

PIOTR KRZEMIEN^{*}, ANDRZEJ GAJEK^{**}WPŁYW POSTACI FUNKCJI JAKOŚCI ORAZ
WAG KRYTERIÓW CZĄSTKOWYCH NA WYNIKI
OPTIMALIZACJI ZDERZENIA METODĄ GENETYCZNĄTHE INFLUENCE OF THE SHAPE OF THE QUALITY
FUNCTION AND WEIGHTS OF PARTIAL CRITERIA'S ON
THE GENETIC ALGORITHM OPTIMIZATION RESULTS

Streszczenie

W artykule przedstawiono analizę metody optymalizacyjnej zderzenia pojazdów, opartej na algorytmie genetycznym. Skoncentrowano się na analizie funkcji jakości w optymalizacji wielokryterialnej. Funkcja jakości została opracowana dla kilku kryteriów uwzględnianych jednocześnie, z zastosowaniem metody ważonego kryterium zbiorczego. W celu dokonania analizy wykorzystano program do rekonstrukcji wypadków drogowych. Funkcja jakości w programie optymalizacyjnym umożliwia zadeklarowanie wag poszczególnych kryteriów, według których przebiega optymalizacja. Kryteriami tymi są usytuowania pośrednie i końcowe środków mas pojazdów, ich usytuowanie kątowe oraz parametr EES. W artykule przeanalizowano wpływ wag poszczególnych kryteriów na wartości prędkości przedzderzeniowych i wartość funkcji jakości. Przedstawiono różne warianty obliczeń na przykładzie rzeczywistego testu zderzeniowego. Wykazano ryzyko uzyskania nieprawidłowych fizycznie obliczeń w przypadku nieumiejętnego dobierania wag poszczególnych kryteriów, pomimo uzyskania niedużej wartości błędu całkowitego. Błąd ten, będący wartością funkcji jakości, nie zawsze jest miarą fizycznej poprawności obliczeń symulacyjnych.

Słowa kluczowe: optymalizacja, funkcja jakości, funkcja celu, wagi, metoda ważonego kryterium zbiorczego, obliczenia symulacyjne, zderzenia pojazdów, wypadki drogowe, optymalizacja wielokryterialna

Abstract

This paper presents an analysis of vehicle collisions optimization method based on genetic algorithm. Focused on the analysis of the quality function in a multi-criteria optimization. Quality function was developed for several of the criteria taken into account simultaneously, using the method of the weighted cumulative criterion. In order to analyze the quality function the program for accident reconstruction was used. In optimization tool the function of quality allows to declare the weights of the criteria against which the optimization runs. These criteria were the location of the vehicles gravity central in their intermediate and final positions, their yaw angle and parameter EES. The paper was analyzed the influence of the weights of the criteria for the initial speed and value of the function quality. The different variants of calculations on the example of the actual crash test were presented. Was shown the risk of wrong physically results of calculation for improper matching the weights of the criteria, in spite of the small values of total error were obtained. The total error, which is the value of quality function is not always a measure of the physical correctness of the optimization calculations.

Keywords: optimization, the quality function, the objective function, weight, method of weighted cumulative criterion, simulation calculations, collision of vehicles, road accidents, multi-criteria optimization.

^{*} Mgr inż. Piotr Krzemień, Zakład Badania Wypadków Drogowych, Instytut Ekspertyz Sądowych.

^{**} Dr hab. inż. Andrzej Gajek, Instytut Pojazdów Samochodowych i Silników Spalinowych, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Metody optymalizacji stosowane są do rozwiązywania różnorodnych zagadnień technicznych. Zadaniem optymalizacji jest znalezienie najlepszego rozwiązania problemu ze względu na kryteria zdefiniowane przez badacza. Kryteria te nie zawsze są zgodne, a niejednokrotnie skomplikowany charakter funkcji matematycznej opisującej dane zjawisko powoduje, że istnieje wiele rozwiązań tzw. minimów lokalnych gorszych od rozwiązania globalnego. Metody obliczania zderzeń pojazdów stosowane w rekonstrukcji wypadków drogowych mogą polegać na przeprowadzeniu obliczeń rekonstrukcyjnych lub na przeprowadzeniu obliczeń symulacyjnych, gdzie celem nadrzędnym jest poznanie początkowych prędkości pojazdów. W niniejszym artykule omówiona zostanie optymalizacja obliczeń symulacyjnych, w której miarą oceny jakości przeprowadzonej optymalizacji jest zgodność położen końcowych symulowanych z rzeczywistymi powypadkowymi położeniami pojazdów oraz zgodność parametru EES, będącego miarą energii zderzenia. Przeprowadzona została analiza funkcji jakości, której wartość stanowi kryterium zatrzymania obliczeń algorytmu genetycznego. Funkcja jakości ma bardzo istotny wpływ na poprawność działania i szybkość algorytmu.

2. Algorytm genetyczny – funkcja jakości

Do analizy użyto optymalizatora wykorzystującego trzy metody optymalizacji: liniową, genetyczną i Monte Carlo [12]. We wszystkich trzech metodach funkcja jakości przyjmuje jednakową postać. Analizy funkcji jakości dokonano z zastosowaniem algorytmu genetycznego [1, 4, 10] który zawiera poszczególne składowe. Ich znaczenie w przypadku optymalizacji przebiegu zderzenia pojazdów jest następujące:

- **osobnik**; to prędkości obu pojazdów (V_1 i V_2);
- **generowanie** początkowej populacji osobników (przedzderzeniowych prędkości pojazdów) odbywa się w postaci pseudolosowego wyboru;
- **ograniczenia**; losowanie wykonywane jest z przedziału prędkości zadanego przez użytkownika, mającego sens fizyczny;
- **reprodukcja**; szanse powielenia mają tylko osobniki najsilniejsze, według zasad algorytmu genetycznego np. reprodukcja ruletkowa;
- **operator krzyżowania** powoduje, że nowe osobniki powstające z rodziców mają cechy wspólne obojga rodziców, krzyżowanie zachodzi z określonym prawdopodobieństwem np. 0,25;
- **selekcja**; słabe osobniki, czyli te, dla których funkcja jakości ma wartość mniejszą od przyjętej, są odrzucane z populacji, wymierają;
- **mutacja** jest dokonywana poprzez zastąpienie osobnika (prędkości) w populacji osobnikiem przypadkowym tak aby zapobiec przedwczesnej zbieżności algorytmu, dokonywana jest z małym prawdopodobieństwem, np. 0,01;
- **zakończenie** pracy algorytmu odbywa się po z góry założonej liczbie iteracji lub po osiągnięciu zadowalającej wartości funkcji jakości;
- algorytm działa w taki sposób, że osobniki w populacji stają się do siebie coraz bardziej podobne.

W praktyce dokonywania optymalnego wyboru, wybór najlepszego rozwiązania lub rozwiązań może zależeć od wielu kryteriów. Zadanie takie nazywa się polioptymalizacją. Nie

występuje zatem jedna funkcja celu, ale kilka takich funkcji. Jeżeli zmianie wektora $\mathbf{x}$ (w naszym przypadku jest to para prędkości przedzderzeniowych) towarzyszy poprawne realizowanie obu kryteriów, to nazywamy je zgodnymi. Kryteria są niezgodne w sytuacji, gdy dla zmiany parametru $\mathbf{x}$ jedno kryterium ulega pogorszeniu, a drugie poprawia się.

W optymalizacji zderzeń i ruchu pozderzeniowego pojazdów istnieje wiele kryteriów poprawności rozwiązania. W modelu dynamicznym ruchu pozderzeniowego kryteriami są zgodności usytuowania liniowego (x_i i y_i) i kąтового pojazdów (ϕ_i) w symulacji z ujawnionymi podczas oględzin, odkształcenia nadwozi (EES) itp. Kryteria te nie są zgodne, gdyż z praktyki obliczeń symulacyjnych wynika, że zmiana np. prędkości przedzderzeniowej jednego z pojazdów może spowodować lepszy wynik końcowy w zakresie kąta obrotu pojazdów, ale gorszy w zakresie drogi przebytej w ruchu pozderzeniowym. Podobnie oddziałuje zmiana współczynnika restytucji lub punktu przyłożenia impulsu. Nie jest możliwe wyłonienie konkretnych zależności pomiędzy tymi kryteriami. Z tego powodu autorzy twierdzą, że kryteria te należy traktować inaczej niż jest to stosowane w dotychczas funkcjonującym programie do rekonstrukcji wypadków drogowych i jest to priorytetem dalszych badań. Wzajemne usytuowanie pojazdów w chwili zderzenia i wielkości fizyczne w tej chwili powodują, że kryteria są raz zgodne, a raz niezgodne. W rozwiązaniach niezdominowanych nie ma rozwiązań co najmniej równych ze względu na wszystkie kryteria, tak zdarza się również w zderzeniach pojazdów i ruchu pozderzeniowym, dlatego należy zastosować regułę kompromisów zwaną optymalnością w sensie Pareto. Innymi słowy musimy podjąć decyzję, które z kryteriów są dla nas ważniejsze. W przypadku symulacji zderzeń i ruchu pozderzeniowego pojazdów zazwyczaj większą wagę należy przywiązywać do drogi przebytej w ruchu pozderzeniowym niż do kąta obrotu. Kąt obrotu pojazdu jest bowiem parametrem dość niepewnym i wrażliwym na nie dające się często określić zakłócenia. Gdyby natomiast wziąć pod uwagę taką sytuację, że pojazd po zderzeniu jechał na wprost, a nie mamy dostatecznych danych dotyczących opóźnienia hamowania, mniejszą wagę należy przykładąć do drogi w ruchu pozderzeniowym, a większą do kierunku tuż po zderzeniu. W innej sytuacji, gdy kryterium usytuowania pojazdu i kąta obrotu będą zbyt mało wiarygodne, nacisk optymalizacyjny należy położyć na ślady znaczone w ruchu pozderzeniowym (jeśli istnieją). Wtedy właśnie bardzo przydatne okaże się optymalizowanie dynamicznego ruchu ze względu na siły występujące na kołach, co nie jest stosowane w opisywanym programie. Wagi kryteriów muszą być zatem dobierane indywidualnie.

W analizowanym programie zadanie optymalizacji wielokryterialnej sprowadzono do zadania jednokryterialnego, stosując metodę ważonego kryterium zbiorczego funkcji jakości [5, 10, 11]. Wagi kryteriów składowych funkcji jakości Q zostały sprowadzone do liczb z zakresu $\langle 0,1 \rangle$. Funkcja jakości wyrażona jest zależnością (1).

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_i (w_i \cdot E_i)^2}{\sum_i w_i^2}} \cdot 100\% \quad (1)$$

gdzie:

w_i – współczynnik wagi poszczególnego kryterium,
 E_i – kryteria zdefiniowane poniżej.

Poszczególne kryteria E_i wchodzące w skład kryterium zbiorczego Q wyrażone są zależnościami:

$$E_{P_i} = \frac{\|\vec{r}_{StopSim_i} - \vec{r}_{Stop_i}\|}{\|\vec{r}_{Stop_i} - \vec{r}_{impact_i}\|} - \text{błąd położenia powypadkowego pojazdu po zatrzymaniu},$$

$\|\vec{r}_{StopSim_i} - \vec{r}_{Stop_i}\|$ – odległość między położeniem środka masy pojazdu po symulacji i rzeczywistym położeniem po zatrzymaniu (norma wektora),

$\|\vec{r}_{Stop_i} - \vec{r}_{impact_i}\|$ – odległości między położeniem środka masy pojazdu po zatrzymaniu i w chwili zderzenia (norma wektora),

$\vec{r}_{StopSim_i}$, $\vec{r}_{Stop_i}$, $\vec{r}_{impact_i}$ – wektory wodzące środka masy pojazdu w globalnym układzie odniesienia,

$$E_{PI_i} = \frac{\|\vec{r}_{InterSim_i} - \vec{r}_{Inter_i}\|}{\|\vec{r}_{Inter_i} - \vec{r}_{impact_i}\|} - \text{błąd położenia/położeń pośrednich (w trakcie ruchu), opis jak dla } E_{P_i}, \text{ odległości dotyczą położen pośrednich},$$

$$E_{Heading_i} = \frac{\arccos\left(\frac{\vec{d}_{Stop_i} \cdot \vec{d}_{StopSim_i}}{|\vec{d}_{Stop_i}| \cdot |\vec{d}_{StopSim_i}|}\right)}{\pi} - \text{błąd położenia kąтового pojazdu po zatrzymaniu},$$

$$\arccos\left(\frac{\vec{d}_{Stop_i} \cdot \vec{d}_{StopSim_i}}{|\vec{d}_{Stop_i}| \cdot |\vec{d}_{StopSim_i}|}\right) - \text{kąt pomiędzy kierunkiem osi wzdłużnej pojazdu po zatrzymaniu i po symulacji},$$

Jeżeli wektory $\vec{d}_{Stop_i}$, $\vec{d}_{StopSim_i}$ są wektorami jednostkowymi osi podłużnej pojazdu w pozycji powypadkowej i po symulacji, to błąd położenia kąтового pojazdu ma postać:

$$E_{Heading_i} = \frac{\arccos(\vec{d}_{Stop_i} \cdot \vec{d}_{StopSim_i})}{\pi}$$

$$E_{HeadingInter_i} = \frac{\arccos(\vec{d}_{Inter_i} \cdot \vec{d}_{InterSim_i})}{\pi} - \text{błąd położen kątowych pośrednich, opis jak dla } E_{Heading_i}, \text{ wektory dotyczą położen pośrednich},$$

$$E_{EES_i} = \frac{EES_{TotalSim_i} - EES_{Total_i}}{EES_{Total_i}} - \text{błąd oceny całkowitego EES.}$$

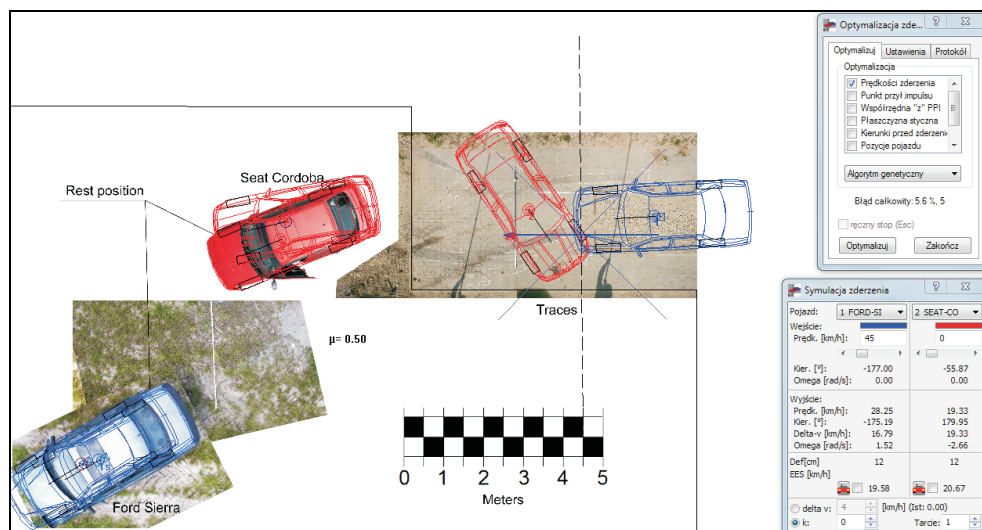
EES_{Total} – energia równoważna energii zderzenia, wyrażona prędkością.

Funkcję jakości Q można zatem traktować jako błąd całkowity obliczeń optymalizacyjnych.

Tego typu podejście niesie za sobą ryzyko, gdyż nie można wykluczyć, że przy szczególnej kombinacji liczb i wag powstanie kilka sytuacji zminimalizowania funkcji jakości, zwłaszcza, że jedna funkcja jakości dotyczy obu zderzających się pojazdów. Zatem liczba kryteriów

W wyniku optymalizacji metodą genetyczną uzyskano zadowalający wynik obliczenia prędkości przedzderzeniowej, mniejszy o 5 km/h od rzeczywistego, a zatem z dokładnością 90%, co przekłada się na 10% błąd prędkości. Wartość funkcji jakości Q wynosiła 5,1%, a zgodność w zakresie usytuowania środków mas i położenia kąтового była dobra.

W kolejnej optymalizacji zderzenia pominięto kryterium kąta obrotu pojazdów ustalając jego wagę na 0%, a pozostałe wielkości zostały niezmienione. Wynik optymalizacji przedstawiono na rys. 2.



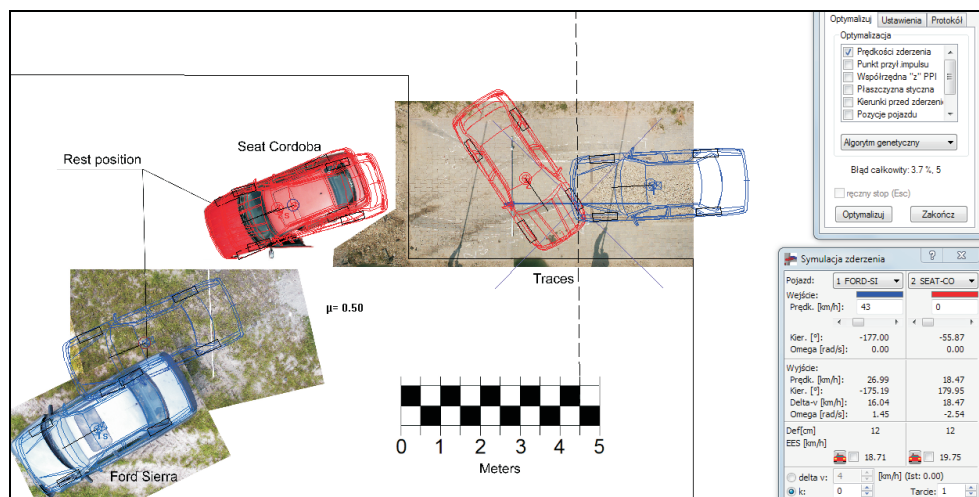
Rys. 2. Obliczenia optymalizacyjne dla wagi kąta 0%, usytuowania 100%, EES 0%

Fig. 2. Optimization calculations: the weight 0% of the yaw angle, 100% of the position and 0% of EES were adopted

W wyniku obliczeń uzyskano również nieduży błąd całkowity (5,6%), jednak nieznacznie większy od poprzedniego (o 0,5%) niż dla 100% wagi kąta. Konstrukcja matematyczna funkcji jakości (patrz wzór 1), która stanowi średnią ważoną kryteriów i wag, spowodowała, że nie uwzględnienie małej odchyłki kątowej, która poprawiała wynik, zwiększyło wartość funkcji jakości (błąd całkowitego). Gdyby jednak usytuowanie kątowe po optymalizacji znacznie odbiegało od rzeczywistego, należałoby się spodziewać, iż pominięcie kąta w kryteriach optymalizacji zmniejszyłoby błąd całkowity.

Wykonano kolejne obliczenia optymalizacyjne dla wagi kąta 100%, usytuowania 0%, EES 0%, a zatem pomijając całkowicie kryterium usytuowania środków mas pojazdów. Sytuację tę przedstawiono na rysunku 3.

Błąd całkowity zmalał do wartości 3,7%, co wcale nie przełożyło się na zwiększenie poprawności usytuowania środków mas pojazdów, samochód Ford oddalił się od swojej pozycji końcowej. Obliczona prędkość wynosiła 43 km/h, a zatem błąd jej wartości wyniósł 14% (wzrósł o 4% w stosunku do poprzednich obliczeń). Ponieważ kryterium usytuowania kąтового było uwzględnione, nie zmieniło się istotnie położenie kątowe pojazdów, nadal było prawidłowe. Zmniejszenie wartości błędu całkowitego, pomimo gorszego dopasowania położenia środków mas, należy tłumaczyć brakiem uwzględnienia tego kryterium (które w tym wypadku pogarszałoby wynik), co wpłynęło na przedwczesne zatrzymanie algorytmu.



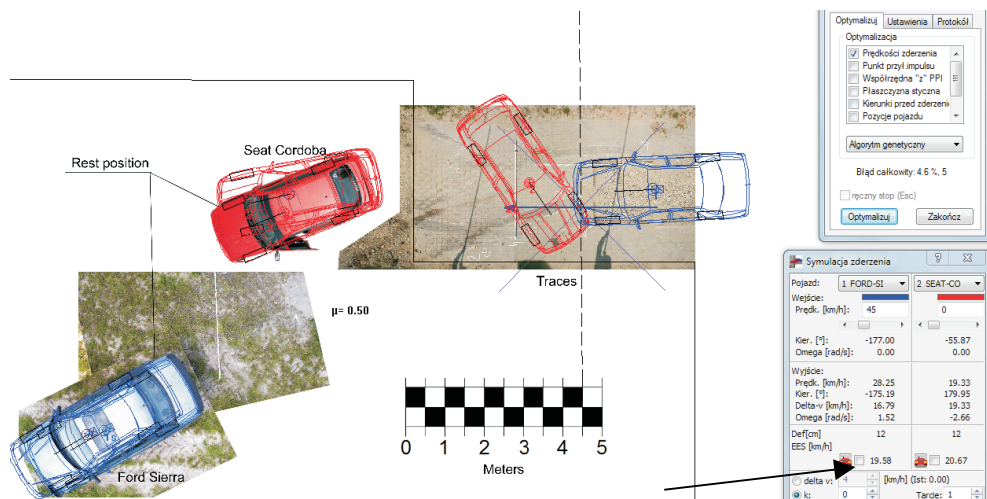
Rys. 3. Obliczenia optymalizacyjne dla wagi kąta 100%, usytuowania 0 %, EES 0%

Fig. 3. Optimization calculations: the weight 100% of the yaw angle, 0% of the position and 0% of EES were adopted

Przy kolejnej optymalizacji próba pominięcia wszystkich kryteriów (wszystkie wagi na 0%), jakkolwiek nie mająca sensu fizycznego, spowodowała, że samochody zatrzymały się w daleko oddalonych pozycjach w zupełnie różnych usytuowaniach kątowych. Obliczona została o wiele za duża prędkość samochodu Ford, która zwiększała się w miarę kolejnych uruchomień algorytmu. Błąd całkowity wynosił jednak 0%, co było matematycznie poprawne ze względu na konstrukcję funkcji jakości, jednak w ogóle nie odzwierciedlało poprawności wykonanej optymalizacji w sensie fizycznym. W tym miejscu należy wspomnieć, że zadanie wszystkim wagom wartości 0 spowodowało pojawienie się tejże wartości w mianowniku funkcji. Technologia programowania pozwala jednak rozwiązać taki problem poprzez stosowanie odpowiednich warunków logicznych i wstawienie do mianownika zamiast liczby 0 liczby niewiele od niej większej np. 0^+ .

Wykonano obliczenia uwzględniając również zmiany wagi parametru EES. W programie jest on opisany jako całkowity EES, dlatego też stanowi miarę energii obu pojazdów zużytą na odkształcenia sprężysto-plastyczne. Rysunek 4 przedstawia przykład obliczeń poprawnie zadeklarowanego całkowitego EES, po 20 km/h¹ dla obu pojazdów.

¹ Jednostka EES km/h nie ma nic wspólnego z prędkością pojazdów, stanowi ona miarę energii wyrażonej w jednostkach prędkości. Może być ona utożsamiana z prędkością wyłącznie w sytuacji uderzenia pojazdu w sztywną nieprzesuwalną i nieodkształcalną przeszkodę przy braku ruchu po-zderzeniowego pojazdu. Wartość 20 km/h została obliczona na podstawie metody polegającej na pomiarze odkształceń i jest zgodna z wartością obliczoną przez program.



Rys. 4. Obliczenia optymalizacyjne dla wagi kąta 100%, usytuowania 100%, EES 100% (20 i 20)

Fig. 4. Optimization calculations: the weight 100% of the yaw angle, 100% of the position and 100% of EES (20 and 20) were adopted

Analizując wynik obliczeń optymalizacyjnych, można stwierdzić, że w stosunku do obliczeń przedstawionych na rys. 1 błąd całkowity zmalał z 5,1% do 4,6%. Należy to tłumaczyć tym, że został uwzględniony kolejny parametr (w obliczeniach przedstawionych na rys. 1 waga parametru EES równa była 0%), który poprawnie oszacowano. Zmniejszyło to wartość funkcji jakości.

Następne obliczenia wykonano dla zmienionej wartości EES w taki sposób, że wpisano wartość niepoprawną tj. po 40 km/h dla każdego z pojazdów, co przedstawiono na rysunku 5.

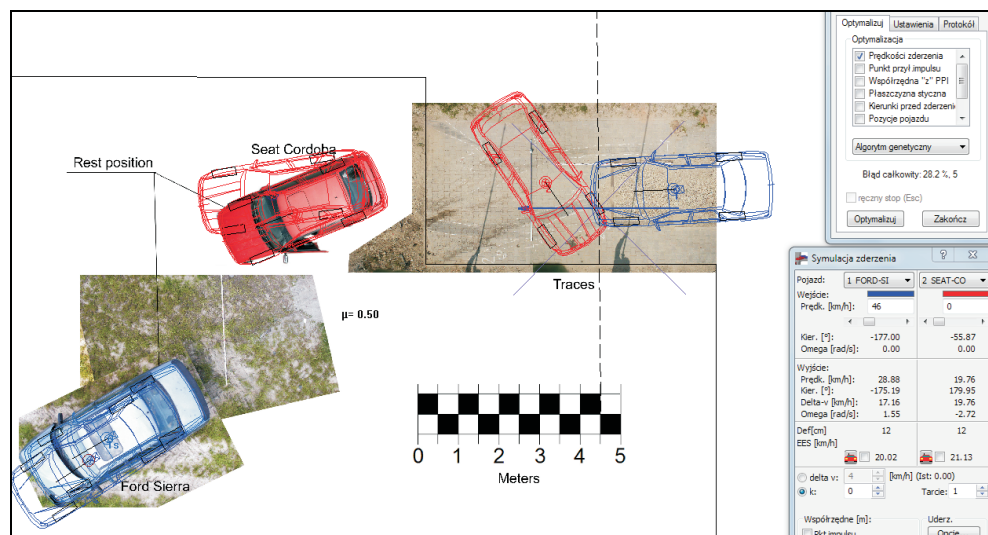
Pomimo uwzględnienia pełnych wag usytuowania środków mas pojazdów i ich położenia katowych nieprawidłowo oszacowany parametr EES spowodował znaczny wzrost błędu całkowitego, z 4,6% do 28,2%. Nieznacznemu odchyleniu w stosunku do obliczeń przedstawionych na rys. 4 uległa pozycja końcowa samochodu Ford, a prędkość obliczona wyniosła 46 km/h (wzrosła o 1 km/h), a zatem jakość fizyczna optymalizacji nieznacznie wzrosła.

Wykonano również obliczenia optymalizacyjne, biorąc pod uwagę wyłącznie kryterium EES. W przypadku jego poprawnego oszacowania, czyli 20 i 20 km/h, uzyskano wynik przedstawiony na rysunku 6.

Można zauważyć, że pozycje posymulacyjne pojazdów z dobrym pokryciem nachodzą na sylwetki rzeczywiste. Błąd całkowity 2,7% jest niewielki, gdyż odnosi się on tylko do różnicy pomiędzy EES wynikającym z symulacji a szacowanym. Obliczona prędkość jest o 1 km/h niższa niż dla optymalizacji opartej na uwzględnianiu usytuowania i kąta obrotu pojazdów. Uwidacznia się tu istotna rola parametru energetycznego i jego roli kontrolnej w obliczaniu zderzeń pojazdów.

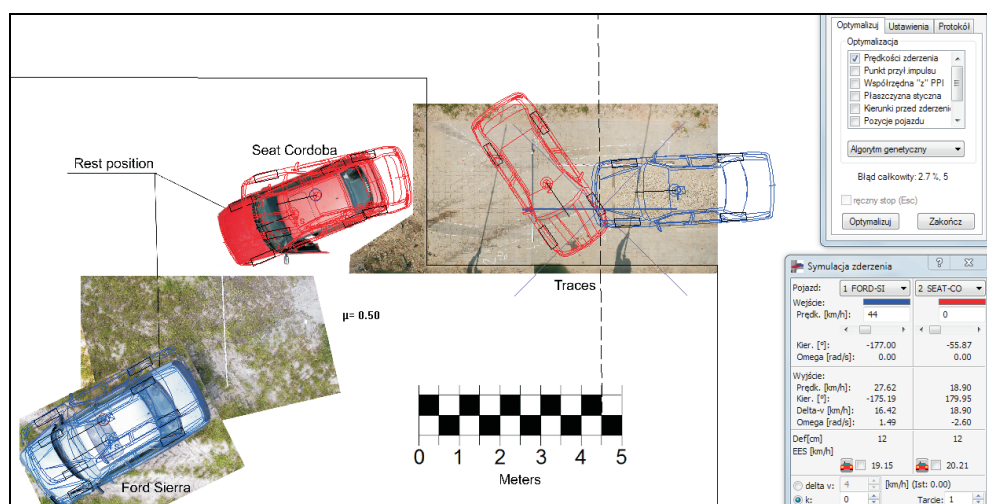
Przedstawione obliczenia optymalizacyjne przy użyciu algorytmu genetycznego cechowało to, że wagi poszczególnych kryteriów były (lub nie były) uwzględniane. W artykule nie omówiono sytuacji pośrednich, np. zadawania wag 50%. Przeprowadzone próby wykazały

zróznicowaną czułość algorytmu na płynną zmianę wag. Przeważnie dopiero po znacznym obniżeniu wartości, np. do mniejszej niż 20%, następowała reakcja wpływająca na wyliczoną prędkość pojazdów. Nie można wykluczyć, że przy innym rodzaju zderzenia funkcja jakości będzie bardziej czuła. Ideą analiz było zbadanie, jak działa funkcja jakości, która powstała przy zastosowaniu metody ważonego kryterium zbiorczego sprowadzającego optymalizację wielokryterialną do optymalizacji jednokryterialnej.



Rys. 5. Obliczenia optymalizacyjne dla wagi kąta 100%, usytuowania 100 %, EES 100% (40 i 40)

Fig. 5. Optimization calculations: the weight 100% of the yaw angle, 100% of the position and 0% of EES (40 and 40) were adopted



Rys. 6. Obliczenia optymalizacyjne dla wagi kąta 0%, usytuowania 0%, EES 100 % (20 i 20)

Fig. 6. Optimization calculations: the weight 0% of the yaw angle, 0% of the position and 100% of EES (20 and 20) were adopted

4. Wnioski

Analiza działania funkcji jakości opartej na metodzie ważonego kryterium zbiorczego pozwala na stwierdzenie, że błąd całkowity będący jednocześnie wartością minimalizowanej funkcji jakości nie stanowi fizykalnego błędu obliczeń prędkości przedzderzeniowych. Wartość błędu całkowitego jest związana z przyjętymi wagami poszczególnych kryteriów i szacowanym parametrem EES. Konstrukcja matematyczna funkcji jakości powoduje, że nie uwzględniając jednego lub kilku kryteriów, możemy uzyskać, zarówno poprawę, jak i pogorszenie błędu całkowitego. Zależy to od tego, czy kryterium, z którego rezygnujemy, byłoby spełnione dobrze czy źle. Przykładowo, jeżeli optymalizator znalazł dobre usytuowanie kątowe pojazdów, a gorsze środków mas, zrezygnowanie z kryterium kąta obrotu zwiększy wartość funkcji jakości. Natomiast rezygnacja z kryterium usytuowania środków mas zmniejszy wartość tejże funkcji. Jeśli zatem kryterium, z którego rezygnujemy jest spełnione źle, to jego pominięcie polepszy wynik, jeśli natomiast dobrze, to wynik ulegnie pogorszeniu. Posługiwanie się algorytmem wyposażonym w opisywaną funkcję jakości, będącą kryterium zbiorczym, wymaga jej zrozumienia, gdyż jest ona czuła na wartości zadawanych wag. Dobór wag zależy od przebiegu ruchu pozderzeniowego i informacji, jakie posiadamy o ewentualnych przypadkowych przeszkodach wpływających na ten ruch. Zdaniem autorów opisywana funkcja stanowi zbyt duże uproszczenie problemu, dlatego też należy ją rozbudować, a obliczenia wykonywać etapami, uzyskując rozwiązania paretooptymalne.

Literatura

- [1] Arabas J., *Wykłady z algorytmów ewolucyjnych*, WNT, Warszawa 2004.
- [2] XVI EVU Annual Meeting, *Proceedings*, IES Kraków 2007.
- [3] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A., *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, Biblioteka Naukowa Inżyniera, PWN, Warszawa 1980.
- [4] Goldberg D. E., *Algorytmy genetyczne i ich zastosowania*, WNT, Warszawa 2003.
- [5] Kasanicky G., Kohut P., Lukasik M., *Impact dynamics theory for the analysis and simulation of collisions*, Zilinska univerzita in Zilina, Warszawa 2004.
- [6] Krzemień P., *Wpływ współczynników restytucji i tarcia w węzle zderzenia na prędkości przedzderzeniowe pojazdów. Algorytm optymalizacyjny jako narzędzie obliczeń*, Paragraf na drodze, IES Kraków, nr 4/2011.
- [7] Krzemień P., Gajek A., *Wpływ współczynnika restytucji i kąta stożka tarcia na wyliczaną prędkość w zderzeniach – algorytm ewolucyjny jako narzędzie obliczeń*, Paragraf na drodze, IES Kraków, nr 10/2011.
- [8] Michalewicz Z., *Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne*, WNT, Warszawa 2004.
- [9] *Wypadki drogowe. Vademecum Bieglego Sądowego*, Praca zbiorowa, Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych, wydanie 2, Kraków 2010, 389, 661.
- [10] Stadnicki J., *Teoria i praktyka rozwiązywania zadań optymalizacji*, WNT, Warszawa 2006.
- [11] Steffan H., Moser A., Spek A., Makkinga W., *Collision optimizer and Monte Carlo methods in impact calculation*, Materiały konferencyjne XVI EVU Annual Meeting, Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych, Kraków 2007, 51.

- [12] Wach W., *Symulacja wypadków drogowych w programie PC-Crash*, Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych, Kraków 2009, 63, 355.
- [13] PC-Crash, A Simulation Program for Vehicle Accidents, Operating Manual, October 2009, Dr. Steffan Datentechnik, Linz, Austria 2009.
- [14] Grega W., *Metody optymalizacji*, Wykłady na Wydziale Elektroniki, Automatyki Informatyki i Elektroniki, Kraków 2006 (...). <http://aq.ia.agh.edu.pl/aquarium/Dydaktyk/Wyklady/MO/PDF.php>.
- [15] Jarosz P, Bereta M., *Algorytmy genetyczne*, Zagadnienia sztucznej inteligencji – laboratorium, Politechnika Krakowska (...). http://www.google.pl/url?sa=t&rct=j&q=jarosz%20bereta%20algorytmy%20genetyczne&source=web&cd=1&ved=0CGkQFjAA&url=http%3A%2F%2Fmichalbereta.pl%2Fdydaktyka%2Fae_zaoeczne%2Flab_genetyczne%2Flaboratorium_genetyczne.pdf&ei=OvWoT_n4CdCQswaz14j6Cw&usg=AFQjCNGhZkXNp_sSrDde-E2QFMB-StFRHuQ.
- [16] *Optymalizacja wielokryterialna-skrypt*, Laboratorium Katedry Automatyki Akademii Górniczo Hutniczej w Krakowie, Kraków 1999 (...). http://www.google.pl/url?sa=t&rct=j&q=optymalizacja%20wielokryterialna%20laboratorium%20katedry%20automatyki&source=web&cd=1&sqi=2&ved=0CGAQFjAA&url=http%3A%2F%2Faq.ia.agh.edu.pl%2Faquarium%2Flabs%2Fopt%2Fpoliopt.pdf&ei=gvaot-qjO8jysgbi0r-jyBA&usg=AFQjCNEARA90n1b_ylUCV3Fs8N9tuGCTlQ&cad=rja.