

ANDRZEJ PAKUŁA*

MODELOWANIE GEOMETRII ZAZĘBIENIA PRZEKŁADNI
PASOWYCH ZĘBATYCHMODELING THE MESHING GEOMETRY
OF THE TOOTHED BELT DRIVES

Streszczenie

W artykule przedstawiono model geometryczny zazębienia przekładni pasowych zębatych. Na podstawie modelu napisano program symulujący. Wykorzystano środowisko Mathematica. Przeprowadzono symulacje współpracy zazębienia bez obciążenia i napięcia wstępnego. Symulacje przeprowadzono dla zarysu HTD i dla porównania dla zarysu L oraz zazębienia mieszane koła HTD z pasem L . Największe obciążenie boku zęba i zarazem największe zużycie występuje w miejscach największej interferencji (nałożenia zarysów) zęba pasa i koła. Wyniki symulacji zgadzają się ze zużyciem pasów po przebiegu nominalnym dla zarysów HTD i L . Dla pary mieszanej wyniki symulacji pokazują, że interferencja zarysów jest zastanawiająco mała. Wynik tej symulacji może być inspiracją do przeprowadzenia badań stanowiskowych.

Słowa kluczowe: model geometryczny, zazębienia przekładni pasowych zębatych

Abstract

Geometric model of the toothed belt drives meshing is presented. On the basis of the model simulation program was written. Mathematica environment was used. Simulations of the meshing cooperation have been run without load and preload. Simulations were performed for the contour HTD and for comparison to the contour L , and mixed couple-wheel HTD meshing with the belt L . The highest load of the tooth side and the largest wear occurs in places the greatest interference (contour imposing) of the tooth belt and wheels. The simulation results agree well with the belt wear on the course for HTD and L contours. For mixed couples simulation results show that the interference contours is surprisingly small. The result of this simulation can be an inspiration for the test stand.

Keywords: geometric model, toothed belt drives meshing

* Dr inż. Andrzej Pakuła, Instytut Pojazdów Samochodowych i Silników Spalinowych, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

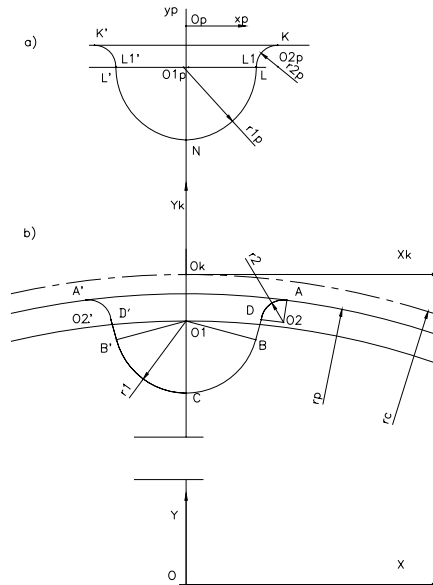
1. Geometria ząbienia przekładni pasowej zębatej

W literaturze światowej jest wiele opracowań dotyczących ząbienia w przekładni pasowej zębatej np. [1–3]. Opracowania te są bardzo szczegółowe, z uwzględnieniem odkształceń zębów pasa i samego pasa (tzw. klawiszowanie). Modele te narzucają wprowadzenie bardzo wielu danych materiałowych i wytrzymałościowych, często wymagających zbudowania specjalnych przyrządów w celu ich wyznaczenia dla danego pasa. Brak jednak prostej i szybkiej metody oceny współpracy różnych zarysów ząbienia tylko na podstawie danych geometrycznych.

Celem pracy było opracowanie prostego modelu geometrycznego pozwalającego na ocenę współpracy różnych zarysów ząbienia tylko na podstawie danych geometrycznych, biorąc za kryterium interferencję zarysów zęba pasa i współpracującego z nim wrębu koła. Ze względu na trwałość przekładni pasowej zarysy profili zęba pasa zębatego i wrębu koła pasowego, powinny być tak zaprojektowane, aby podczas współpracy następowało ich odtafczanie. Przenikanie się profili zawsze związane jest z odkształceniami normalnymi i stycznymi do wrębu koła, przede wszystkim zębca pasa. Od wielkości tych odkształceń, zmiennych w czasie, uzależniona jest trwałość przekładni pasowej zębatej.

2. Eksperyment numeryczny dla zarysu HTD

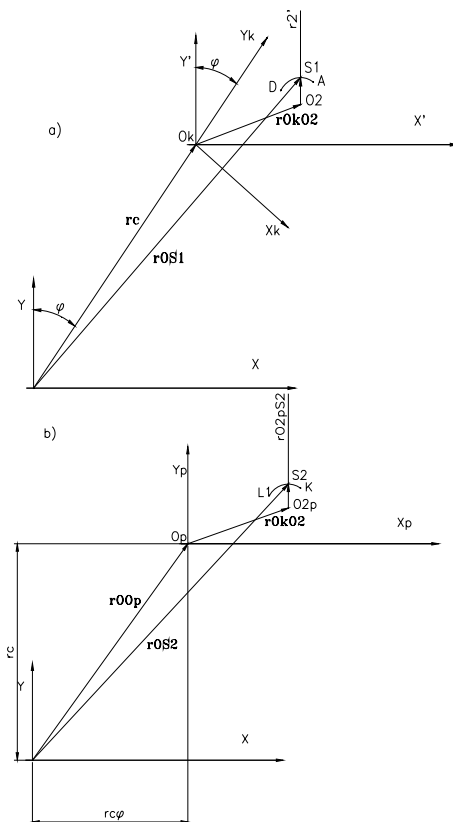
Na rysunku 1 pokazane są profile zęba pasa zębatego i wrębu koła pasowego zębatego z nim współpracującego. Zarys zęba pasa składa się z odcinków okręgów o promieniach r_{1p} , r_{2p} i odcinka prostej LL_1 . Podobnie zarys wrębu koła utworzony jest z odcinków okręgów o promieniach r_1 i r_2 , połączonych w krańcowych punktach B, D odcinkiem prostej. Na rys. 1b zaznaczono promień podziałowy r_c i zewnętrzny r_p koła.



Rys. 1. Profile: a) zęba pasa zębatego, b) wrębu koła pasowego zębatego

Fig. 1. Profile: a) a tooth of the toothed belt, b) notch toothed pulley

Ruch profili rozpatrywany jest w układzie odniesienia, którego początek O położony jest na osi obrotu koła. Zarysy profili zęba pasa i wrębu koła określone są odpowiednio w lokalnych układach współrzędnych $\{O_p\}$, $\{O_k\}$. Wzajemne położenie w przypadku ogólnym pokazano na rys. 2a i b.



Rys. 2. Położenie lokalnych układów odniesienia $\{O_p\}$, $\{O_k\}$: a) wrębu koła, b) zęba pasa

Fig. 2. Location of local reference systems $\{O_p\}$, $\{O_k\}$: a) a notch-wheel, b) belt tooth

Współrzędne punktu S_1 należącego do odcinka AD zarysu wrębu koła wyznacza wektor wodzący:

$$\overline{r_{OS_1}} = \overline{r_c} + A_{OO_k}(\overline{r_{O_k O_2}} + \overline{r_2}) \quad (1)$$

Gdzie A_{OO_k} jest macierzą transformacji z układu $\{O_k\}$ do układu $\{O\}$

$$A_{OO_k} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

Współrzędne punktu S_2 należącego do odcinka KL_1 zarysu zęba pasa można określić za pomocą wektora wodzącego:

$$\overline{r_{OS_2}} = \overline{r_{OO_p}} + \overline{r_{O_p O_2 p}} + \overline{r_{O_2 p}} \quad (3)$$

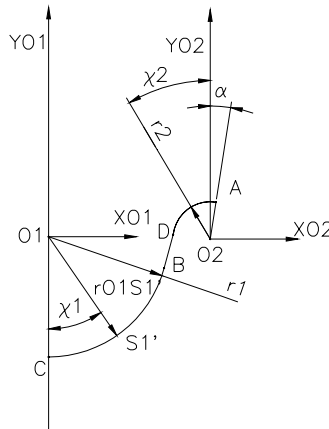
Wykorzystując rysunek pomocniczy z poszczególnymi odcinkami prawej strony zarysu wrębu koła, można wyznaczyć współrzędne punktów S_1 i S_1' w układzie $\{O\}$.

$$-\alpha < \chi_2 \leq \chi_{2\max} \quad \chi_{1\max} \leq \chi_1 \leq 0$$

Współrzędna punktu S_1 należącego do odcinka AD :

$$\begin{aligned} x_{O_2 S_1} &= -r_2 \sin \chi_2 & x_{O_2 S_1} &= -r_2 \sin \chi_2 \\ y_{O_2 S_1} &= r_2 \cos \chi_2 & y_{O_2 S_1} &= r_2 \cos \chi_2 \end{aligned}$$

Punkty B, D połączone są odcinkiem prostej.



Rys. 3. Punkty S_1 i S_1' należące do prawej strony zarysu wrębu koła

Fig. 3. Points S_1 and S_1' belonging to the right side of the notch profile wheels

Położenia punktów S_1 i S_1' (rys. 3) w układzie $\{O\}$ zależne są od kąta obrotu koła φ i odpowiednio kątów χ_1 i χ_2 .

Zgodnie z równaniem (1) odnoszącym się do punktu S_1 współrzędne wektora wodzącego $\overline{r_{OS_1}}$ można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} x_{OS_1} \\ y_{OS_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_c \cdot \sin \varphi \\ r_c \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{O_k O_2} \\ y_{O_k O_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{O_2 S_1} \\ y_{O_2 S_1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

W analogiczny sposób wyznaczamy współrzędne wektora wodzącego $\overline{r_{OS_1'}}$ w układzie $\{O\}$:

$$\begin{bmatrix} x_{OS'_1} \\ y_{OS'_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_c \cdot \sin \varphi \\ r_c \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{O_k O_1} \\ y_{O_k O_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{O_1 S'_1} \\ y_{O_1 S'_1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Wykorzystując równania (4) i (5) można obliczyć współrzędne punktów B i D w układzie $\{O\}$ oraz równanie prostej, do której należy punkt S_3 .

$$y_{S_3} - y_{B.O} = \frac{y_{D.O} - y_{B.O}}{x_{D.O} - x_{B.O}} \cdot (x_{S_3} - x_{B.O}) \quad (6)$$

Gdzie: indeksy $B, D, D.O$ oznaczają, że współrzędne punktów B, D określone są w układzie odniesienia $\{O\}$.

W obliczeniach numerycznych wygodnie jest posługiwać się równaniami parametrycznymi:

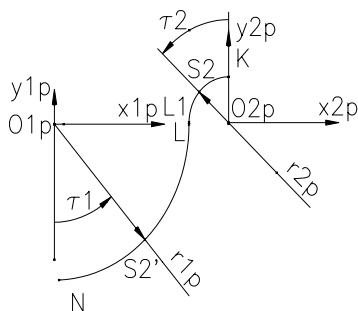
$$x_{S_3} = x_{B.O} + \frac{t}{y_{D.O} - y_{B.O}} \quad (7)$$

$$y_{S_3} = y_{B.O} + \frac{t}{x_{D.O} - x_{B.O}} \quad (8)$$

$$0 \leq t \leq (y_{D.O} - y_{B.O}) \cdot (x_{D.O} - x_{B.O}) \quad (9)$$

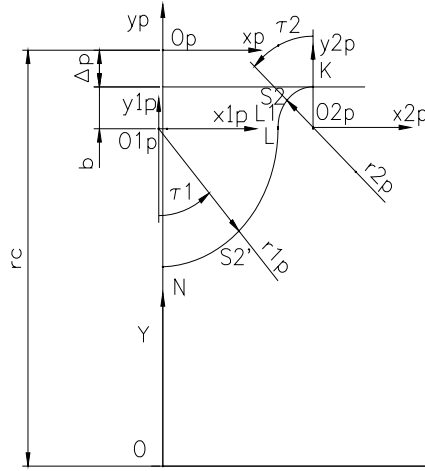
Na rys. 4. zaznaczono charakterystyczne punkty należące do zarysu profilu zęba pasa.

$$\begin{aligned} x_{S_2} &= -r_{2p} \sin \tau_2 & x_{S'_2} &= r_{1p} \sin \tau_1 \\ y_{S_2} &= r_{2p} \cos \tau_2 & y_{S'_2} &= -r_{1p} \cos \tau_1 \end{aligned}$$



Rys. 4. Zarys prawostronny profilu zęba pasa z punktami charakterystycznymi S_2 i S'_2
 Fig. 4. Outline of the right-side of the belt tooth profile with characteristic points S_2 i S'_2

Położenie układów współrzędnych $\{O_{1p}\}$, $\{O_{2p}\}$, $\{O_p\}$ i $\{O\}$ pokazano na rys. 5.



Rys. 5. Położenie układów współrzędnych dotyczące zarysu profilu zęba pasa

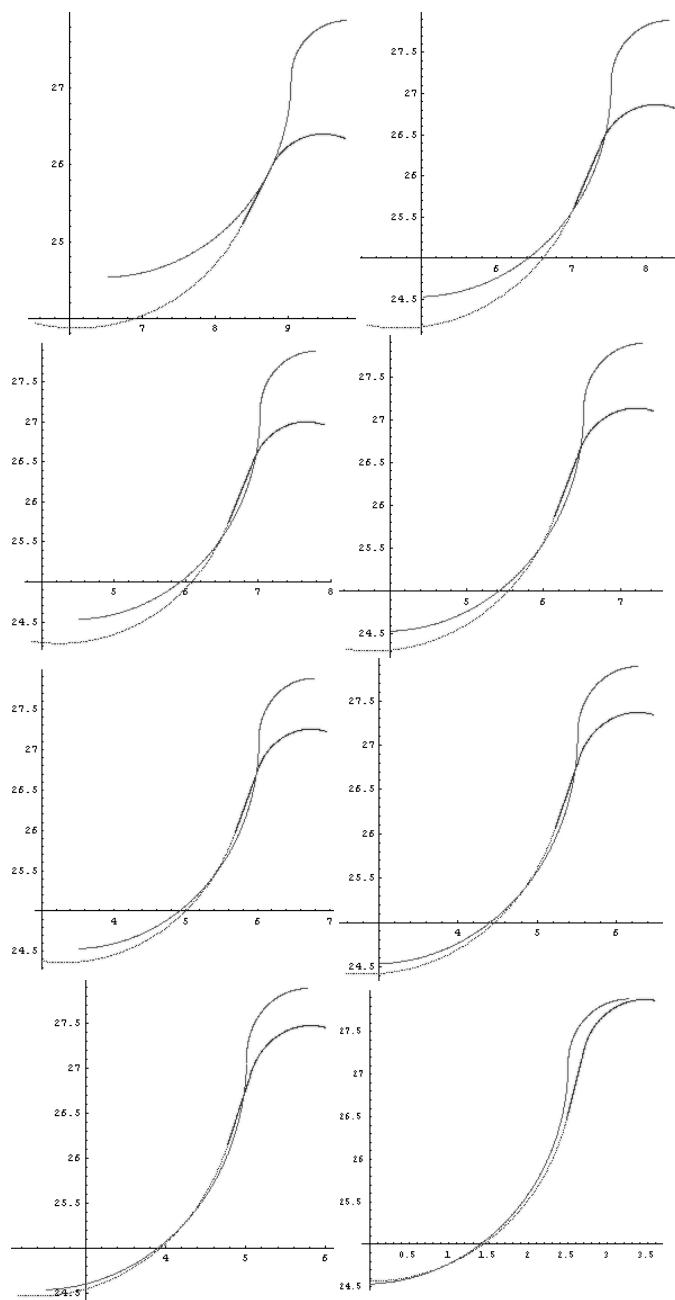
Fig. 5. Location of coordinate systems to the outline of belt tooth profile

Na podstawie rys. 4 i rys. 5 obliczono współrzędne punktów S_2 i S_2' w układzie odniesienia $\{O\}$.

$$\begin{aligned} x_{S_2,O} &= r_c \cdot \varphi + r_{1p} + r_{2p} - a - r_{2p} \sin \tau_2 \\ y_{S_2,O} &= r_c - (\Delta p + b) - r_{2p} \cos \tau_2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x_{S_2',O} &= r_c \cdot \varphi - a - r_{1p} \sin \tau_1 \\ y_{S_2',O} &= r_c - (\Delta p + b) - r_{1p} \cos \tau_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Na podstawie powyższych rozważań ułożony został program w środowisku Mathematica i przeprowadzono symulację, której wyniki zamieszczono na rys. 6. Jest to symulacja współpracy bez obciążenia i napięcia wstępnego.



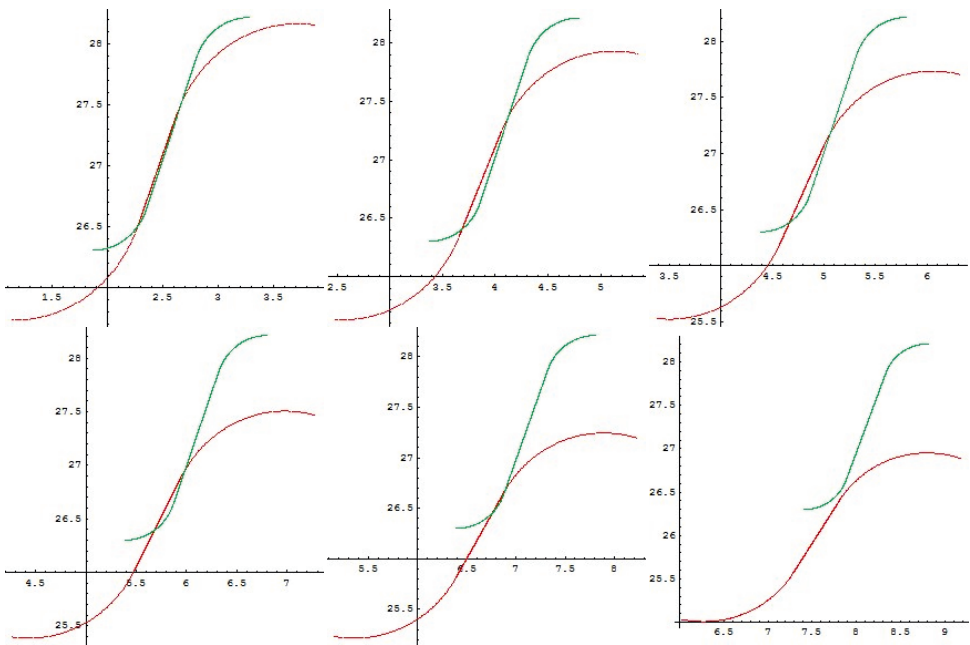
Rys. 6. Wyniki symulacji zazębienia przekładni pasowej zębatej HTD. Podziałka osi x, y w milimetrach

Fig. 6. The meshing simulation results for HTD toothed belt drive. X, y axes pitch in millimeters

Największe obciążenie boku zęba i zarazem największe zużycie występuje w miejscach największej interferencji (nałożenia zarysów) zęba pasa i koła. Wyniki symulacji dla zarysu HTD dobrze zgadzają się ze zużyciem pasów po przebiegu nominalnym. Współpraca zazębienia ma charakter przetaczania się zęba pasa po wrębie koła.

3. Eksperyment numeryczny dla zarysu HTD

Wykorzystując metodę i program, wprowadzono dane zarysu typowego pasa rozrządu typu L i również w celu porównania z HTD przeprowadzono symulację przebiegu zazębienia. Wyniki przedstawiono na rys. 7.



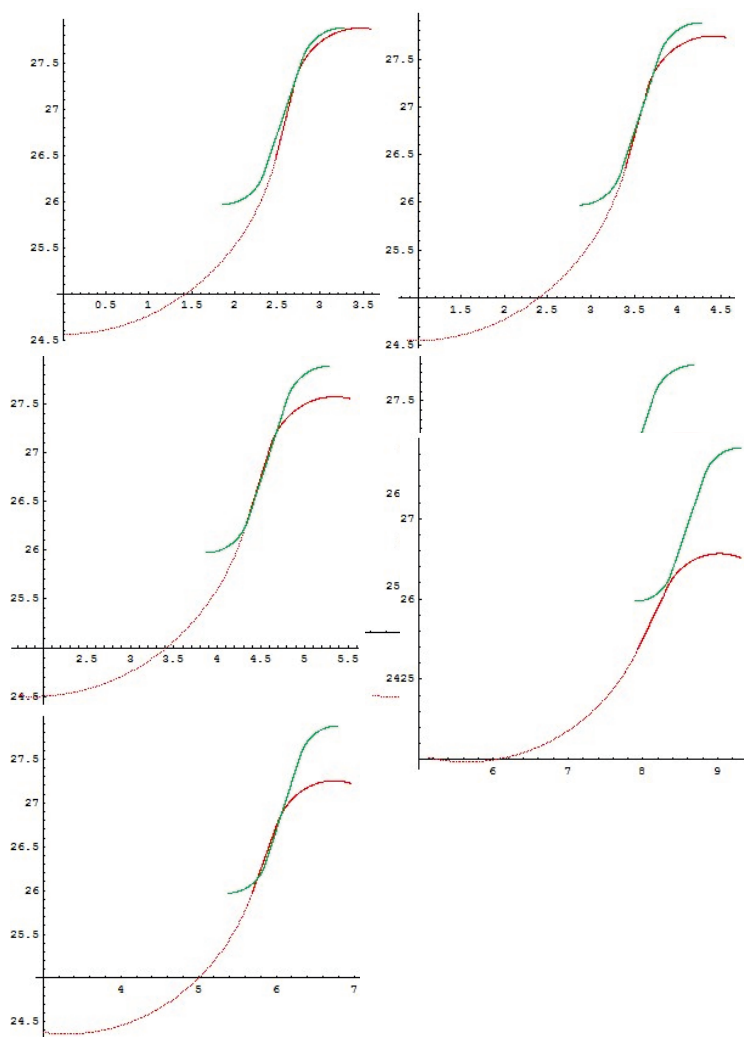
Rys. 7. Wyniki symulacji zazębienia przekładni pasowej zębatej L . Podziałka osi x, y w milimetrach

Fig. 7. The meshing simulation results for L toothed belt drive. X, y axes pitch in millimeters

Wyniki symulacji dla zarysu L zgadzają się ze zużyciem pasów po przebiegu nominalnym, tzn. obszary zużycia pokrywają się z obszarami największej interferencji zarysów pasa i koła. Współpraca zazębienia ma charakter ślizgania się zęba pasa po wrębie koła.

4. Eksperyment numeryczny dla zarysu HTD i L

Wykorzystując metodę i program, postanowiono sprawdzić pogłoskę krążącą w środowisku mechaników samochodowych, że do przekładni z kołami o zarysie HTD można założyć pas o zarysie L . Wprowadzono dane zarysu typowego pasa rozrządu typu L i koła o zarysie HTD. Wyniki symulacji przebiegu zazębienia przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Wyniki symulacji zążeń przekładni pasowej zębatej mieszanej HTD z pasem L . Podziałka osi pomocniczych x, y w milimetrach

Fig. 8. The meshing simulation results for mixed toothed belt drive HTD with L belt. Secondary x, y axes pitch in millimeters

Symulacja zążeń przekładni pasowej zębatej mieszanej HTD z pasem L pokazała, że istotnie wydaje się możliwa taka współpraca, a interferencja zarysów jest mała, co powinno się przełożyć na małe obciążenia boku zęba i co za tym idzie jego małe zużycie. Współpraca zążeń ma charakter ślizgania się zęba pasa po wrębie koła, tak jak w przypadku przekładni o zążeniu L . Widać wyraźnie, że wykorzystywana jest tylko część wysokości zarysu koła, czyli przenoszone siły będą znacząco mniejsze niż w przypadku pasa HTD. Wynik tej symulacji wskazuje na celowość przeprowadzenia badań stanowiskowych.

5. Wnioski

Największe obciążenie boku zęba i zarazem największe zużycie występuje w miejscach największej interferencji (nałożenia zarysów) zęba pasa i koła. Wyniki symulacji dla zarysów HTD i L dobrze zgadzają się ze zużyciem pasów po przebiegu nominalnym, więc wydaje się, że cel pracy został osiągnięty. Zużycie dla pary mieszanej trzeba dopiero sprawdzić doświadczalnie. Dla zarysu L interferencja zarysów jest znacząco większa niż w przypadku zarysu HTD. Wyniki symulacji zazębienia przekładni pasowej zębatej mieszanej HTD z pasem L pokazują, że istotnie interferencja zarysów jest zastanawiająco mała. Oczywiście wykorzystywana jest tylko część wysokości zarysu koła, czyli przenoszone siły będą znacząco mniejsze niż w przypadku pasa HTD. Wynik tej symulacji może być inspiracją do przeprowadzenia badań stanowiskowych.

Literatura

- [1] K o y a m T. et al., *A study of Strength of Tooth Belt*, 2nd to 6th report, JSME, Vol. 22, No. 169, 1979, 982-987.
- [2] N a j i M. et al., *Toothed Belt-Load Distribution*, Trans. ASME J of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, Vol. 105, 1983, 339-347.
- [3] K a g o t a n i M. et al., *A study on Transmission Characteristics of Tooth Belt Drives*, JSME, Vol. 26, No. 211, 1983, 136-139.
- [4] C h i l d s T.H.C., D a l g a r n o K.W., H o j j a t i M.H., T u t t M.J., D a y A.J., *A The meshing of timing belt teeth in pulley grooves*, Journal Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, Vol. 211, Number 3/1997, 1997, 205-218.