunku sił (Q/F) lub od jego odwrotności (F/Q). Z uwagi na dodatnie wartości długości sił Q i F oraz warunek $Q < F$ (nie dopuszczamy tu utraty stateczności przy rozciąganiu pręta) współczynnik śledzenia zawarty jest w przedziale $[1,\infty)$. Gdy $Q = 0$ wartość $\eta = 1$. Dla wszystkich $Q > 0$ i $Q < F$ $\eta > 1$. Na przykład dla $Q = F/2$ mamy $\eta = 2$.

Równocześnie możemy zapisać odpowiedni warunek brzegowy, określający siłę poprzeczną na końcu pręta w postaci identycznej jak we wzorze (6)

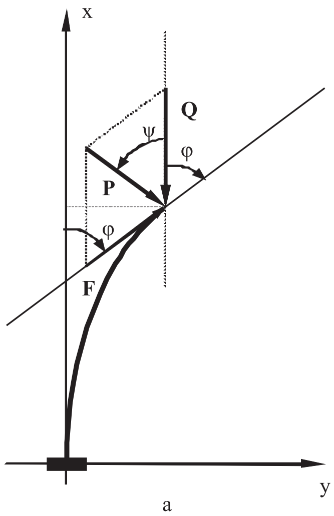
$$Q_{\perp} = Q\varphi = (F - P)\varphi = (\eta P - P)\varphi = -P(1-\eta)\varphi \,. \tag{11}$$

Również tu można wyobrazić sobie zastosowanie praktyczne powyżej opisanego obciążenia. Może to być np. obciążenie końca pręta wspornikowego, zamocowanego na górnym końcu, umieszczonego w polu grawitacyjnym Ziemi, z uruchomionym silnikiem rakietowym, jak to pokazano na rysunku 2b. Wybiegając nieco w przyszłość, można również wyobrazić sobie wspornikowy pręt z uruchomionym silnikiem rakietowym, zamocowany prostopadle do brzegu stacji kosmicznej o kształcie tarczy kołowej, wykonującej jednostajny ruch obrotowy w celu wytworzenia sztucznej grawitacji dla kosmonautów.

2.3. Siła przeciwśledząca i eulerowska: $\eta \le 0$

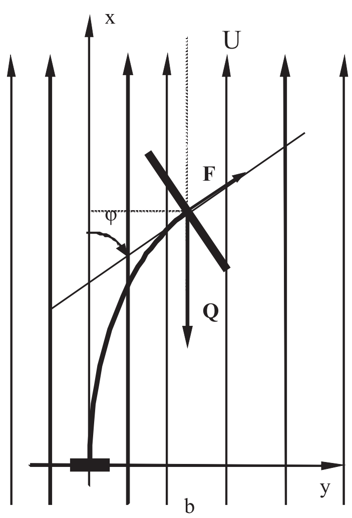
Na rysunku 3a przedstawiono pręt wspornikowy, obciążony na swobodnym końcu dwiema siłami: ściskającą siłą eulerowską $\boldsymbol{Q}$ oraz rozciągającą siłą śledzącą (tangencjalną) $\boldsymbol{F}$. Wektorowa suma tych sił $\boldsymbol{P}$ jest nachylona pod kątem ψ do nieodształconej osi pręta (do osi x). Spełnione są tu równania wektorowe (1), z których wynikają związki skalarne

$$P = Q\cos\psi - F\cos(\varphi+\psi) \;, \qquad P\sin(-\psi) = F\sin\varphi \,. \tag{12}$$



Rys. 3a. Siła przeciwśledząca

Fig. 3a. Anti-tangential force



Rys. 3b. Siła przeciwśledząca – zastosowanie

Fig. 3b. Anti-tangential force – an application

W drugim równaniu (12) musimy uwzględnić to, iż kąt ψ jest odmierzany w przeciwnym kierunku do kąta φ. Wobec tego z równań (12) otrzymujemy

$$P = Q - F \,, \qquad -P\psi = F\varphi \,, \tag{13}$$

skąd wynika

$$\psi = -\frac{F}{P}\varphi = -\frac{F}{Q-F}\varphi = \eta\varphi\,, \tag{14}$$

gdzie

$$\eta = -\frac{F}{P} = -\frac{F}{Q-F} = \frac{1}{1-\frac{Q}{F}} = \frac{\frac{F}{Q}}{\frac{F}{Q}-1}\,. \tag{15}$$

Podobnie jak poprzednio, wprowadzono tu współczynnik śledzenia η, który zależy tylko od stosunku sił (Q/F) lub od jego odwrotności (F/Q). Z uwagi na dodatnie wartości długości sił Q i F oraz warunek $Q > F$ (nie dopuszczamy tu utraty stateczności przy rozciąganiu pręta) współczynnik śledzenia zawarty jest w przedziale (∞, 0]. Gdy $F = 0$ wartość $\eta = 0$. Dla wszystkich $Q > F$, $\eta < 0$. Na przykład dla $Q = 2F$ mamy $\eta = -1$.

Warunek brzegowy, określający siłę poprzeczną na końcu pręta jest identyczny jak we wzorze (6). Możliwe zastosowanie praktyczne powyżej opisanego obciążenia przedstawiono na rysunku 3b. Pręt znajduje się w naddźwiękowym strumieniu płynu, poruszającego się z prędkością *U*.

3. Nieliniowe prawo pełzania

W dalszym ciągu przyjmiemy, że pręt pryzmatyczny, wykonany z materiału o nieliniowych własnościach reologicznych, poddany jest ściskaniu niekonserwatywną siłą. Kierunek działania siły podczas drgań (lub utraty stateczności) określa współczynnik śledzenia η. Zbadanie zależności krzywych charakterystycznych oraz sił krytycznych od współczynnika śledzenia jest, w świetle wyżej przytoczonych rozważań, nie tylko zagadnieniem czysto teoretycznym. Wyznaczenie krzywych charakterystycznych wymaga rozwiązania zagadnienia brzegowego, w którym występują parametry charakteryzujące własności reologiczne materiału, zespolona częstość drgań pręta, siła ściskająca oraz współczynnik śledzenia. Sposób postępowania i przyjęte prawo fizyczne (Davenport [5], Rabotnow, Shestierikov [26])

$$\Phi = \dot{p} - \Gamma\frac{\overline{\sigma}^n}{p^\mu} = \dot{p} - \Gamma\overline{\sigma}^n p^{-\mu}\,, \qquad p = \varepsilon - \frac{\overline{\sigma}}{\overline{E}}\,, \tag{16}$$

gdzie μ, *n*, Γ oznaczają stałe materiałowe, zostały omówione w pracy autora [10]. Jak się okazuje istotne znaczenie odgrywają tu dwa moduły (zapisane w postaci bezwymiarowej dla pręta pryzmatycznego):

1) moduł „sieczny”

$$E_{sc} = \frac{\overline{E}_{sc}}{\overline{E}_0} = \frac{1}{1+TP^{\frac{n-1-\mu}{1+\mu}}}\,, \tag{17}$$

który decyduje o opisie stanu przedkrytycznego oraz

2) moduł „styczny”

$$E_{tc}=\frac{\overline{E}_{tc}}{\overline{E}_0}=\frac{1+\dfrac{1+\mu}{\mu}\dfrac{\tau}{t_0}\Omega}{\left\{1+\dfrac{1+\mu}{\mu}\dfrac{\tau}{t_0}\Omega+\dfrac{n}{\mu}TP^{\frac{n-1-\mu}{1+\mu}}\right\}}, \tag{18}$$

który jest funkcją tzw. czasu krytycznego τ oraz zespolonej częstości drgań $\Omega=\delta+i\omega$. $\overline{E}_0$ jest pewną stałą o wymiarze naprężenia. Wprowadzono tu również wielkość zależną od własności reologicznych materiału i parametru $\alpha=I/Al^2$, charakteryzującego smukłość pręta

$$T=T_{00}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\frac{1}{1+\mu}}\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{\frac{n-1-\mu}{1+\mu}}, \tag{19}$$

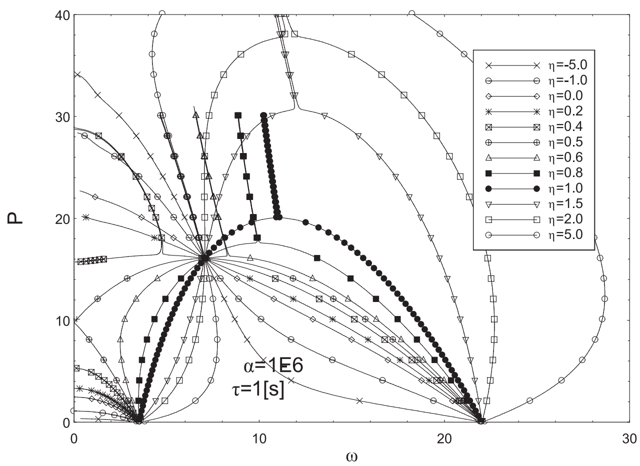
gdzie: T_{00} = 0,781408, $\alpha_0=10^{-4}$, $\tau_0=3600$ s .

4. Zagadnienie brzegowe

Analiza drgań i stateczności wymaga w naszym przypadku: 1. wyznaczenia przemieszczeń pręta w stanie jednoosiowego ściskania (stan przedkrytyczny) i 2. zastosowania kinetycznego kryterium stateczności do małych drgań, nałożonych na stan przedkrytyczny. Ogólne równania uwzględniające efekt ściśliwości osi pręta, odkształceń stycznych, bezwładności obrotów przekrojów, nieliniowych własności materiału oraz ogólnych warunków brzegowych przedstawiono w monografii Gajewskiego i Życzkowskiego [17]. Dla pręta pryzmatycznego równania drgań mogą być sprowadzone do jednego równania różniczkowego czwartego rzędu o stałych współczynnikach i odpowiednich warunków brzegowych. W efekcie otrzymujemy dwa rzeczywiste równania algebraiczne, które pozwalają wyznaczyć rzeczywistą – δ i urojoną – ω część zespolonej częstości drgań Ω w zależności od siły ściskającej i pozostałych parametrów zagadnienia. Więcej informacji zamieszczono w opracowaniu [10], w którym przeprowadzono obliczenia numeryczne tylko dla siły śledzącej (tangencjalnej), tzn. dla $\eta=1$.

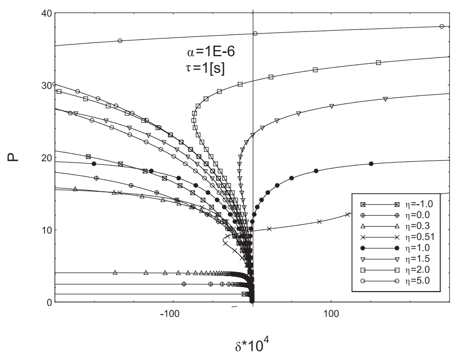
5. Obliczenia numeryczne i analiza wyników

Obliczenia wykonano dla dwóch wartości parametru smukłości: $\alpha=10^{-6}$ – dla pręta bardziej smukłego i $\alpha=10^{-5}$ – dla pręta mniej smukłego. W celu pokazania wpływu nieliniowych własności reologicznego prawa fizycznego, dla pręta o mniejszej smukłości uwzględniono w obliczeniach dwie różne wartości czasu krytycznego, mianowicie: $\tau=1\,[\mathrm{s}]$ i $\tau=0.1\,[\mathrm{s}]$. W pierwszym przypadku, tzn. dla dużej smukłości pręta $\alpha=10^{-6}$ i $\tau=1\,[\mathrm{s}]$, wykresy zależności krzywych charakterystycznych oraz siły krytycznej od współczynnika śledzenia, przedstawione na rysunkach 4, 5 i 6, wykazują duże podobieństwo do otrzymanych dla pręta sprężystego. W szczególności wykres pokazany na rysunku 3 jest niemal identyczny z przedstawionym w pracy Kordas i Życzkowskiego [19].



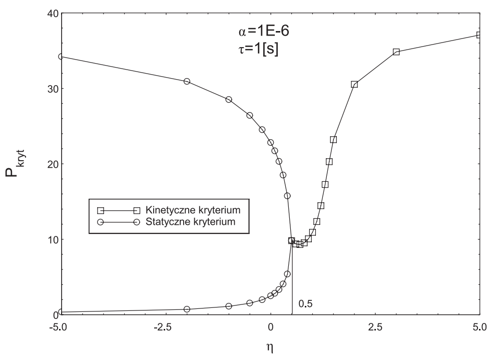
Rys. 4. Zależność urojonej części zespolonej częstości drgań od współczynnika śledzenia

Fig. 4. Dependence of the imaginary part of complex frequency of vibration on tangency coefficient



Rys. 5. Zależność rzeczywistej części zespolonej częstości drgań od współczynnika śledzenia

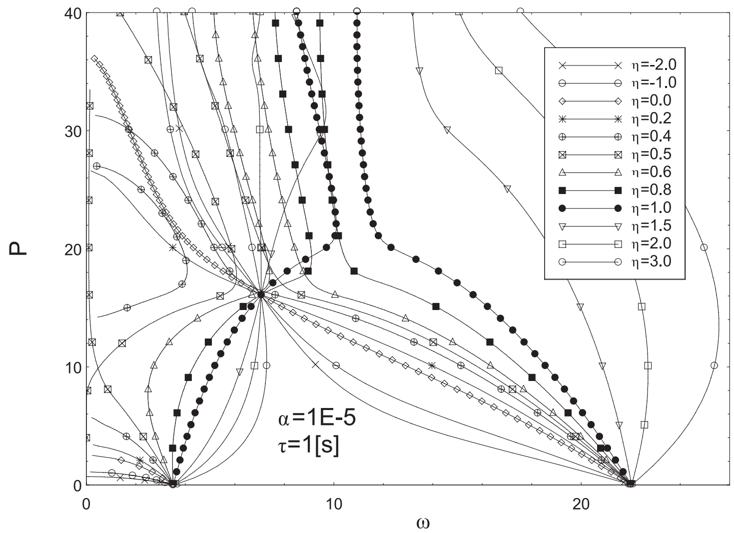
Fig. 5. Dependence of the real part of complex frequency of vibration on tangency coefficient



Rys. 6. Zależność siły krytycznej odwspółczynnika śledzenia

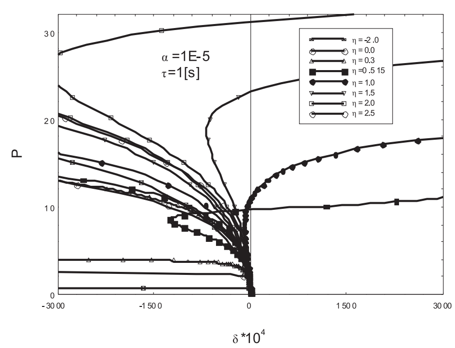
Fig. 6. Dependence of the critical force on tangency coefficient

Zmniejszenie smukłości pręta przy tym samym czasie krytycznym wpływa w sposób istotny na kształty krzywych charakterystycznych oraz na zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia, chociaż zakres stosowalności kryterium statycznego nie uległ zmianie ($\eta = 0.5$). Odpowiednie wykresy przedstawiono na rysunkach 7, 8 i 9.



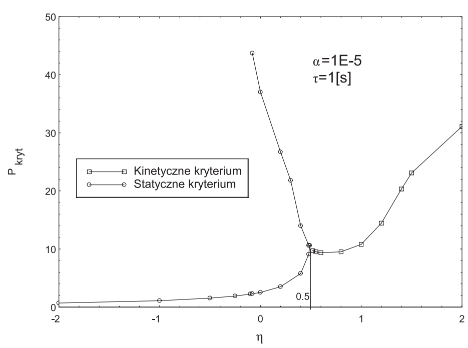
Rys. 7. Zależność urojonej części zespolonej częstości drgań od współczynnika śledzenia

Fig. 7. Dependence of the imaginary part of complex frequency of vibration on tangency coefficient



Rys. 8. Zależność rzeczywistej części zespolonej częstości drgań od współczynnika śledzenia

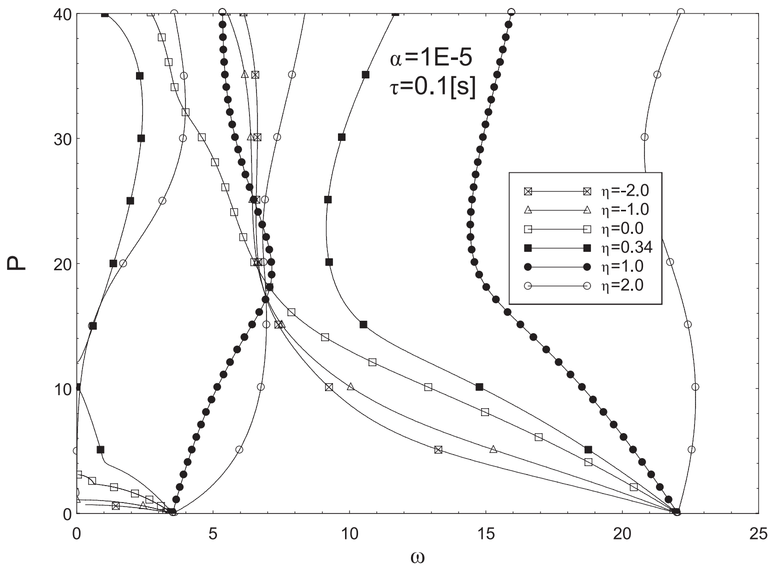
Fig. 8. Dependence of the real part of complex frequency of vibration on tangency coefficient



Rys. 9. Zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia

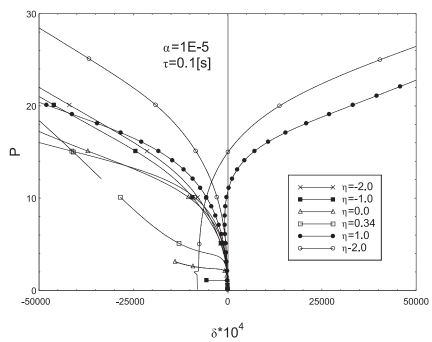
Fig. 9. Dependence of the critical force on tangency coefficient

Zmiana czasu krytycznego przy tym samym parametrze smukłości powoduje dalsze zmiany w charakterze krzywych charakterystycznych. Po pierwsze, krzywe zależności części urojonej częstości drgań ulegają znacznemu rozsunięciu dla tych samych wartości współczynnika śledzenia. Odpowiednie wykresy przedstawiono na rysunku 10. Po drugie, zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia, przedstawiona na rysunku 12. wykazuje szereg nieciągłości. Po trzecie, granica stosowalności statycznego kryterium stateczności uległa przesunięciu do wartości: $\eta = 0.34$. Po czwarte, wartości sił krytycznych w zakresie sił nadśledzących, dla $\eta > 1$, są znacznie niższe od przedstawionych na rysunkach 6 i 9.



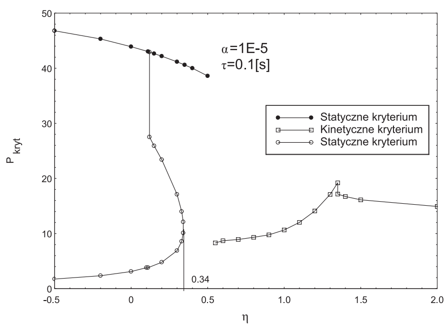
Rys. 10. Zależność urojonej części zespolonej częstości drgań od współczynnika śledzenia

Fig. 10. Dependence of the imaginary part of complex frequency of vibration on tangency coefficient



Rys. 11. Zależność rzeczywistej części zespolonej częstości drgań od współczynnika śledzenia

Fig. 11. Dependence of the real part of complex frequency of vibration on tangency coefficient



Rys. 12. Zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia

Fig. 12. Dependence of the critical force on tangency coefficient

6. Wnioski

Przedstawione w niniejszej pracy wartości sił krytycznych, otrzymane na podstawie kinetycznego kryterium stateczności, zostały obliczone z uwzględnieniem efektu destabilizacji, tzn. są to wartości wynikające z warunku $\delta = 0, \quad \omega \neq 0$. Oczywiście, zastosowanie innego kryterium, związanego z ustalonym inkrementem amplitudy drgań, spowoduje zbliżenie wykresów z rysunków 9 i 12 do wykresów zamieszczonych w publikacji Kordas i Życzkowskiego [19], otrzymanych dla pręta pryzmatycznego.

Chociaż stosowane w niniejszej pracy, nieliniowe prawo pełzania różni się w sposób zasadniczy od liniowych modeli reologicznych, to przedstawione tu wyniki obliczeń nie odbiegają zasadniczo od wyników otrzymywanych dla tych modeli. Podstawowe efekty reologiczne są podobne. W szczególności efekt destabilizacji powoduje zmniejszenie siły krytycznej do wartości bliskiej tej, którą otrzymuje się w przypadku przyjęcia prawa liniowego Voigta-Kelvina.

Literatura

[1] Beck M., *Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes*, ZAMM **3**, 1952, 225-228.

[2] Błachut J., Gajewski A., *A unified approach to optimal design of columns*, Solid Mechanics Archives, 5(4), 1980, 363-413.

[3] Bogacz R., Janiszewski R., *Analysis and synthesis of column under follower forces from the point of view of stability*, Adv. In Mechanics (Uspekhi mekhaniki), 8(3), 1987, 3-52, (in Russian).

[4] Claudon J.L., *Characteristic curves and optimum design of two structures subjected to circulatory loads*, Journal de Mecanique 14(3), 1975, 531-543.

[5] Davenport C.C., *Correlation of creep and relaxation properties of copper*, J. Appl. Mech., 5(2), 1938, A56.

[6] Elishakoff I., *Controversy Associated With the So-Called "Follower Forces": Critical Overview*, Applied Mechanics Reviews, 58, 2005, 117-142.

[7] Gajewski A., *Pewne problemy optymalizacji kształtu prętów przy niekonserwatywnych zagadnieniach stateczności*, Mechanika, Prace Komisji Mechaniki Stosowanej Oddz. Krakowskiego PAN, 4, 1970, 3-27.

[8] Gajewski A., *On the destabilizing effect in a non-conservative system with slight internal and external damping*, Proceedings of Vibration Problems 13(2), 1972, 187-198.

[9] Gajewski A., *Optimization of a column compressed by non-conservative force in non-linear creep conditions,* Proc. Second World Congress of "Structural and Multidisciplinary Optimization", (Eds. W.Gutkowski and Z.Mróz), May 26-30, 1997, 737-742, Zakopane.

[10] Gajewski A., *Vibrations and stability of a non-conservatively compressed prismatic column under nonlinear creep conditions*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics 38(2), 2000, 259-270.

[11] Gajewski A., *Vibration and stability of a non-prismatic column compressed by non-conservative forces in non-linear creep conditions*, Journal of Sound and Vibration, 248(2), 2001, 315-327.

[12] G a j e w s k i A., *Vibration and stability of annular plates in non-linear creep conditions,* Journal of Sound and Vibration, 249(3), 2002, 447-463.

[13] G a j e w s k i A., *Certain stability problems of annular plates compressed by non-conservative forces,* The Fifth EUROMECH Solid Mechanics Conference, ESMC-5, Book of Abstracts, 160-161, (Chairmen: E.C.Aifantis), Aristotle University of Thessaloniki, August 17-22, 2003, Thessaloniki, Greece.

[14] G a j e w s k i A., *Niekonserwatywne problemy stateczności płyt pierścieniowych,* Czasopismo Techniczne 105, 4-M/2008, 43-59.

[15] G a j e w s k i A., C u p i a ł P., *Optimal structural design of an annular plate compressed by non-conservative forces,* Int. J. Solids Structures 29(10), 1992, 1283-1292.

[16] G a j e w s k i A., Ż y c z k o w s k i M., *Wpływ jednoczesnego niejednorodnego tarcia wewnętrznego i zewnętrznego na stateczność układów niekonserwatywnych*, Mech. Teor. i Stos., 10(1), 1972, 121-136.

[17] G a j e w s k i A., Ż y c z k o w s k i M., *Optimal structural design under stability constraints*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1988.

[18] H a n a o k a M., W a s h i z u K., *Optimum design of Beck's column*, Computers and Structures, 11(6), 1980, 473-480.

[19] K o r d a s Z., Ż y c z k o w s k i M., *On the loss of stability of a rod under a super-tangential force*, Arch. Mech. Stos. 15(1), 1963, 7-31.

[20] L a n g t h j e m M.A., S u g i y a m a Y., *Optimum shape design against flutter of a cantilevered column with an end-mass of finite size subjected to a non-conservative load,* Journal of Sound and Vibration, 226 (1), 1999, 1-23.

[21] L a n g t h j e m M.A., S u g i y a m a Y., *Optimum design of cantilevered columns under the combined action of conservative and nonconservative loads. Part I: The undamped case.* Computers &Structures, 74, 2000, 385-398.

[22] L a n g t h j e m M.A., S u g i y a m a Y., *Optimum design of cantilevered columns under the combined action of conservative and nonconservative loads. Part II: The damped case,* Computers &Structures, 74, 2000, 399-408.

[23] L a n g t h j e m M.A., S u g i y a m a Y., K o b a y a s h i M., Y u t a n i H., *Experimental Verification of Optimization of Cantilevered Columns Subjected to a Rocket Thrust,* 4th EUROMECH Solid Mechanics Conference, June 26-30, 2000, Metz, France. Book of abstracts II, 662.

[24] N i k o l a i E.L., *On the stability of equilibrium of a compressed and twisted column (in Russian)*, Trudy Leningr. Politekhn. Inst., 31, 1928, 201; również w: *Trudy po mekhanike* (Prace zebrane), Moskwa 1955, 357-387.

[25] P r z y b y l s k i J., *Drgania i stateczność dwuczłonowych układów prętowych wstępnie sprężonych przy obciążeniach niezachowawczych*, Monografia Nr 92, Politechnika Częstochowska, 2002.

[26] R a b o t n o v Yu.N., S h e s t e r i k o v S.A., *Creep stability of columns and plates,* Prikl. Mat. Mekch., 21(3), 1957, 406-412 (Russian version), J.Mech.Phys.Solids, 6, 1957, 27-34 (English version).

[27] R i n g e r t z U.T., *On the design of Beck's column,* Structural Optimization, 8, 1994, 120-124.

[28] S u g i y a m a Y, K a t a y a m a K., K i n o i S., *Flutter of cantilevered column under rocket thrust,* Journal of Aerospace Engineering, ASCE 8, 1995, 9-15.

[29] S u g i y a m a Y., K a t a y a m a K., K i r i y a m a K., R y u B.-J., *Experimental verification of dynamic stability of vertical cantilevered columns subjected to a sub-tangential force*, Journal of Sound and Vibration 236(2), 2000, 193-207.

[30] S u g i y a m a Y., L a n g t h j e m M.A., R y u B.-J., *Realistic follower forces. Letters to the Editor,* Journal of Sound and Vibration 225(4), 1999, 779-782.

[31] W e i s s h a a r T.A., P l a u t R.H., *Structural optimization under nonconservative loading,* Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Optimization of Distributed Parameter Structural Systems. The University of Iowa, May 20-June 4, 1980.

[32] Y a g n Yu.I., P a r s h i n L.K., *Experimental verification of stability of a column compressed by a follower force,* Dokłady AN SSSR, 167(1),1966, 49-50, (In Russian).

[33] Z o r i y L.M., L e o n o v Yu.Ya., *Influence of damping on the stability of non- conservative system,* Problems of Design and Strength in Machine Building, 7(7), 1961, 127-136 (in Russian).

[34] Ż y c z k o w s k i M., *Optimal structural design under creep conditions,* Appl. Mech. Rev., 49(9), 1996, 433-446.

[35] Ż y c z k o w s k i M., G a j e w s k i A., *Optimal structural design in creep conditions*, IUTAM Symposium on "Instability of Continuous Systems", (Ed. H.H.E.Leipholz), Herrenalb 1969, Springer 1971, 295-301.

[36] Ż y c z k o w s k i M., K o w a l s k i A., *Nonconservative stability problems for columns subject to nonlinear creep*, Proc. EUROMECH Colloquium 190: "Dynamical Stability of Inelastic Structures", Technische Universität Hamburg-Harburg, Oct.1-4, 1984, 109-111.