

Jan Marczak, Antoni Sarzyński

Kopuła Kaplicy Zygmuntowskiej przy katedrze na Wawelu

Streszczenie

W artykule przedstawiono analizę kształtu sklepienia kopuły Kaplicy Zygmuntowskiej. Zamieszczono wyniki pomiarów i wykonano obliczenia numeryczne dowodzące, że jest ona częścią elipsoidy obrotowej, której dłuższa oś jest pionową osią symetrii kopuły, a oś krótsza leży tuż poniżej górnej powierzchni cokołu tamburu.

W wyniku obserwacji i wykonanych pomiarów wykazano, że w Kaplicy istnieją jeszcze dwie konstrukcje o kształcie eliptycznym: są to ściany tarczowe oraz wnęka Zygmunta Augusta, wykonana już po śmierci Berecciego.

Postawiono tezę, że Berecci dobrze znał właściwości krzywych stożkowych. Opisano różne metody kreślenia elipsy za pomocą cyrkla i linijki. Opisano urządzenie, które mogło być wykorzystywane do wytwarzania kamiennych klinowych ciosów kopuły, mających w płaszczyźnie poziomej przekrój kołowy, a w pionowej przekrój eliptyczny.

1. Wprowadzenie

Kopuła odgrywa w architekturze ważną rolę jako element dekoracyjny, a z powodu trudności projektowych i wykonawczych jest to także element świadczący o mistrzostwie architektów i budowniczych. Wystarczy wspomnieć jedną z najsłynniejszych kopuł, znajdującą się na świątyni-muzeum Hagia Sofia, która od 1500 lat opiera się licznym trzęsieniom Ziemi i przynosi chwałę swoim budowniczym: Antemiuszowi z Tralles, Izydorowi z Miletu oraz Izydorowi Młodszemu z Miletu, który w roku 563 odbudował zawaaloną kopułę po trzęsieniu ziemi i nadał jej obecny kształt [1].

W latach 1515-1533 Włoch, Bartolomeo Berrecci, na polecenie króla Zygmunta I dobudował do Katedry Wawelskiej kaplicę (zwaną obecnie Kaplicą Zygmuntowską), której kopuła ma kształt elipsoidy obrotowej. Być może jest to najstarsza w historii architektury nowożytnej konstrukcja o takim kształcie, gdyż pierwsze znane wzmianki o kopułach eliptycznych pochodzą dopiero z końca XVII wieku.

Mniej więcej raz na sto lat Kaplica poddawana jest gruntownym zabiegom konserwatorskim, co stwarza rzadką okazję do przeprowadzenia różnych badań i weryfikacji hipotez. Ostatnio taką okazję dała kompleksowa konserwacja i renowacja Kaplicy, wykonywana w latach 2002-2004 pod kierunkiem Profesora Ireneusza Płuski. Czytelników zainteresowanych przebiegiem konserwacji Kaplicy odsyłamy do specjalistycznej lektury [2, 3, 4]. Tutaj wspomnimy je-

dynie, że w trakcie ostatniej konserwacji zastosowano nowatorską metodę czyszczenia laserowego i łącznie oczyszczono tą metodą ponad 800 m² płaskorzeźb wykonanych z piaskowca [2, 4].

Kaplica jako wybitne dzieło doby Renesansu była przedmiotem wielu publikacji krajowych i zagranicznych [5, 6, 7]. Czytelników zainteresowanych kulturowymi aspektami Kaplicy i analizą poszczególnych jej elementów odsyłamy do specjalnego numeru „Biuletynu Historii Sztuki” [3], gdzie obszernie omówiono religijne, filozoficzne, polityczne i kulturowe uwarunkowania, które zdecydowały o ostatecznym wystroju Kaplicy.

Przy okazji ostatniej renowacji m.in. wykonano pomiary kopuły Kaplicy. W niniejszej pracy, posługując się metodą najmniejszych kwadratów, opracowano wyniki tych pomiarów, wyznaczono równanie krzywej opisującej kształt kopuły i dowiedziono, że rzeczywiście jest to elipsoida. Przeprowadzono także analizę wcześniejszych prac dotyczących eliptycznego kształtu kopuły, a wykorzystujących pomiary wykonane jeszcze w XIX wieku. Przypomniano kilka praktycznych sposobów wykreślenia elipsy i opisano proste urządzenie, które mogło być wykorzystywane do produkcji bloków kamiennych o kształcie elipsoidy obrotowej.

2. Własności elipsy

Źródłem naszej wiedzy o krzywych stożkowych jest „*Κωνικων*”, dzieło aleksandryjskiego matematyka, Apolloniusza z Perga (ur. 262 p.n.e., zm. ok. 190 p.n.e.). „*Κωνικων*” jest traktatem zawierającym niemal całą wiedzę na temat stożkowych i potomni niewiele już mieli do dodania. Apolloniusz wprowadził takie terminy jak: „parabola”, „hiperbola”, „elipsa” i „asymptota”, których używamy w matematyce współczesnej [8, 9, 10].

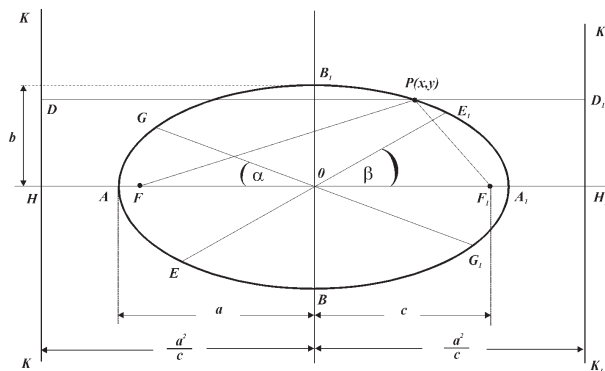
Przypomnijmy w skrócie własności elipsy [8, 9, 10]. Elipsa jest również miejscem geometrycznym punktów P, dla których stosunek odległości od dwóch punktów F i F₁, zwanych ogniskami, i od stałej prostej KK lub K₁K₁ zwanej kierownicą, jest wielkością stałą równą $e < 1$. Elipsa jest także miejscem geometrycznym punktów P, dla których suma odległości od dwóch punktów stałych F i F₁, zwanych ogniskami, jest wielkością stałą i większą od odległości między nimi $FF_1 = 2 \cdot c$ (rys. 1).

$$FP + F_1P = 2 \cdot a = \text{constans} > 2 \cdot c \quad (1)$$

Średnice sprzężone elipsy (EE₁ i GG₁) są to takie średnice, z których każda dzieli na połowy ciężary elipsy równoległe do drugiej: dla średnic sprzężonych:

Praca dopuszczona do druku po recenzjach

$$-\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2}{a^2}$$



Rys. 1. Elipsa w prostokątnym układzie współrzędnych. Kierownice i ogniska elipsy. O – środek symetrii; AA₁ – duża oś = 2a; BB₁ – mała oś = 2b; F i F₁ – ogniska

Mimośród liczbowy elipsy jest to wielkość:

$$\frac{FP}{DP} = \frac{F_1P}{D_1P} = e = c/a < 1 \quad (2)$$

Odległość ognisk od środka symetrii:

$$FO = F_1O = c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (3)$$

Dowolna krzywa stożkowa (elipsa, parabola, hiperbola lub okrąg) w kartezjańskim układzie współrzędnych może być opisana równaniem:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (4)$$

Żeby zbadać, jakiego rodzaju krzywą przedstawia ogólne równanie (4), trzeba rozważyć wartości tzw. wyróżników (niezmienników tego równania), czyli wyrażań:

$$\Delta = ACF + 2BDE - AE^2 - B^2F - D^2C \quad (5)$$

$$\delta = AC - B^2$$

Dla $D < 0$ oraz $d > 0$ równanie (4) opisuje elipsę.

3. Jaki kształt ma kopuła?

W niniejszym rozdziale zamieścimy rozważania matematyczne przeznaczone dla wąskiej grupy inżynierów. Innym czytelnikom te rozważania zapewne nie będą potrzebne. Jednak za kilka (kilkaset) lat, być może ktoś zechce porównać wyniki swoich pomiarów i obliczeń z naszymi wynikami. Nie chcemy zmuszać przyszłych czytelników do żmudnego poszukiwania wyników naszych pomiarów, zastosowanych przez nas metod obliczeniowych i wyników obliczeń w pismach specjalistycznych, dlatego uznaliśmy za celowe zamieszczenie tych rozważań i danych w niniejszym artykule.

Dane te mogą też posłużyć do wykrycia ewentualnych powolnych zmian kształtu kopuły, zachodzących z prędkością rzędu milimetrów na 100 lat, wywołanych osiadaniem gruntu czy odkształcaniem budowli.

Celem rozważań niniejszego rozdziału jest rozstrzygnięcie, czy kopuła Kaplicy ma kształt paraboliczny, hiperboliczny, czy może eliptyczny. Dlatego dokładności poświęcimy mniejszą uwagę, a skupimy się na poszukiwaniu krzywych stożkowych, które leżą najbliżej naszych punktów pomiarowych. Posłużymy się metodą najmniejszych kwadratów.

W obliczeniach prezentowanych w niniejszym rozdziale posłużymy się zestawem danych pomiarowych o numerze 1 (punkt 4, tabela 1).

3.1. Metoda najmniejszych kwadratów w wersji ogólnej

Aby udzielić odpowiedzi na pytanie postawione w tytule artykułu i niniejszego rozdziału przyjmujemy, że kształt kopuły może być opisany dowolną krzywą drugiego stopnia. Następnie, posługując się metodą najmniejszych kwadratów, wyznaczmy równanie tej krzywej biorąc pod uwagę wartości współrzędnych zmierzonych w prostokątnym układzie współrzędnych.

Metoda najmniejszych kwadratów jest opisana w wielu poradnikach matematyki (por. np. [10]). Podamy jednak tutaj jej opis mając na uwadze fakt, że można ją wykorzystać na wiele różnych sposobów, co może prowadzić do nieco innych wyników. Powrócimy do równania (4). W równaniu tym występuje sześć współczynników, ale tylko pięć z nich jest niezależnych. Dlatego dzieląc równanie (4) przez współczynnik A otrzymamy:

$$x^2 + b_1 \cdot x \cdot y + b_2 \cdot y^2 + b_3 \cdot x + b_4 \cdot y + b_5 = 0 \quad (6)$$

gdzie b_i są nowymi stałymi, które należy wyznaczyć.

Jest to równanie krzywej drugiego stopnia. Założono w nim, że współczynnik przy x^2 ma wartość 1. Jest to nieznaczne ograniczenie ogólności rozważań, które można łatwo obejść zamieniając współrzędne w obliczeniach.

Równanie (6) opisuje idealną krzywą drugiego stopnia. W wyniku pomiarów otrzymujemy współrzędne punktów leżących na tej krzywej obarczone pewną odchyłką. Zmierzane wartości współrzędnych oznaczmy x_i, y_i $i = 1, 2, \dots, N$; N – oznacza ilość punktów pomiarowych. Dla przybliżonych wartości współrzędnych równanie (6) nie będzie spełnione dokładnie, lecz z pewnym przybliżeniem:

$$x_i^2 + b_1 \cdot x_i \cdot y_i + b_2 \cdot y_i^2 + b_3 \cdot x_i + b_4 \cdot y_i + b_5 = \varepsilon_i \quad (7)$$

gdzie ε_i oznacza rzeczywistą wartość wyrażenia (6) obliczoną dla niedokładnie wyznaczonych współrzędnych (x_i, y_i) .

Nie znamy jeszcze równania poszukiwanej krzywej. Do jego wyznaczenia posłużymy się metodą najmniejszych kwadratów. W tym celu tworzymy sumę:

$$\sum_{i=1}^N (x_i^2 + b_1 \cdot x_i \cdot y_i + b_2 \cdot y_i^2 + b_3 \cdot x_i + b_4 \cdot y_i + b_5)^2 = \eta \quad (8)$$

gdzie η oznacza sumę nieznanych odchyłek ε_i

Żądamy, aby poszukiwana krzywa przechodziła przez punkty pomiarowe w taki sposób, by suma η miała wartość minimalną. Żądanie to pozwala wyznaczyć poszukiwane współczynniki b_k . Jeśli suma η osiąga minimum dla pewnych wartości współczynników b_k , to zerowe muszą być następujące pochodne cząstkowe:

$$\partial \eta / \partial b_k = 0 \quad (9)$$

co prowadzi do następujących równań:

$$b_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot y_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i^3 + b_3 \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot y_i + b_4 \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i^2 + b_5 \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i = - \sum_{i=1}^N x_i^3 \cdot y_i \quad (10)$$

$$b_1 \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^N y_i^4 + b_3 \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i^3 + b_4 \sum_{i=1}^N y_i^3 + b_5 \sum_{i=1}^N y_i^2 = - \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot y_i^2 \quad (11)$$

$$b_1 \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot y_i + b_2 \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i^2 + b_3 \sum_{i=1}^N x_i^2 + b_4 \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i + b_5 \sum_{i=1}^N x_i = - \sum_{i=1}^N x_i^3 \quad (12)$$

$$b_1 \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^N y_i^3 + b_3 \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i + b_4 \sum_{i=1}^N y_i^2 + b_5 \sum_{i=1}^N y_i = - \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot y_i \quad (13)$$

$$b_1 \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i + b_2 \sum_{i=1}^N y_i^2 + b_3 \sum_{i=1}^N x_i + b_4 \sum_{i=1}^N y_i + b_5 \cdot N = - \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (14)$$

Liczba punktów pomiarowych musi spełniać warunek $N > 5$. Dla $N = 5$ mamy zagadnienie interpolacji.

Układ równań (10-14) jest układem liniowym ze względu na nieznane współczynniki b_i i można go łatwo rozwiązać, czego już nie będziemy opisywać.

Sprawdziliśmy wiarygodność naszej metody zadając sztucznie dane kształtu kopuły według paraboli o równaniu $y = 300 - 0.02 x^2$, dlatego dla krzywej zapisanej w postaci (6) powinniśmy otrzymać:

$$b_1 = 0; \quad b_2 = 0; \quad b_3 = 0; \quad b_4 = 50; \quad b_5 = -15000$$

ale po zastosowaniu naszej metody otrzymaliśmy:

$$b_1 = 3 \cdot 10^{-11}; \quad b_2 = 1.9 \cdot 10^{-12}; \quad b_3 = -2.95 \cdot 10^{-8}$$

$$b_4 = 49.9999999901553; \quad b_5 = -14999.9999963966; \quad \eta = 1.1 \cdot 10^{-8}$$

Ten wynik nie pozostawia wątpliwości, że nasza metoda pozwala dokładnie aproksymować krzywe stożkowe.

3.2. Obliczenie kształtu kopuły

Przyjmijmy, że kopuła powstała w wyniku obrotu pewnej elipsy wokół osi Kaplicy. Jeśli krzywa opisująca kształt kopuły ma być elipsą, to współczynniki (b_1, b_2) równania (6) powinny spełniać warunek:

$$b_2 > b_1^2 / 4 \quad (15)$$

W wyniku rozwiązania układu równań (6) otrzymamy następujące współczynniki:

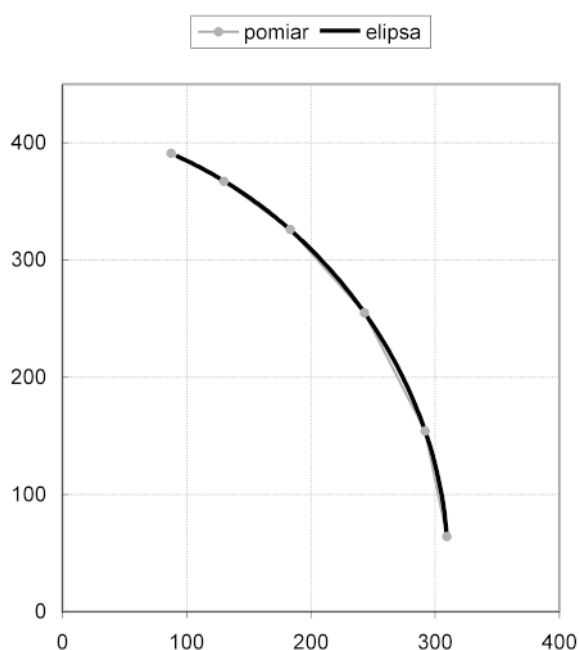
$$b_1 = 0.317193; \quad b_2 = 0.831055; \quad b_3 = -62.9139 \\ b_4 = -165.018; \quad b_5 = -75443.64; \quad \eta = 124.98; \quad \delta = 0.8059 \quad (16)$$

Dla współczynników (16) wyróżniki (5) przyjmują następujące wartości:

$$\Delta = -67607.1; \quad \delta = 0.8059$$

co oznacza, że krzywa opisująca kształt kopuły jest **ELIPSA i TYLKO ELIPSA**. Nie istnieje inna krzywa stożkowa, która lepiej opiswałaby kształt kopuły niż elipsa. Doskonałym potwierdzeniem tego faktu jest także rys. 2. Widać, że punkty pomiarowe i znaleziona elipsa doskonale do siebie pasują!

Elipsa o równaniu (6), ze współczynnikami (16) jest najlepszą z elips. Jednak jej środek i oś nie pokrywają się z osią Kaplicy. Celem rozważań niniejszego rozdziału było znalezienie rozstrzygających argumentów bezspornie przemawiających za określoną krzywą. Cel ten został osiągnięty. **Kopuła jest elipsoidą.**



Rys. 2. Aproxymacja danych pomiarowych elipsą. Punktami oznaczono dane pomiarowe, kolorem czarnym elipsę otrzymaną w wyniku rozwiązania układu równań (10-14)

4. Kształt kopuły

W niniejszym rozdziale, posługując się nieco innym wariantem metody najmniejszych kwadratów, wyznaczmy równanie elipsoidy obrotowej, której środek i oś symetrii pokrywają się z osią Kaplicy. Wykonamy obliczenia dla kilku serii danych oraz wyznaczmy parametry elipsy, to znaczy długość dużej i małej półosi, położenie środka elipsy i jej ognisk, a także obliczymy mimośród. Następnie zamieścimy wyniki obliczeń. Na końcu odniesiemy się do publikacji Harwella [5].

4.1. Wyznaczenie parametrów elipsoidy obrotowej

Zastosujemy także metodę najmniejszych kwadratów, jednak minimalizować będziemy inne wyrażenie, gdyż założymy, że poszukiwana krzywa jest elipsą, której oś i środek pokrywają się z osią Kaplicy.

Dane są punkty pomiarowe:

$$(x_i, y_i); \quad i = 1, 2, 3, \dots, N; \quad (17)$$

gdzie N oznacza ilość punktów pomiarowych.

Założymy, że oś poszukiwanej elipsy i jej środek leżą na osi Kaplicy. Dlatego równanie poszukiwanej elipsy zapiszemy w postaci:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \right) = 1 \quad (18)$$

Położenia punktów wyznaczone są ze skończoną dokładnością, dlatego współrzędne (17) będą spełniać równanie elipsy tylko z pewnym przybliżeniem:

$$\left(\frac{x_i^2}{a^2} - \frac{(y_i - y_0)^2}{b^2} \right) - 1 = \delta_i \quad (19)$$

gdzie

$$|\delta_i| \ll 1$$

Żądamy, aby suma kwadratów odchylek (19) osiągała minimum:

$$\delta = \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{x_i^2}{a^2} - \frac{(y_i - y_0)^2}{b^2} \right) - 1 \right]^2 = \min \quad (20)$$

W równaniu (20) występują tylko trzy (a nie pięć) nieznane parametry elipsy, co wynika z założenia, że oś elipsy i jej środek pokrywają się z osią Kaplicy. Są to długości półosi a i b oraz położenie środka układu współrzędnych y_0 . Przy takim sformułowaniu otrzymujemy nieliniowe zadanie metody najmniejszych kwadratów, co jest niewygodne w obliczeniach i obniża dokładność obliczeń. Dlatego równanie (19) zapiszemy w postaci:

$$x^2 + y^2 \cdot a^2 / b^2 + y \cdot (-2y_0 a^2 / b^2) + a^2 \cdot (y_0^2 / b^2 - 1) = 0 \quad (21)$$

oznaczymy:

$$w_1 = a^2 / b^2; \quad w_2 = -2y_0 a^2 / b^2 = -2y_0 \cdot w_1; \quad w_3 = a^2 \cdot (y_0^2 / b^2 - 1) \quad (22)$$

parametry elipsy wyrazimy przez współczynniki w_i (22):

$$y_0 = \frac{-w_2}{2w_1}; \quad a^2 = w_1 y_0^2 - w_3; \quad b^2 = a^2 / w_1 \quad (23)$$

Równanie poszukiwanej elipsy zapiszemy zatem w postaci:

$$x^2 + y^2 \cdot w_1 + y \cdot w_2 + w_3 = 0 \quad (24)$$

Przy takim zapisie do wyznaczenia parametrów elipsy otrzymujemy liniowe zadanie metody najmniejszych kwadratów na współczynniki w_i .

Dane rzeczywistych punktów pomiarowych (17), obarczone pewnymi błędami, będą tylko w przybliżeniu spełniały równanie elipsy (24):

$$x_i^2 + y_i^2 \cdot w_1 + y_i \cdot w_2 + w_3 = \delta_i \quad (25)$$

Żądamy, aby suma kwadratów odchyłek (33) osiągała minimum:

$$\sum_{i=1}^N (x_i^2 + y_i^2 \cdot w_1 + y_i \cdot w_2 + w_3)^2 = \sum_{i=1}^N (\delta_i)^2 = \Delta = \min \quad (26)$$

czyli powinny się zerować pochodne cząstkowe:

$$\partial \Delta / \partial w_i = 0 \quad (27)$$

Żądanie to prowadzi do układu trzech równań liniowych na współczynniki w_1, w_2, w_3 .

$$\begin{aligned} a_{11} w_1 + a_{12} w_2 + a_{13} w_3 &= p_1 \\ a_{21} w_1 + a_{22} w_2 + a_{23} w_3 &= p_2 \\ a_{31} w_1 + a_{32} w_2 + a_{33} w_3 &= p_3 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{i=1}^N y_i^4; \quad a_{12} = \sum_{i=1}^N y_i^3; \quad a_{13} = \sum_{i=1}^N y_i^2; \quad p_1 = -\sum_{i=1}^N x_i^2 y_i^2 \\ a_{21} &= a_{12}; \quad a_{22} = a_{13}; \quad a_{23} = \sum_{i=1}^N y_i; \quad p_2 = -\sum_{i=1}^N x_i^2 y_i \\ a_{31} &= a_{13}; \quad a_{32} = a_{23}; \quad a_{33} = N; \quad p_3 = -\sum_{i=1}^N x_i^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Układ ten jest łatwy do rozwiązania. Po wyznaczeniu współczynników w_i , ze wzorów (23) obliczamy parametry elipsy.

4.2. Dokładność aproksymacji

Należy jeszcze wyjaśnić problem dokładności aproksymacji. Można zaproponować dwie miary dokładności: bezwymiarową i wymiarową.

Jako bezwymiarową miarę dokładności aproksymacji można przyjąć sumę kwadratów bezwymiarowych odchyłek:

$$\left(\frac{x_i^2}{a^2} - \frac{(y_i - y_0)^2}{b^2} \right) - 1 = \delta_i \quad (30)$$

$$\delta_{sr} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\left(\frac{x_i^2}{a^2} - \frac{(y_i - y_0)^2}{b^2} \right) - 1 \right]^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i^2} \quad (31)$$

Jako wymiarową miarę dokładności aproksymacji można przyjąć odległość punktu pomiarowego od wyznaczonej elipsy. Odległość punktu pomiarowego od elipsy mierzymy wzdłuż prostej, która jest prostopadła do elipsy i przechodzi przez punkt pomiarowy. Aby wyznaczyć tę odległość, musimy obliczyć współrzędne punktu na elipsie, przez który przechodzi prosta prostopadła do elipsy, i która jednocześnie przechodzi przez punkt pomiarowy.

Dla uproszczenia zapisów równanie elipsy przedstawimy w postaci:

$$x_E^2 / a^2 + z_E^2 / b^2 = 1 \quad (32)$$

gdzie $z_E = y - y_0$, x_E , współrzędne poszukiwanego punktu na elipsie.

Prosta prostopadła do elipsy (32) ma równanie:

$$z = z_E + a^2 z_E \cdot (x - x_E) / b^2 / x_E \quad (33)$$

Ta prosta musi przechodzić przez zadany punkt pomiarowy ($x_i, z_i = y_i - y_0$), zatem:

$$z_i = z_E + a^2 z_E \cdot (x_i - x_E) / b^2 / x_E \quad (34)$$

Z równań (32) i (34) otrzymujemy nieliniowe równanie na współrzędną np. z_E , przy zadanym położeniu x_i, z_i :

$$z_E = b / \left(1 + (a \cdot x_i / b)^2 / (z_i - c \cdot z_E / b)^2 \right) \quad (35)$$

Równanie (35) rozwiązujemy metodą iteracyjną.

Po wyznaczeniu współrzędnych punktu na elipsie, położonego w najbliższej odległości od zadanego punktu x_i, z_i , możemy obliczyć składowe jego odległości od elipsy:

$$\begin{aligned} dx_i &= x_i - x_E \\ dy_i &= z_i - z_E \end{aligned} \quad (36)$$

i odległość od elipsy

$$d_i = \sqrt{dx_i^2 + dy_i^2} \quad (37)$$

oraz odległość średnią kwadratową

$$d_{sr} = \sqrt{\sum_{i=1}^N d_i^2 / N} \quad (38)$$

Ostatnią z wielkości, charakteryzujących błędy obliczeń, jest odchyłka maksymalna, czyli największa z odległości (37):

$$d_{max} = \max(d_i) \quad (39)$$

4.3. Wyniki obliczeń

Wyniki obliczeń, według algorytmu opisanego w niniejszym rozdziale, zamieszczamy w kolejnych tabelach. W roku 2003 czterokrotnie zmierzono kształt kopuły Kaplicy Zygmuntońskiej. Wyniki zamieszczono w poniższych tabelach.

W prezentowanych niżej wynikach oznaczono:

a – mała półos elipsy, b – duża półos elipsy, c = pierwiastek ($a^2 - b^2$), y_0 – położenie środka układu współrzędnych, $\varepsilon = c/a$ – mimośród, $\varepsilon_{HARWELL} = b/c$ – „mimośród”

Tabela 1. Wyniki pomiarów i obliczeń kształtu kopuły kaplicy – seria 1

nr	x_i	y_i	Δx	Δy	d_i	ε_i
1	309.5000	64.0000	-0.7933	-0.1046	0.8002	-0.005047
2	292.0000	154.0000	1.6804	0.5406	1.7652	0.010895
3	243.0000	255.0000	-0.2668	-0.1680	0.3153	-0.001829
4	183.5000	326.0000	-1.0470	-1.1109	1.5265	-0.008270
5	130.0000	367.0000	-0.6002	-1.0106	1.1754	-0.006057
6	87.5000	391.0000	0.7189	1.9244	2.0543	0.010308

$a = 314.8123$; $b = 410.0955$; $c = 262.8146$; $y_0 = -5.1309$;
 $\varepsilon = 0.6409$; $\varepsilon_{\text{Harwell}} = 1.1978$; $\delta_{\text{sr}} = 0.007734$; $d_{\text{sr}} = 1.402$, $d_{\text{max}} = 2.054$;

Tabela 2 Wyniki pomiarów i obliczeń kształtu kopuły kaplicy – seria 2

nr	x_i	y_i	Δx	Δy	d_i	ε_i
1	309.5000	60.0000	-1.0489	-0.1458	1.0590	-0.006651
2	291.5000	153.0000	2.3871	0.7954	2.5162	0.015446
3	242.5000	249.8000	-0.6989	-0.4398	0.8257	-0.004754
4	183.5000	321.0000	-1.2120	-1.2763	1.7601	-0.009448
5	129.0000	363.0000	-0.6833	-1.1522	1.3396	-0.006820
6	88.0000	387.0000	0.8717	2.3060	2.4653	0.012227

$a = 315.7285$; $b = 415.6726$; $c = 270.3687$; $y_0 = -14.8377$;
 $\varepsilon = 0.6504$; $\varepsilon_{\text{Harwell}} = 1.1678$; $\delta_{\text{sr}} = 0.009922$; $d_{\text{sr}} = 1.784$, $d_{\text{max}} = 2.516$

Tabela 3 Wyniki pomiarów i obliczeń kształtu kopuły kaplicy – seria 3

nr	x_i	y_i	Δx	Δy	d_i	ε_i
1	309.5000	60.5000	-0.7933	-0.1046	0.8002	-0.005047
2	292.0000	150.5000	1.6804	0.5406	1.7652	0.010895
3	243.0000	251.5000	-0.2668	-0.1680	0.3153	-0.001829
4	183.5000	322.5000	-1.0470	-1.1109	1.5265	-0.008270
5	130.0000	363.5000	-0.6002	-1.0106	1.1754	-0.006057
6	87.5000	387.5000	0.7189	1.9244	2.0543	0.010308

$a = 314.8123$; $b = 410.0955$; $c = 262.8146$; $y_0 = -8.6309$;
 $\varepsilon = 0.6409$; $\varepsilon_{\text{Harwell}} = 1.1978$; $\delta_{\text{sr}} = 0.007734$; $d_{\text{sr}} = 1.402$, $d_{\text{max}} = 2.054$

Tabela 4 Wyniki pomiarów i obliczeń kształtu kopuły kaplicy – seria 4

nr	x_i	y_i	Δx	Δy	d_i	ε_i
1	308.8000	64.5000	-0.9031	-0.1082	0.9096	-0.005776
2	291.3000	154.5000	1.0573	0.3402	1.1107	0.006916
3	279.8000	186.0000	0.9675	0.3923	1.0440	0.006416
4	242.8000	258.0000	1.2719	0.8325	1.5201	0.008968
5	226.8000	275.5000	-1.2534	-0.9356	1.5641	-0.009054
6	184.3000	322.0000	-1.5276	-1.6433	2.2437	-0.012446
7	168.8000	337.0000	-0.6860	-0.8458	1.0891	-0.005963
8	128.8000	365.0000	-0.3126	-0.5478	0.6307	-0.003347
9	117.3000	372.0000	0.0313	0.0616	0.0691	0.000364
10	88.3000	387.5000	0.9213	2.5150	2.6785	0.013922

$a = 313.2021$; $b = 394.9236$; $c = 240.5600$; $y_0 = 5.7416$;
 $\varepsilon = 0.6091$; $\varepsilon_{\text{Harwell}} = 1.3020$; $\delta_{\text{sr}} = 0.008248$; $d_{\text{sr}} = 1.473$, $d_{\text{max}} = 2.678$

Tabela 5 Wyniki pomiarów i obliczeń kształtu kopuły kaplicy – wszystkie serie

nr	x_i	y_i	Δx	Δy	d_i	ε_i
1	309.5000	64.0000	-0.4915	-0.0646	0.4957	-0.003132
2	292.0000	154.0000	2.1616	0.7043	2.2734	0.014066
3	243.0000	255.0000	0.6710	0.4293	0.7965	0.004641
4	183.5000	326.0000	0.2192	0.2369	0.3228	0.001761
5	130.0000	367.0000	0.6300	1.0807	1.2509	0.006509
6	87.5000	391.0000	1.6641	4.5404	4.8357	0.024547
7	309.5000	60.0000	-0.9972	-0.1238	1.0049	-0.006348
8	291.5000	153.0000	1.4162	0.4593	1.4888	0.009203
9	242.5000	249.8000	-2.0408	-1.2773	2.4076	-0.013994
10	183.5000	321.0000	-2.2864	-2.4176	3.3275	-0.018106
11	129.0000	363.0000	-1.3723	-2.3323	2.7060	-0.014015
12	88.0000	387.0000	0.4414	1.1786	1.2585	0.006365
13	309.5000	60.5000	-0.9356	-0.1170	0.9429	-0.005957
14	292.0000	150.5000	1.1437	0.3643	1.2003	0.007423
15	243.0000	251.5000	-0.9137	-0.5759	1.0800	-0.006286
16	183.5000	322.5000	-1.5314	-1.6295	2.2362	-0.012177
17	130.0000	363.5000	-0.8995	-1.5213	1.7673	-0.009169
18	87.5000	387.5000	0.5408	1.4550	1.5522	0.007851
19	308.8000	64.5000	-1.1139	-0.1482	1.1238	-0.007093
20	291.3000	154.5000	1.6756	0.5492	1.7634	0.010898
21	279.8000	186.0000	1.6933	0.6917	1.8292	0.011145
22	242.8000	258.0000	1.8904	1.2283	2.2545	0.013142
23	226.8000	275.5000	-0.7510	-0.5544	0.9335	-0.005332
24	184.3000	322.0000	-1.4090	-1.4908	2.0513	-0.011181
25	168.8000	337.0000	-0.6914	-0.8365	1.0852	-0.005830
26	128.8000	365.0000	-0.5445	-0.9342	1.0813	-0.005608
27	117.3000	372.0000	-0.2328	-0.4471	0.5041	-0.002594
28	88.3000	387.5000	0.6432	1.7154	1.8320	0.009273

$a = 314.4825$; $b = 406.2270$; $c = 257.1403$; $y_0 = -4.3430$;
 $\varepsilon = 0.6330$; $\varepsilon_{\text{Harwell}} = 1.2230$; $\delta_{\text{sr}} = 0.010290$; $d_{\text{sr}} = 1.871 \text{ cm}$, $d_{\text{max}} = 4.836 \text{ cm}$

Tabela 6. Zestawienie parametrów elips aproksymacyjnych oraz błędów aproksymacji

nr	a [cm]	b [cm]	c [cm]	y_0 [cm]	ε	$\varepsilon_{\text{Harwell}}$	δ_{sr} [%]	d_{sr} [cm]	d_{max} [cm]
1	314.81	410.10	262.81	-5.13	0.641	1.198	0.77	1.40	2.05
2	315.73	415.67	270.37	-14.84	0.650	1.168	0.99	1.78	2.52
3	314.81	410.10	262.81	-8.63	0.641	1.198	0.77	1.40	2.05
4	313.20	394.92	240.56	5.74	0.609	1.302	0.82	1.47	2.68
5	314.48	406.23	257.14	-4.34	0.633	1.223	1.03	1.87	4.84

Harwella (por. punkt 4.4), δ_{sr} – błąd średni kwadratowy (por. formuła 31), d_{sr} – średnia odległość punktów pomiarowych od elipsy, d_{max} – maksymalna z odległości punktów pomiarowych od elipsy,

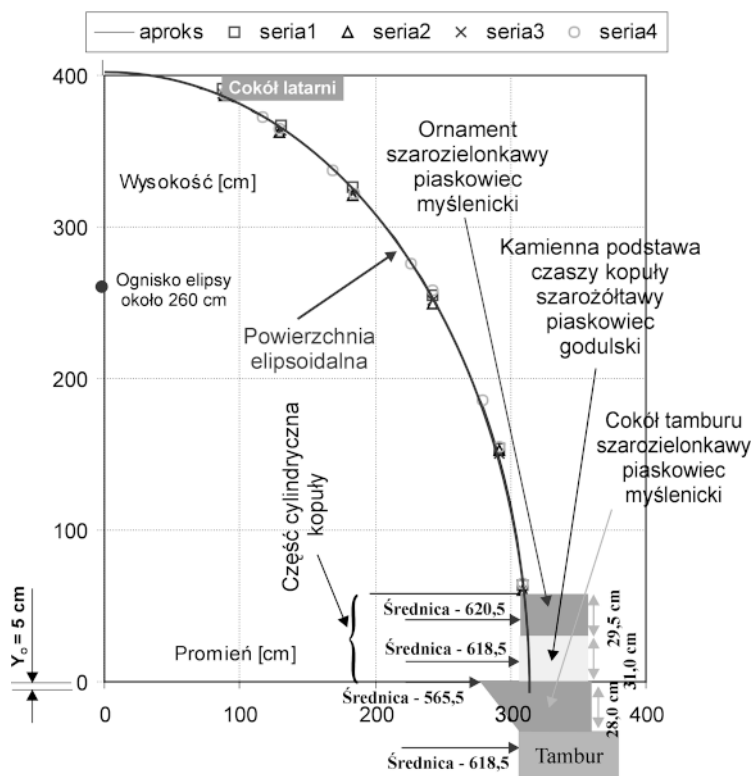
Zwróćmy uwagę, że „mimośród” Harwella przyjmuje tutaj taką samą wartość 1.22, jaką podano w pracy [5].

Tylko dla wartości współrzędnej x bliskiej 300 cm różnice między elipsami aproksymacyjnymi osiągają wartość około 1.5 cm. W pozostałych punktach różnice te nie przekraczają kilku mm. Dlatego różnice między tymi elipsami są właściwie nieistotne, gdyż błąd danych pomiarowych jest

wiekszy. Zwróćmy uwagę, że $d_{\text{sr}} = 1.9 \text{ cm}$, inaczej mówiąc punkty pomiarowe oddalają się od elipsy aproksymacyjnej średnio na około 19 mm. Największe odchylenie wynosi 48 mm.

Y_0 równe (minus pięć cm) oznacza, że oś pozioma elipsy leży około 5 cm poniżej górnej powierzchni cokołu na którym stoi kopuła. Ognisko elipsy umiejscowione jest na wysokości około 260 cm powyżej górnej płaszczyzny cokołu tamburu.

Na zakończenie zestawimy obliczone parametry elipsy dla poszczególnych serii pomiarowych.



Rys. 3. Porównanie położenia punktów pomiarowych oraz elipsy aproksymacyjnej (czerwona linia). Krzywa aproksymacyjna została obliczona na podstawie wartości położenia wszystkich punktów pomiarowych. Y_0 Oś pozioma elipsy przesunięta o 5 cm poniżej górnej płaszczyzny cokółu kopuły. Na rys. 3 zaznaczono dolny ornament kopuły, kamienną podstawę kopuły z podaniem ich wysokości oraz cokół latarni. Zaznaczono również położenie ogniska elipsy

4.4. Porównanie wyników obliczeń z publikowanymi danymi

Dane o kształcie kopuły Kaplicy Zygmuntowskiej zamieszczono między innymi w pracy Harwella [5] i Komornickiego [6].

Jedną z metod porównywania wyników obliczeń i pomiarów może być w tym przypadku porównywanie wartości mimośrodu elipsy.

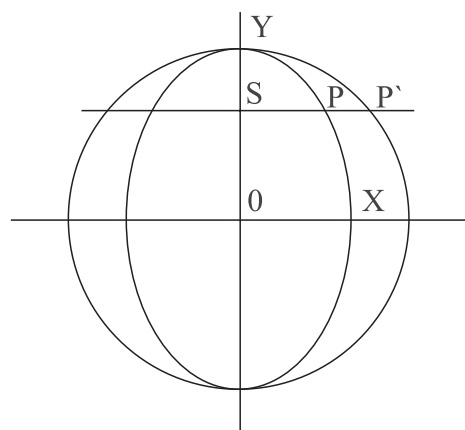
Jak można zmierzyć mimośród elipsy? Jedną z metod została opisana w poprzednim rozdziale – to metoda aproksymacji numerycznej danych pomiarowych. Metoda ta zapewne nie była znana w czasach Kopernika. Metodę najmniejszych kwadratów (teorię błędów) opracował Gauss (1777-1855) ponad dwieście lat później, do wyznaczania parametrów orbit ciał niebieskich. Natomiast Harwell [5] proponuje następującą metodę (rys. 4).

Na elipsie opisujemy okrąg. Początek układu współrzędnych umieszczamy w punkcie O (rys. 4). Długość odcinka OX jest równa długości małej półosi elipsy (w tym przypadku). Z tego opisu wynika, że Harwell nie znał metody wyznaczania elipsy za pomocą dwóch współśrodkowych okręgów. Długość odcinka OY jest równa długości dużej półosi elipsy i zarazem jest to promień okręgu opisanego na elipsie.

Zajmiemy się teraz analitycznym opisem okręgu i elipsy. Okrąg ma równanie:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1 \quad (40)$$

natomiast elipsa



Rys. 4. Elipsa i okrąg na niej opisany (rysunek wzorowany na rys. 6 [5]).

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1 \quad (41)$$

Z tych równań dla zadanej wartości „y” (punkt S na rys. 4) możemy obliczyć współrzędną „x” punktu na elipsie (punkt P na rys. 4) albo współrzędną „x” punktu na okręgu opisanym (punkt P’ na rys. 4).

Z równania (40) mamy położenie punktu na okręgu:

$$x_o = a\sqrt{1 - (y/a)^2} \quad (42)$$

natomiast z równania (41) położenie punktu na elipsie:

$$x_E = b\sqrt{1 - (y/a)^2} \quad (43)$$

Zatem iloraz długości odcinków SP do SP’ wynosi:

$$\frac{SP'}{SP} = \frac{x_o}{x_E} = \frac{a}{b} \quad (44)$$

Rzeczywiście, wartość tego ilorazu dla elipsy jest niezależna od współrzędnej „y”. Harwell twierdzi, że mimośród elipsy wynosi 1.22. W twierdzeniu tym tkwią prawdopodobnie trzy nieścisłości.

Po pierwsze, według współczesnej definicji, mimośród elipsy jest zawsze mniejszy od jedności. Mimośród jest równy jedynce dla paraboli i jest większy od jedynki dla hiperboli.

Po drugie, nawet przyjmując, że Harwell „swój” mimośród zdefiniował jak odwrotność definicji używanej we współczesnej matematyce:

$$\varepsilon = c/a = \sqrt{a^2 - b^2} / a \quad (45)$$

nie uzyskamy wartości 1.22.

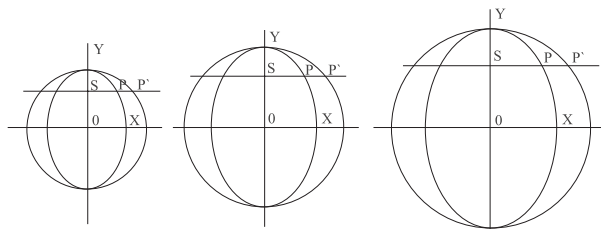
Co więc obliczył Harwell? Wartości parametrów elipsy podaliśmy w tabeli 6. Z zamieszczonych tam wartości uzyskamy następujące ilorazy:

$$\begin{aligned} \alpha &= a/c \cong 410/263 \cong 1.56; \\ \beta &= b/c \cong 315/263 \cong 1.20; \\ \beta &= b/c \cong 315/263 \cong 1.20; \end{aligned} \quad (46)$$

Druga z tych wartości jest bliska temu, co podaje Harwell. Możemy zatem przypuszczać, że Harwell do obliczeń zamiast długości dużej półosi, użył długości małej półosi oraz wprowadził definicję mimośrodu odwrotną do używanej we współczesnej matematyce. Jakich danych używał

Harwell? – on sam twierdzi, że były to dane Komornickiego [6].

Trzecia nieścisłość Harwella tkwi w tym, że wartość mimośrodowi elipsy możemy uzyskać dla dowolnej średnicy okręgu otaczającego elipsę, ponieważ nie podaje on średnicy zewnętrznej okręgu otaczającego elipsę. Gdyby ją podał, to mielibyśmy średnicę okręgu wewnętrznego, wynikającą ze stosunku $SP'/SP = 1,22$.



Rys. 5. Rysunki ilustrujące stały stosunek SP' do SP równy 1,22. Jeśli zachowa się wartość jednego promienia tak aby drugi był 1,22 razy mniejszy lub większy, to nie uzyska się rzeczywistych wymiarów długiej i krótkiej półosi elipsy Kaplicy Zygmuntowskiej

Zastanówmy się jeszcze, skąd wynikała wartość mimośrodowi elipsy oscylująca między 0.61, a 0.65 (tabela 6). Można przyjąć, że Berecci kierował się regułą „złotego podziału”. Wówczas wartość mimośrodowi powinna wynieść 0.618.

5. Sposoby wykreślania elipsy

5.1. Za pomocą linijki – 1

Wykreślenie elipsy o danych osiach lub średnicach sprzężonych.

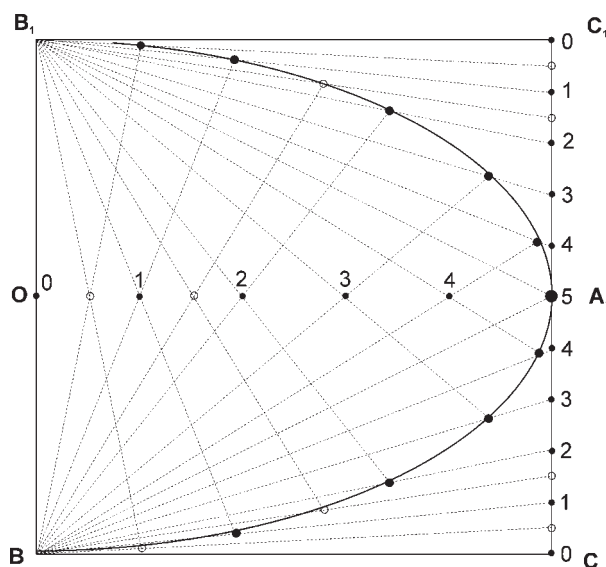
1. Podzielić dużą półosi na kilka równych części, numerując je od środka elipsy.

2. Przez koniec dużej osi wykreślić prostą równoległą do małej osi. Z końców małej osi wykreślić równoległe do dużej osi (zbudować prostokąt BB_1C_1C).

3. Podzielić A_1C_1 i A_1C na taką samą ilość równych części jak w punkcie (1), numerując je do punktu A_1 .

4. Połączyć odcinkami punkty B i B_1 z punktami podziału osi OA_1 .

5. Połączyć odpowiednio odcinkami punkty B i B_1 z punktami podziału odcinków A_1C oraz A_1C_1 .



Rys. 6. Pierwszy sposób wykreślania elipsy za pomocą linijki

6. Przecięcie się odcinków przechodzących przez jednoimienne punkty podziału wyznaczają punkty elipsy.

Uwaga: W celu dokładniejszego wyznaczenia elipsy ilość punktów podziału można zwiększyć, co pokazano na rysunku, zaznaczając dodatkowe punkty okręgami.

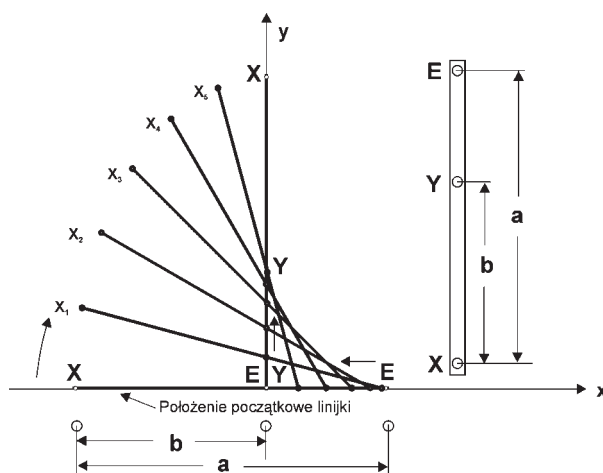
5.2. Za pomocą linijki – 2

Na linijkę w odległości „b” od punktu „X”, równej małej półosi elipsy, zaznaczamy punkt „Y”, a następnie w odległości „a”, punkt „E”. Przesuwamy punkt „E” linijki po osi „x” i utrzymując punkt „Y” na osi „y”, zaznaczamy kolejne punkty elipsy, wyznaczone przez punkt „X” na linijkę.

Ten sposób został wykorzystany do skonstruowania przyborka do wykreślania dowolnej elipsy: „elipsografu”.

Na linijkę elipsografu oznaczamy punkt „P” w odległości „b” stanowiącą np. małą półosi elipsy. Pozostały odcinek „a” stanowi dłuższą półosi elipsy. Przesuwamy linijkę wzdłuż prowadnic, punkt „P” linijki w trakcie przesuwania wyznacza elipsę. Czerwone kropki na rys. 8 oznaczają punkty skrajne elipsy.

Berecci na pewno znał sposób tworzenia elipsy za pomocą linijki.



Rys. 7. Drugi sposób wykreślania elipsy za pomocą linijki

5.3. Za pomocą cyrkla i linijki

Wykreślenie elipsy o danych osiach (oparte na równaniu parametrycznym – o środku symetrii leżącym w początku układu i o osiach symetrii pokrywających się z osiami układu $x = a \cos t$, $y = b \cos t$, gdzie: t – kąt mimośrodowy.

1. Ze środka elipsy wykreślić 2 koła o średnicach równych dużej i małej osi elipsy.

2. Na obwodzie dużego koła oznaczyć szereg punktów, łącząc je promieniami ze środkiem elipsy.

3. Z wyżej wyznaczonych punktów poprowadzić równoległe do małej osi elipsy.

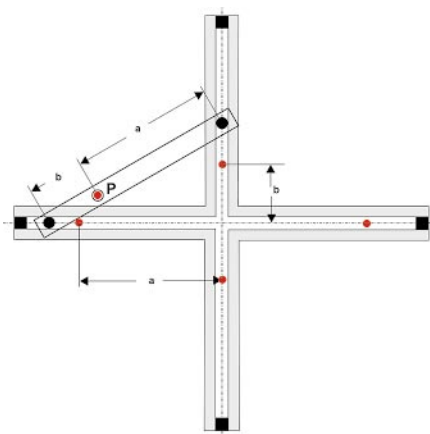
4. Z punktów przecięcia się promieni z kołem małym poprowadzić równoległe do dużej osi elipsy.

5. Punkty przecięcia się równoległych wskazanych pod (3) i (4) wyznaczają punkty elipsy.

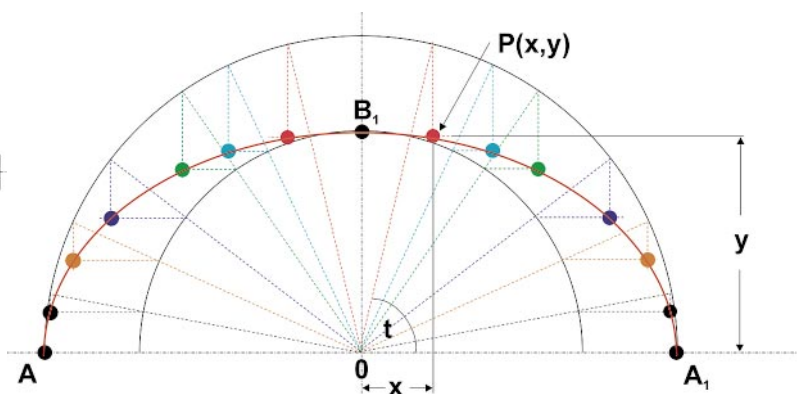
Jest jeszcze jedna metoda, a mianowicie za pomocą sznurka i dwóch pinezek, ale nie będziemy jej tu przedstawiać, gdyż zna ją każdy, kto chodził do szkoły.

5.4. Jak można wykuć elipsoidę w kamieniu?

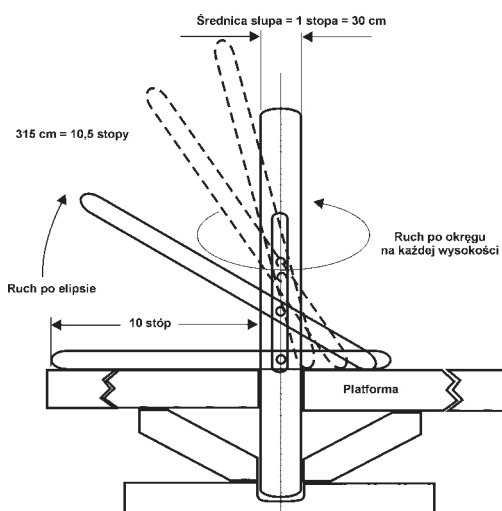
Na zakończenie tego punktu przedstawimy urządzenie, za pomocą którego Berecci mógł wykonywać klinowe cio-



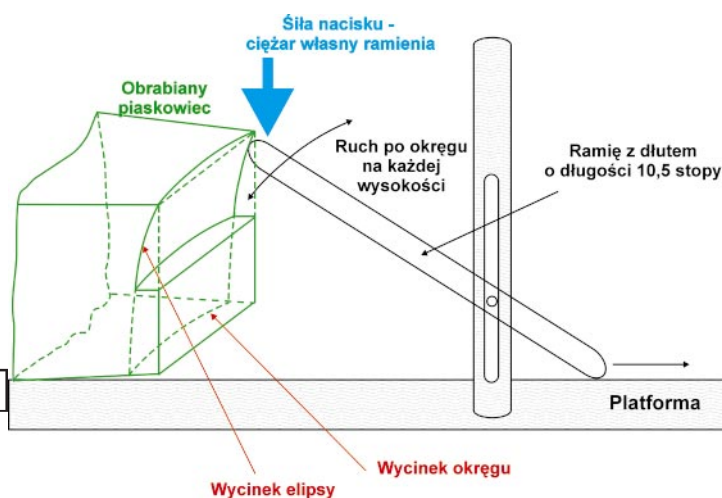
Rys. 8 Elipsograf – przyrząd do rysowania dowolnej elipsy



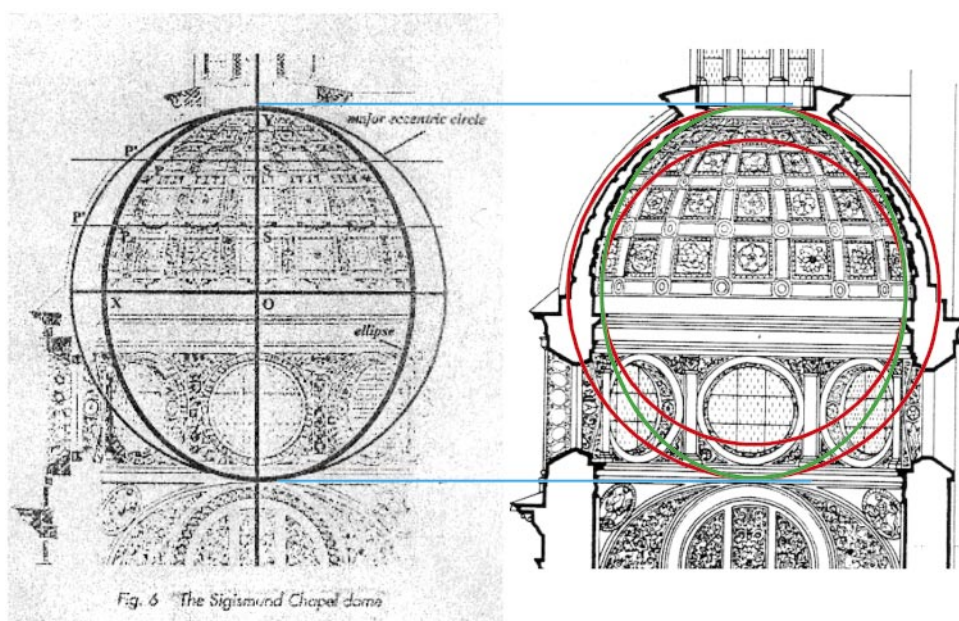
Rys. 9 Wykreślanie elipsy za pomocą cyrkla i liniiki



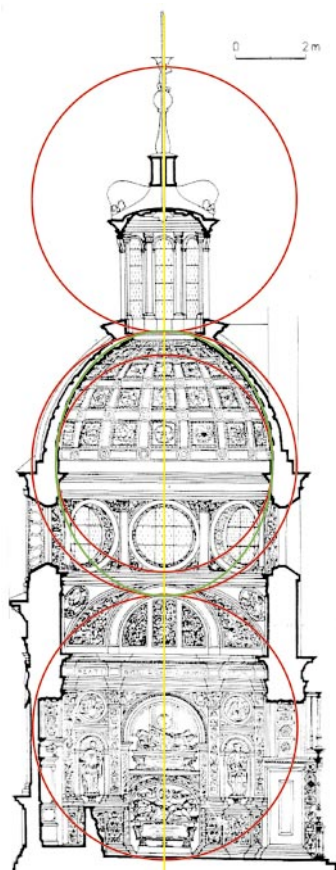
Rys. 10. Schemat urządzenia, za pomocą którego Berecci mógł wytwarzać klinowe ciosy elipsoidalne kopuły Kaplicy Zygmuntowskiej



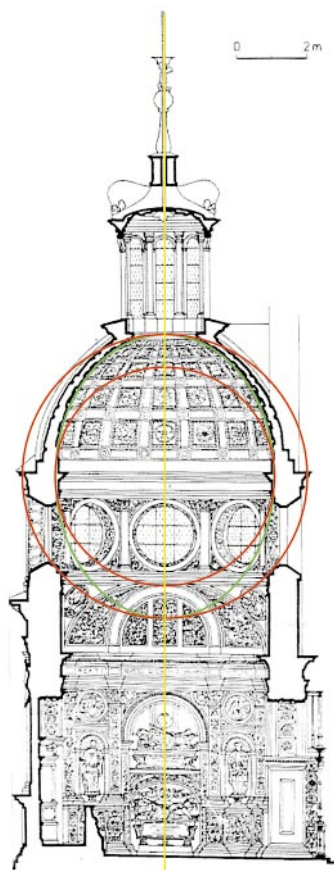
Rys. 11. Schematyczne przedstawienie „domniemanego” procesu wytwarzania klinowych ciosów elipsoidalnych kopuły Kaplicy Zygmuntowskiej



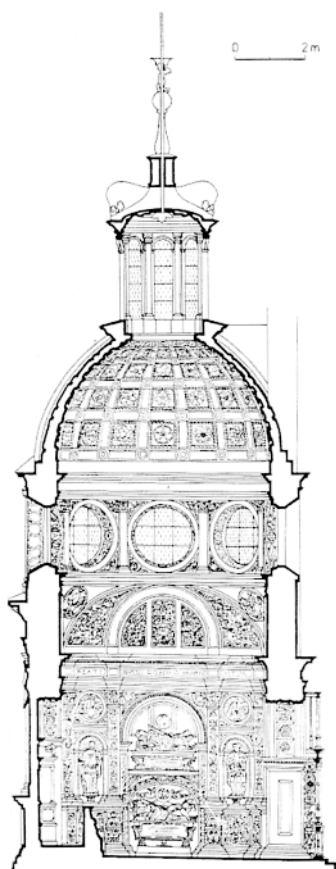
Rys. 12. Ilustracja porównawcza elips według definicji Harwella



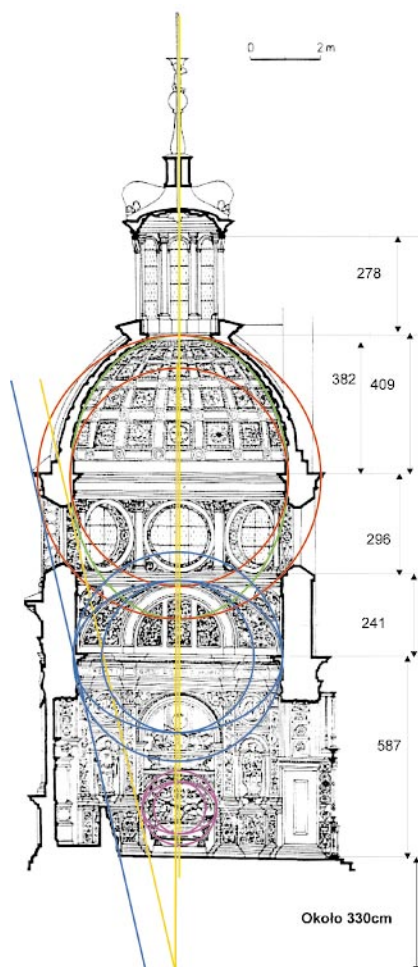
Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15. Przekrój kaplicy – widok ściany zachodniej



Rys. 16. Elementy o kształtach eliptycznych: kopuła, ściana tarczowa i eliptyczna wnętrza Zygmunta Augusta

sy kamienne, to znaczy ich powierzchnie elipsoidalne, a także wytyczać kierunki ścianek klinowych ciosów. Po wykonaniu klinowe ciosy były ustawiane jeden na drugim, z milimetrową dokładnością, tworząc samopodtrzymującą się elipsoidalną kopułę Kaplicy Zygmuntowskiej.

Urządzenie do obróbki ciosów kamiennych przedstawiono na rys. 11. Za pomocą tego urządzenia Berecci mógł wyznaczać powierzchnie: kołową, eliptyczną i dwie powierzchnie płaskie tworzące klin.

Ponadto:

- zdejmował minimalną grubość warstwy kamiennej z przedniej powierzchni obrabianego bloku;
- kolejny blok piaskowca mógł być postawiony na poprzednim – stąd wniosek, że można było sztukować kaseton lub ornament z mniejszych bloków;
- pod własnym ciężarem ciężkie drewniane ramie z dłutem profiluje jednocześnie wycinek o kształcie eliptycznym i w kształcie okręgu (okrąg jest otrzymywany w jednej płaszczyźnie na każdej wysokości);
- obróbkę ciosów kamiennych mógł dokonywać na zewnątrz kaplicy jak również wewnątrz stawianej kopuły, a tym samym dokładnie kontrolować kształt eliptyczny i jej symetrię obrotową.

6. Podsumowanie

Na podstawie dostępnej literatury można przypuszczać, że pionierem użycia geometrii nieeuklidesowej w polskiej architekturze był Bartolomeo Berrecci, architekt i budowniczy Kaplicy Zygmuntowskiej, który w roku 1517 przedstawił projekt grobowca na Wawelu królowi Zygmuntowi I. W 1525 r. zakończono obmurowanie kaplicy, a centralne sklepienie – kopuła, zaprojektowana przez Berrecciego była nowinką ówczesnej architektury, wykorzystującą krzywą inną niż okrąg, a mianowicie elipsę.

Czy Berrecci był pierwszym, czy jednym z pierwszych architektów budujących kopułę o kształcie elipsoidy? Wiele wskazuje na to, że tak, ponieważ pierwsze udokumentowane wzmianki na piśmie mówiące o Guarino Guarinim, budowniczym kopuł eliptycznych, pojawiają się dopiero po roku 1660 [11].

Nie będziemy tu „roztrząsać”, skąd Mistrz Berrecci czerpał wiadomości o elipsie, pozostawimy to historykom sztuki, architektury i matematyki.

Harwell twierdzi, że nie można narysować elipsy za pomocą linijki i cyrkla. Starożytni znali linijkę i cyrkiel, a zamieszczone tu opisy metod jej kreślenia dowodzą, że jest to możliwe. Przyjęty przez Harwella tzw. mimośród, którego wartość wynosi 1,22, opisany zależnością (46) nie przystaje w żaden sposób do krzywej eliptycznej kopuły kaplicy Zygmuntowskiej.

Dla potwierdzenia tych spostrzeżeń wykorzystany zostanie rys. 6 z jego pracy. Z tego rysunku wynika, że średnica okręgu, w który wpisana jest elipsa powinna wynosić około 720 cm. Jest ona równa również długiej osi elipsy. Jeśli tak, to mała oś elipsy wynikająca z jego cytowanej zależności na mimośród, powinna wynosić około $720/1,22 = 590$ cm. Niestety tak nie jest, co zilustrowano na rys. 12. Wymiary elipsy byłyby: $2b = 720$ cm oraz $2a = 590$ cm, co nie zgadza się z wynikami pomiarów odpowiednio o 100 cm i 40 cm.

Dokonajmy jeszcze innego podziału kaplicy, a mianowicie na dwie równe części (rys.13), i spróbujmy ponownie określić wielkość dużej i małej osi elipsy według zależności Harwella. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że duża oś

elipsy wynosi: $2b = 765$ cm, natomiast mała $2a = 627$ cm. Z dokładnością kilku centymetrów można przyjąć, że mała oś elipsy jest w dobrej zgodności z wynikami pomiarów, natomiast duża oś elipsy różni się aż o ponad 50 cm.

A jak jest w rzeczywistości? Na podstawie wykonanych pomiarów oraz wykorzystanych metod określono z dużą dokładnością parametry elipsy przedstawione w tabeli 6. Zilustrowano to również na rys. 14. Parametry tej elipsy są najbardziej przystające do kształtu kopuły Kaplicy Zygmuntowskiej.

Kolejnym dowodem na to, że Berecci znał krzywą stożkową, może być fakt, iż w kaplicy znajdują się inne „obiekty” w kształcie krzywej eliptycznej. Takimi obiektami są eliptyczne „półtarcze”, usytuowane w płaszczyźnie pionowej na ścianach tarczowych kaplicy, o wymiarach: $2a = 600$ cm oraz $b = 220$ cm.

Jednym z najciekawszych wyników, wynikających z pomiarów elips kaplicy, jest wniosek, że wnęka Zygmunta Augusta wykonana przez innego architekta, Padovano, jest również wnęką o kształcie eliptycznym.

Fakt iż obaj budowniczowie znali krzywe stożkowe – elipsę, zilustrowano na rys. 15 i 16. Dwie pierwsze krzywe eliptyczne (kopuła i ściana tarczowa) można wyznaczyć na podstawie znajomości średnic współśrodkowych okręgów. Łącząc linią styczną ich średnice zewnętrzne (linia niebieska na rys. 16), otrzymujemy stożek o kącie wierzchołkowym około 50 stopni. Przez dwa punkty możemy przeprowadzić jedną i tylko jedną prostą, to nic szczególnego. Jednak przeprowadzenie linii prostej przez trzy punkty wymaga ich wzajemnego usytuowania i to bardzo dokładnego. Padovano tak skonstruował wnękę eliptyczną Zygmuntowi Augustowi, że równoległe przesunięcie linii niebieskiej łączy dwa wewnętrzne okręgi elipsy kopuły i ścian tarczowych z zewnętrznym okręgiem wnęki Augusta.

7. Literatura

- [1] http://pl.wikipedia.org/wiki/Hagia_Sofia
- [2] A. Koss, J. Marczak, *Zastosowanie laserów w konserwacji zabytków i dzieł sztuki*, Prace naukowe Międzyuczelnianego Instytutu Konserwacji i Restauracji Dzieł Sztuki, Zeszyt 1, Warszawa, 2005;
- [3] Biuletyn Historii Sztuki, nr 1-2/2005;
- [4] J. Marczak, *Analiza i usuwanie nawarstwień obcych z różnych materiałów metodą ablacji laserowej*, Wydawnictwo Bel Studio, Warszawa, 2004 (rozprawa habilitacyjna);
- [5] Gregory Todd Harwell, *The Sigismund Chapel and Renaissance of Mathematics*, Die Jagiellonen, Nürnberg, 2002;
- [6] Stefan S. Komornicki, *Kaplica Zygmuntowska w Katedrze na Wawelu 1517 – 1533*, Rocznik Krakowski XXIII (Towarzystwo miłośników historii i zabytków Krakowa). Edytor Józef Muczkowski, Kraków 1932, str. 53. patrz nota 2 w pracy [3];
- [7] K. Targosz, *Kaplica Zygmuntowska jako neoplatonicki model świata*, Biuletyn Historii sztuki, Vol XLVII, Nr 2-4, Warszawa 1986;
- [8] *Mała Encyklopedia Powszechna*, Wydawnictwo Naukowe PWN 1998;
- [9] *Matematyka – Wzory, Definicje, Tablice*, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności 1962;
- [10] *Matematyka – poradnik inżyniera*, WNT, Warszawa, 1971;
- [11] H.A. Meek, *Guarino Guariniemi and his Architecture*, New Haven – London, 1988.