

SŁAWOMIR DRAPIK*, ANDRZEJ KOBIELSKI**, JANUSZ PRUSAK***

ANALIZA ZMIENNOŚCI OBCIĄŻEŃ TRAKCYJNYCH W UJĘCIU SZEREGÓW CZASOWYCH

ANALYSIS OF TRACTION LOADING VARIABILITY IN TIME SERIES APPROACH

Streszczenie

W artykule przedstawiono wstępne wyniki badań nad zastosowaniem teorii szeregów czasowych w analizie procesu zmienności obciążeń kolejowych podstacji trakcyjnych. Przedstawiono wyniki pierwszego etapu badań, tzn. identyfikacji modeli rzeczywistych ciągów pomiarowych obciążeń. Wyestymowane modele i dalsze ich badania mogą stanowić podstawę bardziej skutecznego sterowania urządzeniami zabezpieczającymi podstacji trakcyjnych.

Słowa kluczowe: trakcja elektryczna, podstacja trakcyjna, szeregi czasowe

Abstract

The chosen examples of use of time series theory in present article were introduced to analysis of variability of traction loads. Modeling of stochastic processes with using of time series theory consists with three basic stages. The first is identification of researched stochastic process. First stage of research of traction substation loads in present article was introduced of question with use of theory of time series. The estimated models of traction substation loads could be useful in control of protection devices of traction substations.

Keywords: electric traction, traction substation, time series

* Inż. Sławomir Drapik, ZUE S.A. Kraków.

** Dr inż. Andrzej Kobielski, Instytut Pojazdów Szynowych, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

*** Dr inż. Janusz Prusak, Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Obciążenia trakcyjne charakteryzują się bardzo dużą zmiennością. Stanowi to przyczynę istotnych trudności m.in. przy właściwym doborze parametrów urządzeń zasilających, czy też wyborze zakresu działania zabezpieczeń. W pracach [2–5, 7, 8] przedstawiono zastosowanie wybranych metod statystycznych dla poszerzenia opisu tej zmienności. W wyniku tych analiz uzyskano interesujące i wartościowe rezultaty pozwalające na szerszy opis badanej zmienności.

Zastosowanie wspomnianych powyżej klasycznych metod statystycznych jest jednak niewystarczające, bowiem bardzo istotny czynnik następstwa czasowego mierzonych wartości prądów trakcyjnych nie jest w tych metodach uwzględniany, a jest on ważny, np. przy ocenie warunków termicznych pracy urządzeń zasilających w podstawach trakcyjnych.

Konieczność uwzględnienia czasu (następstwa czasowego) w badaniach zmienności obciążeń trakcyjnych wymaga zastosowania innych narzędzi badawczych. Jednym z takich narzędzi wydaje się być teoria szeregów czasowych.

Teoria szeregów czasowych powstała w latach 60. ubiegłego wieku [1], głównie jako narzędzie ekonometryczne. Z biegiem czasu została ona również zastosowana w opisie własności stochastycznych zjawisk fizycznych (np. [6]).

W niniejszym artykule przedstawiono wybrane przykłady zastosowania teorii szeregów czasowych do analizy zmienności obciążeń trakcyjnych, której rezultatem jest wyznaczenie modeli tych obciążeń, mogących stanowić w przyszłości podstawę działań prognostycznych.

Modelowanie procesów stochastycznych z wykorzystaniem teorii szeregów czasowych składa się z trzech podstawowych etapów postępowania:

1. Identyfikacja badanego procesu stochastycznego (szeregu czasowego),
2. Estymacja i diagnostyka parametrów modelu wynikającego z identyfikacji badanego szeregu czasowego,
3. Prognozowanie badanego procesu stochastycznego z użyciem jego modelu pod kątem wybranych zastosowań praktycznych.

W niniejszym artykule przedstawiono w możliwie zwartej postaci zagadnienia pierwszego etapu badania obciążeń podstawy trakcyjnych z zastosowaniem teorii szeregów czasowych.

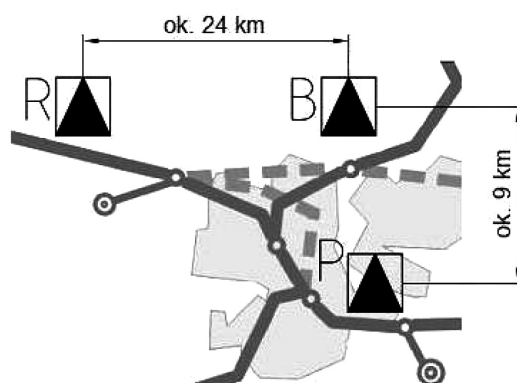
2. Pomiary obciążeń podstawy trakcyjnych

Pomiary zmienności obciążeń kolejowych podstawy trakcyjnych przeprowadzono w trzech obiektach zlokalizowanych w aglomeracji krakowskiej. Rozmieszczenie tychże podstawy przedstawiono na rys. 1.

Pomiary na podstawach trakcyjnych polegały na równoczesnym rejestrowaniu wartości chwilowych napięcia DC i chwilowych wartości prądu obciążenia trakcyjnego DC [8]. W niniejszym opracowaniu poddano analizie jedną z tych wielkości, a mianowicie prąd obciążenia. Pomiary przeprowadzono z częstotliwością 2 kHz [9]. Ze względu na długość pierwotnych ciągów pomiarowych dla ich analizy zostały one poddane modyfikacjom, wg opracowanej przez autorów procedury¹, polegającym na ich dostosowaniu do dostępnych

¹ Ze względu na ograniczone ramy niniejszego artykułu wspomniana powyżej procedura zostanie przedstawiona w przygotowywanej publikacji.

autorom możliwości software'owych i sprzętowych. W wyniku tego uzyskano zbiory z częstotliwością próbkowania 1 Hz. Pozwoliło to na dokonanie analizy wyników pomiarów obciążenia podstacji trakcyjnej m.in. w czasie szczytu porannego.



Rys. 1. Lokalizacja podstacji trakcyjnych [10]

Fig. 1. Location of traction substation [10]

3. Szeregi czasowe – podstawowe określenia i modele

Szereg czasowy jest zbiorem obserwacji następujących po sobie, czynionych w równych odstępach czasu Δt . Szereg czasowy można zatem traktować jako pojedynczą realizację badanego procesu stochastycznego [1].

W teorii szeregów czasowych przyjmuje się dwa istotne założenia, dotyczące ich charakteru:

- 1) rozważa się wyłącznie szeregi dyskretne,
- 2) obserwacji szeregu (co wspomniano powyżej) dokonuje się co pewien ustalony stały odstęp czasu Δt .

Jeśli zatem istnieje n kolejnych wartości takiego szeregu czasowego, to można go opisać poprzez n -wymiarową zmienną losową $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o rozkładzie prawdopodobieństwa $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

W analizie szeregów czasowych wyróżnia się cztery podstawowe typy (klasy) ich modeli. W klasie modeli *stacjonarnych* są to:

1. Model autoregresji rzędu p oznaczany symbolem $AR(p)$ ², opisany równaniem:

$$x_t = c_1 + \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + a_t \quad (1)$$

² W artykule zachowano symbolikę angielską stosowaną w literaturze: model **AR** (*AutoRegressive model* – model autoregresji), model **MA** (*Moving Average model* – model średniej ruchomej), model **ARMA** (*AutoRegressive-Moving Average model* – model autoregresji i średniej ruchomej), model **ARIMA** (*AutoRegressive-Integrated Moving Average model* – scałkowany model autoregresji i średniej ruchomej).

gdzie:

- c_1 – stała,
- φ_n – współczynniki wagowe modelu szeregu czasowego, $n \leq p$,
- a_t – nieskorelowana zmienna losowa o rozkładzie normalnym $(0, \sigma_a^2)$, tzw. biały szum,

2. Model średniej ruchomej rzędu q oznaczany symbolem **MA**(q), opisany równaniem:

$$x_t = c_2 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2)$$

gdzie:

- c_2 – stała,
- θ_n – współczynniki wagowe modelu szeregu czasowego, $n \leq q$,
- a_t – jak w równaniu (1).

3. Model autoregresji i średniej ruchomej rzędu (p, q) oznaczany symbolem **ARMA**(p, q), opisany równaniem

$$x_t = c_3 + \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} + a_t \quad (3)$$

gdzie: c_3 – stała, pozostałe parametry jak w równaniach (1) i (2).

Jak łatwo zauważyć równanie (3) opisujące model autoregresji i średniej ruchomej **ARMA** jest sumą dwóch wcześniejszych (1) i (2).

Zwykle okazuje się w praktyce, że można otrzymać adekwatny opis obserwowanego szeregu czasowego przy pomocy modelu autoregresji **AR**, średniej ruchomej **MA** lub modelu autoregresji i średniej ruchomej **ARMA**, w których rzędy modeli p i q są wg [1] nie większe, a często mniejsze niż 2 ($p, q \leq 2$).

Szeregi czasowe *niestacjonarne* opisuje się przy pomocy scałkowanego modelu autoregresji i średniej ruchomej rzędu (p, d, q) oznaczanego symbolem **ARIMA**(p, d, q). Jest to najogólniejszy typ modelu szeregu czasowego. Zapis i opis modelu **ARIMA** jest złożony i ze względu na ograniczone ramy niniejszego artykułu zostaje pominięty. Model **ARIMA**(p, d, q) jest szczegółowo opisany w monografii [1] a także na dziesiątkach tysięcy stron www.

Parametr d modelu **ARIMA** (ang. *difference operator*) oznacza operator różnicowania. Rząd operatora różnicowania d oznacza d -krotność poddania procesowi różnicowania obserwowanego niestacjonarnego szeregu czasowego x_t by otrzymać d -ty szereg pochodny x_t^d jako szereg stacjonarny.

Warunkiem stacjonarności obserwowanego szeregu czasowego x_t jest spełnienie trzech następujących warunków:

- 1) wartość oczekiwana $E(x_t)$ jest stała (nie zmienia się wraz ze zmianą chwili t),
- 2) wariancja $\text{Var}(x_t)$ jest stała,
- 3) autokorelacja szeregu zależy tylko od różnicy $(t - n)$, gdzie autokorelacja to statystyka opisująca, w jakim stopniu dany wyraz obserwowanego szeregu czasowego x_t zależy od wyrazów poprzedzających go.

Etap identyfikacji obserwowanego szeregu czasowego oparty jest na analizie kształtu funkcji autokorelacji, autokorelacji cząstkowej oraz periodogramu.

Funkcja autokowariancji R_k szeregu czasowego opisana jest następującym równaniem:

$$R_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, K \quad (4)$$

w którym:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t \quad (5)$$

Estymator autokorelacji szeregu czasowego wyznaczany jest zatem z następującego ilorazu

$$r_k = \frac{R_k}{R_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K \quad (6)$$

Oszacowanie autokorelacji cząstkowej dokonuje się na podstawie następujących wzorów rekurencyjnych

$$\Phi_{11} = r_1 \quad (7)$$

$$\Phi_{ll} = \frac{r_l - \sum_{j=1}^{l-1} \Phi_{l-1,j} r_{l-j}}{1 - \sum_{j=1}^{l-1} \Phi_{l-1,j} r_j}, \quad l = 2, 3, \dots, L \quad (8)$$

$$\Phi_{lj} = \Phi_{l-1,j} - \Phi_{ll} \Phi_{l-1,l-j}, \quad j = 1, 2, \dots, l-1 \quad (9)$$

Przyjmuje się ponadto wg [1], że: $n > 50$, $K = \frac{n}{4} \div \frac{n}{5}$, $L \leq K$.

Własności funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej dla poszczególnych klas i rodzajów modeli szeregów czasowych przedstawiono szczegółowo w [1].

Ogólne relacje pomiędzy kształtem funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej obserwowanego szeregu czasowego a klasą modeli szeregów czasowych omówionych pokrótce powyżej przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Funkcje autokorelacji i autokorelacji cząstkowej modelu ARMA

Funkcja	AR(<i>p</i>)	MA(<i>q</i>)	ARMA(<i>p</i> , <i>q</i>)
Autokorelacja ACF	zanika asymptotycznie	urywa się po q opóźnieniach	zanika asymptotycznie
Autokorelacja cząstkowej PACF	urywa się po p opóźnieniach	zanika asymptotycznie	zanika asymptotycznie

Do identyfikacji szeregów czasowych wykorzystuje się ponadto estymatę gęstości widmowej zwaną periodogramem. Periodogramem szeregu czasowego $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ nazywamy funkcję:

$$P(\omega_k) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n x_t e^{-it\omega_k} \right|^2 \quad (10)$$

gdzie:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] \quad (11)$$

Jeżeli ponadto $0 \leq \omega_k < \pi$, to wówczas równanie (10) przyjmuje postać:

$$P(\omega_k) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n x_t e^{-it\omega_k} \right|^2 = \frac{n}{2} (a_k^2 + b_k^2) \quad (12)$$

gdzie a_k i b_k są współczynnikami Fouriera, zaś $k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]$. Periodogram składa się z wielkości opisanych równaniem (12). Wartości współczynników a_k i b_k obliczane są przy użyciu metody szybkiej transformaty Fouriera (FFT).

Podobnie jak obraz funkcji autokorelacji i autokorelacji cząstkowej szeregu czasowego, kształt periodogramu pozwala wnioskować o klasie tego szeregu i innych jego cechach, np. okresowości (sezonowości).

4. Wyniki obliczeń podstawowych funkcji identyfikujących szeregi czasowe

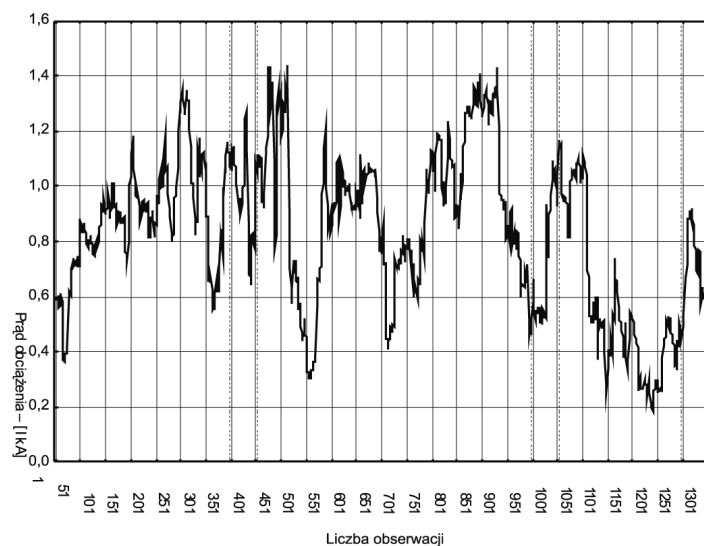
Uwzględniając ramy objętościowe niniejszego artykułu w obliczeniach podstawowych funkcji identyfikujących szeregi czasowe (funkcję autokorelacji, autokorelacji cząstkowej i periodogramu) uwzględniono jedynie dwie spośród trzech podstawic trakcyjnych, w których dokonano pomiarów obciążenia trakcyjnego – podstawic **B** i **R** (rys. 1).

Dla weryfikacji efektywności wykorzystania teorii szeregów czasowych w badaniu zmienności obciążeń podstawic trakcyjnych wykorzystano pomiary tych obciążeń we wskazanych powyżej podstawicach trakcyjnych, których analizę statystyczną przedstawiono w pracach [4, 8].

Wynikiem tych analiz było wyznaczenie typów rozkładów obciążeń podstawic trakcyjnych **B** i **R** jako rozkładów logarytmiczno-normalnych. Wyznaczono ponadto wiele innych parametrów statystycznych i charakterystyk opisujących własności badanych obciążeń trakcyjnych.

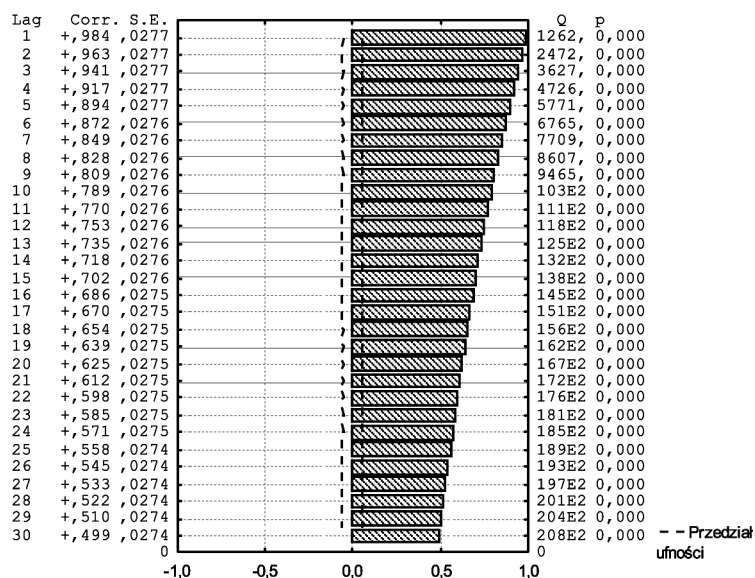
Wyniki wcześniejszych prac autorów nie uwzględniały jednakże czynnika czasu, który z punktu widzenia bezpieczeństwa pracy podstawic trakcyjnych i całego systemu zasilania trakcji elektrycznej jest niezmiernie istotny.

4.1. Obliczenia podstawowych funkcji identyfikujących obciążenie podstacji trakcyjnej **B**



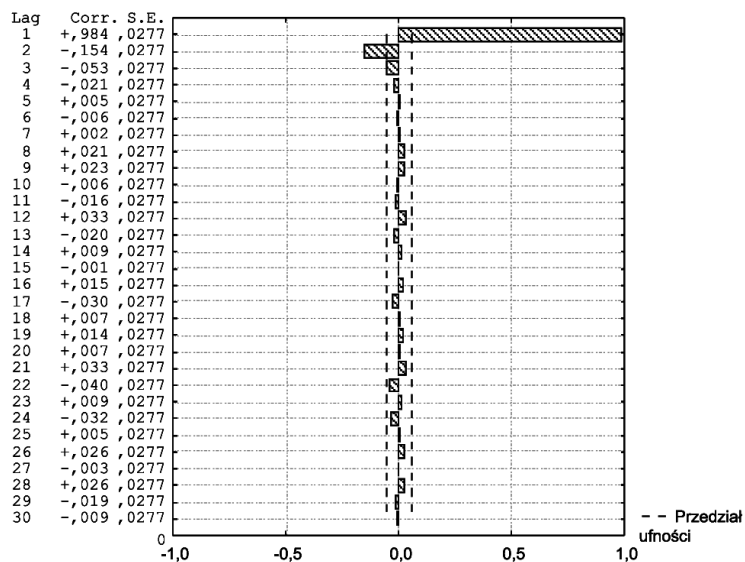
Rys. 2. Obciążenie podstacji trakcyjnej **B** (szczyt poranny)

Fig. 2. Load of traction substation **B** (morning rush hours)



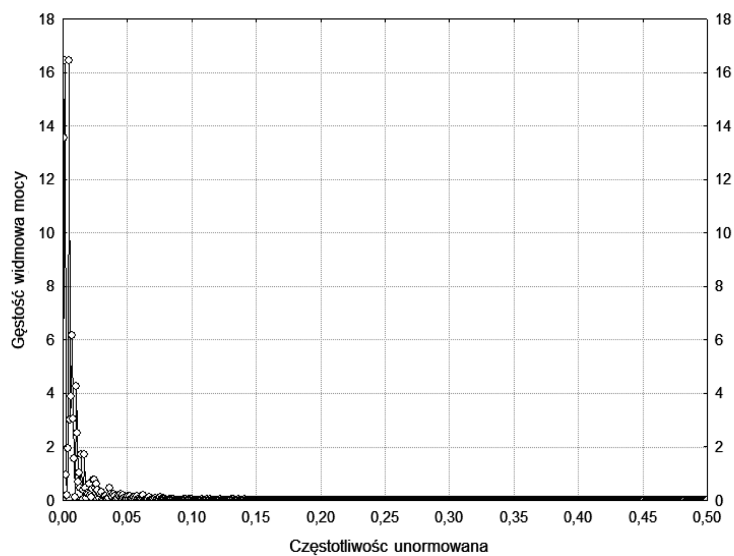
Rys. 3. Funkcja autokorelacji obciążenia podstacji trakcyjnej **B** (szczyt poranny)

Fig. 3. Autocorrelation function of traction substation load **B** (morning rush hours)



Rys. 4. Funkcja autokorelacji cząstkowej obciążenia podstacji trakcyjnej **B** (szczyt poranny)

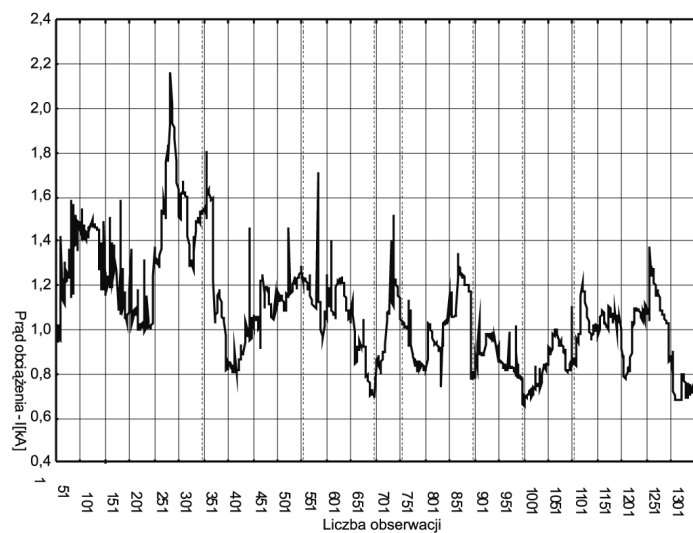
Fig. 4. Partial autocorrelation function of traction substation load **B** (morning rush hours)



Rys. 5. Periodogram obciążenia podstacji trakcyjnej **B** (szczyt poranny)

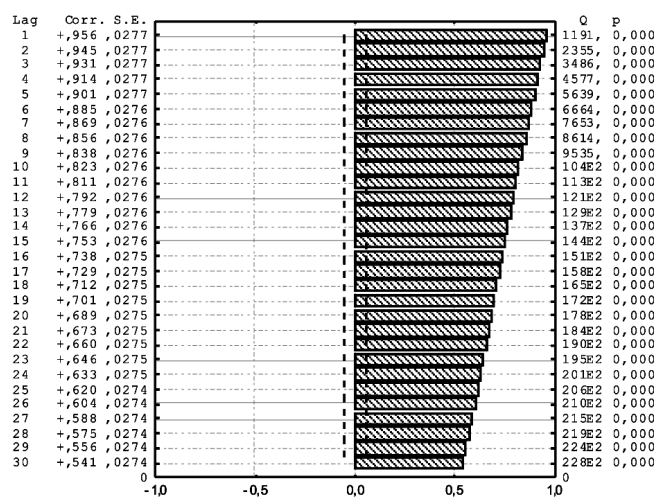
Fig. 5. Periodogram of traction substation load **B** (morning rush hours)

4.2. Obliczenia podstawowych funkcji identyfikujących obciążenie podstacji trakcyjnej **R**



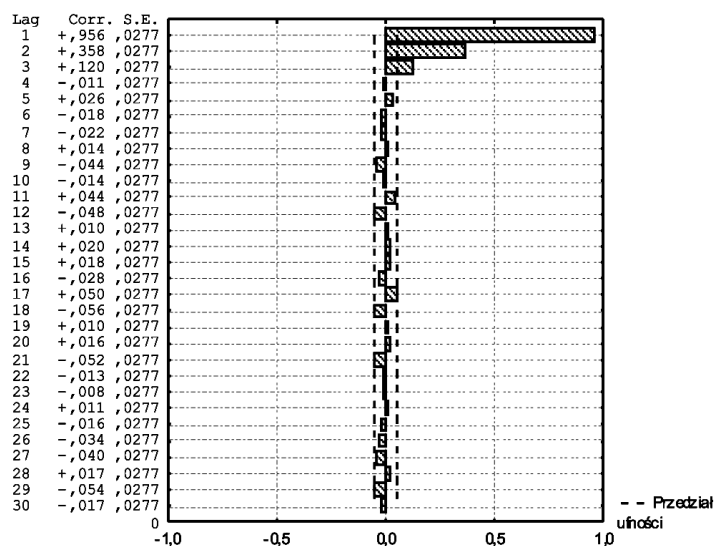
Rys. 6. Obciążenie podstacji trakcyjnej **R** (szczyt poranny)

Fig. 6. Load of traction substation **R** (morning rush hours)



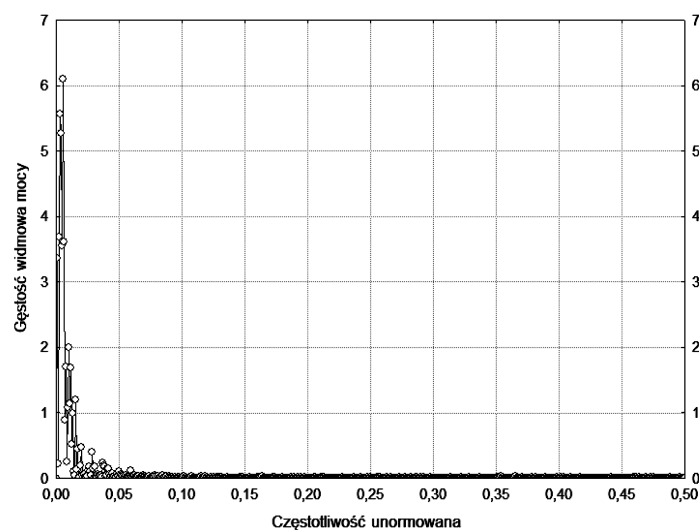
Rys. 7. Funkcja autokorelacji obciążenia podstacji trakcyjnej **R** (szczyt poranny)

Fig. 7. Autocorrelation function of traction substation load **R** (morning rush hours)



Rys. 8. Funkcja autokorelacji cząstkowej obciążenia podstacji trakcyjnej **R** (szczyt poranny)

Fig. 8. Partial autocorrelation function of traction substation load **R** (morning rush hours)



Rys. 9. Periodogram obciążenia podstacji trakcyjnej **R** (szczyt poranny)

Fig. 9. Periodogram of traction substation load **R** (morning rush hours)

Analiza kształtu wykresów autokorelacji i autokorelacji cząstkowej przebiegu obciążenia podstacji trakcyjnej **B** (rys. 3 i 4) wskazuje zgodnie z tab. 1 na autoregresyjny charakter procesu. Hipotezę tą potwierdza kształt periodogramu (rys. 5), bowiem silne skupienie jego

prążków w bezpośredniej bliskości zera także wskazuje na autoregresyjny charakter badanego szeregu.

Przyjmując, że badany przebieg jest opisany modelem autoregresji **AR**, to jego rząd p wynika z kształtu funkcji autokorelacji cząstkowej. Poza obszarem wyznaczonym przez granicę ufności (95%) znajdują się dwa prążki odpowiadające opóźnieniom 1 oraz 2. Zatem można przyjąć, że badany przebieg obciążenia trakcyjnego podstacji **B** można opisać przy pomocy modelu autoregresji drugiego rzędu **AR(2)**.

Dla porównania, analogiczną procedurę przeprowadzono w stosunku do obciążenia podstacji trakcyjnej **R** (rys. 7–9).

Przeprowadzając, podobnie jak w przypadku podstacji **B**, analizę kształtu otrzymanych funkcji autokorelacji, autokorelacji cząstkowej oraz periodogramu uznano, że badany przebieg obciążenia trakcyjnego podstacji **R** można także opisać modelem autoregresji **AR**.

Poza obszarem wyznaczonym przez granicę ufności znajdują się trzy prążki odpowiadające opóźnieniom 1, 2 oraz 3. Zatem można przyjąć, że badany przebieg obciążenia trakcyjnego podstacji **B** można opisać przy pomocy modelu autoregresji trzeciego rzędu **AR(3)**.

Warto dodać, że kolejne opóźnienia znajdujące się w obszarze zawartym pomiędzy granicami ufności (linie kreskowe) traktowane są jako korelacje i autokorelacje cząstkowe „białego szumu”.

Identyfikacja badanych przebiegów obciążeń trakcyjnych podstacji trakcyjnych **B** i **R** jest pierwszym etapem badań.

Kolejnym etapem jest estymacja wartości parametrów dla przyjętych modeli obciążeń. Zgodnie jednak z założeniem poczynionym we wstępie niniejszego artykułu zagadnienie to przekracza jego ramy.

5. Wnioski

Jak wynika z powyższych wstępnych analiz, zastosowanie teorii szeregów czasowych może stanowić efektywną metodę badania procesów stochastycznych obciążeń trakcyjnych w ich modelowaniu i tworzeniu modeli prognostycznych dla potrzeb praktycznych.

Przedstawione w artykule wybrane przebiegi obciążeń zostały opisane w postaci modeli najprostszych **AR(2)** i **AR(3)** i estymacja ich parametrów jest stosunkowo prosta. W przypadku modeli typu **ARMA** lub **ARIMA** jest znacznie bardziej złożona ze względu na zwiększenie liczby parametrów modeli. Tym niemniej, korzystając z ich symboliki, zidentyfikowane powyżej modele typu **AR** można np. zapisać jako: **AR(2)** tożsamy **ARMA(2,0)** tożsamy **ARIMA(2,0,0)**.

Zastosowanie powyżej przedstawionej metody analizy zmienności obciążeń podstacji trakcyjnych pozwala dysponować większą liczbą wskaźników ich oceny, niż przy użyciu tylko wskaźników typowo elektrycznych. Interpretacja uzyskanych wyników oceny zmienności obciążeń kolejowych podstacji trakcyjnych, będzie możliwa po uwzględnieniu m.in. rzeczywistych rozkładów jazd, typów pociągów i profilów tras.

Kontynuacja badań w tej dziedzinie stwarza możliwość bardziej precyzyjnej oceny (prognozy) zmienności obciążeń trakcyjnych opartych na obiektywnych metodach matematycznych uwzględniających czynnik następstwa czasowego tych obciążeń.

Literatura

- [1] Box G.E.P., Jenkins G.M., *Analiza szeregów czasowych. Prognozowanie i sterowanie*, PWN, Warszawa 1983.
- [2] Buchta K., Szelaąg A., *Zastosowanie metod statystyczno-probabilistycznych do oceny napięcia w sieciach trakcyjnych 3 kV DC*, MET '2005, Międzynarodowa Konferencja Naukowa „Nowoczesna trakcja elektryczna w zintegrowanej Europie XXI wieku”, Warszawa 2005.
- [3] Czuchra W., Kobielski A., Prusak J., *Zmienność napięcia w tramwajowej sieci trakcyjnej – próba oceny metodą statystyczną*, SEMTRAK'2004, XI Ogólnopolska Konferencja Naukowa Trakcji Elektrycznej i III Szkoła Kompatybilności Elektromagnetycznej, Kraków–Zakopane 2004.
- [4] Drapik S., Kobielski A., Prusak J., *Selected issues of traction substation load variability*. [w] *Modern Electric Traction. Power Supply* (ed. K. Karwowski, A. Szelaąg), Chapter 5, Gdańsk University of Technology, Gdańsk 2009.
- [5] Kałuża E., Sikora A., *Ocena dokładności opracowanej metody prognozowania obciążeń podstacji trakcyjnych*. MET '2005, Międzynarodowa Konferencja Naukowa „Nowoczesna trakcja elektryczna w zintegrowanej Europie XXI wieku”, Warszawa 2005.
- [6] Kobielski A., *Zastosowanie teorii szeregów czasowych w modelowaniu układu koło–szyna*, Modelowanie Matematyczne w Transporcie, Monografia 47, tom II, Politechnika Krakowska, Kraków 1986.
- [7] Kobielski A., Popczyk M., Prusak J., *Analiza statystyczna prądów i napięć na wyjściu tramwajowej podstacji trakcyjnej w aspekcie ochrony przeciwzwarceniowej sieci trakcyjnej DC*, ELSAF'2007, XVI Konferencja Naukowo-Techniczna „Bezpieczeństwo elektryczne”, Szklarska Poręba 2007.
- [8] Kobielski A., Popczyk M., Prusak J., *Ocena procedur pomiarowych na przykładzie zmienności kolejowych obciążeń trakcyjnych*, SEMTRAK 2008, XIII Ogólnopolska Konferencja Naukowa Trakcji Elektrycznej i V Szkoła Kompatybilności Elektromagnetycznej, Zakopane 2008.
- [9] EN 50163:2004, Railway applications. Supply voltages of traction systems.
- [10] www.malopolskie.pl