

MARIOLA KĘDRA*

NIELINIOWA ANALIZA DYNAMIKI
POTOKU PONICZANKANONLINEAR ANALYSIS OF THE PONICZANKA
CREEK DYNAMICS

Streszczenie

W artykule przeprowadzono nieliniową analizę dynamiki górskiego potoku Poniczanka. Dokonana została weryfikacja rodzaju wykrytego determinizmu oraz ocena złożoności dynamiki przepływu wraz z określeniem jej efektywnej liczby stopni swobody. Oszacowano również poziom szumu losowego. Uzyskane informacje będą przydatne przy wyborze odpowiedniego modelu prognostycznego przepływu Poniczanki.

Słowa kluczowe: determinizm, periodyczność, chaos deterministyczny, wymiar korelacyjny, szum losowy

Abstract

In the paper nonlinear analysis of the Poniczanka Creek dynamics was conducted. Verification of the detected determinism type and the assessment of complexity of the discharge dynamics was carried out together with the evaluation of its effective number of degrees of freedom. Noise level was also estimated. The obtained information is going to be useful for selection of the appropriate predictive model for Poniczanka discharge.

Keywords: determinism, periodicity, deterministic chaos, correlation dimension, random noise

* Dr Mariola Kędra, Instytut Inżynierii i Gospodarki Wodnej, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

Oznaczenia

ACF	– funkcja autokorelacji liniowej
AMI	– funkcja uśrednionej informacji wzajemnej
c	– stała z przedziału $(\pi/5, 4\pi/5)$ w teście 0–1
$C_2(r)$	– suma korelacyjna
$C_2^g(r)$	– suma korelacyjna w metodzie GKA
$\text{corr}(X, Y)$	– współczynnik korelacji liniowej zmiennych X i Y
$\text{cov}(X, Y)$	– kowariancja zmiennych X i Y
$D(X)$	– odchylenie standardowe zmiennej losowej X
$D^2(X)$	– wariancja zmiennej losowej X
D, D_2	– wymiar atraktora: fraktalny, korelacyjny
e	– liczba Eulera
FNN	– liczba fałszywych sąsiadów; metoda FNN
$H(x)$	– funkcja schodkowa
hc	– progowa szerokość pasma w metodzie GKA
K, K_c	– wielkość diagnostyczna w teście 0–1
M	– liczba stanów, $M \in \mathcal{N}$
m	– wymiar przestrzeni stanów/rekonstrukcji/zanurzenia, $m \in \mathcal{N}$
M_c, ZM_c	– wielkość pomocnicza w teście 0–1
m_E	– efektywny wymiar przestrzeni zanurzenia
N	– długość szeregu czasowego
n, n_{10}	– liczby naturalne
N_{bin}	– liczba naturalna; parametr metody GKA
P	– liczba zależnych czasowo parametrów systemu
p	– prawdopodobieństwo
p_c, q_c	– zmienne translacyjne w teście 0-1 obliczone dla stałej c
Q	– natężenie przepływu [m^3/s]
r	– zakres skalowania; promień kuli; $r \in \mathcal{R}$
R_{tol}	– wartość progowa w metodzie FNN
t	– czas, $t \in \mathcal{R}$
t_j	– j -ta chwila czasowa; $t_j = j \cdot \Delta t$
Δt	– czas próbkowania
W	– okno czasowe/Theilera; $W \in \mathcal{N}$
$\{x_j\}$	– jednowymiarowy szereg czasowy
$\bar{x}$	– średnia arytmetyczna z wartości szeregu czasowego $\{x_j\}$
X, Y	– zmienne losowe
$y_i(m)$	– wektor stanu (punkt) w przestrzeni euklidesowej $\mathcal{R}^m$ w chwili t_i
v	– wykładnik korelacyjny
σ	– poziom szumu = $D(\text{szumu})/D(\text{danych z szumem})$ [–]
τ	– opóźnienie czasowe; $\tau \in \mathcal{N}$
τ_{AD}	– opóźnienie czasowe wyznaczone metodą AD
τ_{AMI}	– opóźnienie czasowe wyznaczone metodą AMI

1. Wstęp

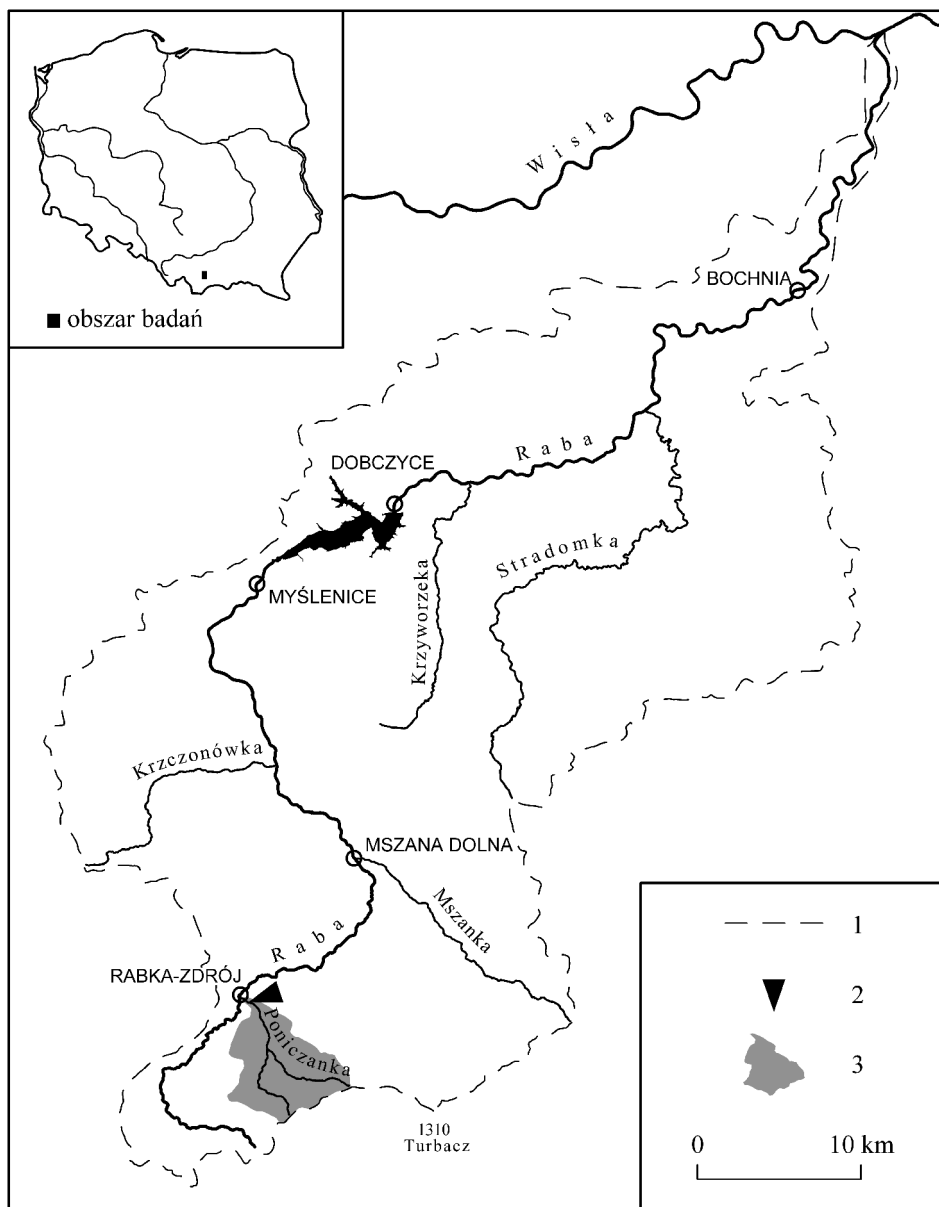
Zlewnia rzeczna stanowi nieliniowy układ dynamiczny o złożonej, zróżnicowanej i wielowymiarowej strukturze, ze skomplikowanymi zależnościami i interakcjami pomiędzy procesami mającymi w niej miejsce. Modelowanie i predykcja procesów w niej zachodzących wymaga nie tylko znajomości metod i technik modelowania, ale również umiejętności właściwego doboru modelu do posiadanych danych hydrologicznych. Konieczna jest wstępna, wnikliwa analiza danych pochodzących z pomiarów hydrologicznych w celu wykorzystania całej zawartej w nich informacji. Chodzi zatem o ocenę danych obserwacyjnych. Czy mają one charakter losowy? Czy oprócz szumu losowego widoczny jest determinizm danych? Jaki jest poziom szumu losowego? Jeśli dane niosą informację deterministyczną, to jakiego jest ona rodzaju: periodycznego czy chaotycznego? Jak bardzo złożona jest deterministyczna dynamika procesu? Ile jest aktywnych stopni swobody? Należy się spodziewać, że uzyskanie takich informacji ułatwi wybór odpowiedniego modelu procesu, a w konsekwencji spowoduje poprawę jakości modelowania i predykcji.

W artykule podjęto próbę odpowiedzi na większość postawionych pytań – nowymi, skutecznymi i wiarygodnymi metodami nieliniowej analizy – w odniesieniu do danych dobowych natężenia przepływu górskiego potoku Poniczanka. Wcześniejsze badanie tych danych testem statystycznym SSS [14] i przez diagramy rekurencyjne [15] pozwoliło wykryć determinizm badanego procesu – potwierdzając ugruntowaną opinię hydrologów na temat tego typu danych. Ponadto, uprzednio dokonana analiza widmowa ujawniła cykle różnej długości, w tym dominującą powtarzalność roczną [13].

Celem tego artykułu jest uzyskanie szczegółowych informacji na temat deterministycznej dynamiki procesu i ocena wielkości szumu losowego w danych, aby na tej podstawie podjąć decyzję dotyczącą odpowiedniego modelu prognostycznego dla przepływu Poniczanki. Po pierwsze chodzi o weryfikację – na gruncie metod nieliniowych – rodzaju wykrytego determinizmu, a więc o stwierdzenie jaka jest zasadnicza nielosowa dynamika badanego przepływu: chaotyczna czy (quasi)periodyczna. Konieczność takiej weryfikacji wynika z faktu, że analiza widmowa – choć użyteczna w identyfikacji potencjalnych cykli – zasadniczo nie pozwala na wykrycie chaosu deterministycznego czy też odróżnienie deterministycznego procesu chaotycznego od (quasi)periodycznego (z szumem losowym). Po drugie, ważne będzie określenie stopnia złożoności dynamiki procesu, a tym samym liczby jej efektywnych/aktywnych stopni swobody. Po trzecie, uzyskanie informacji o poziomie szumu losowego w danych może okazać się pomocne przy wyborze pomiędzy modelowaniem stochastycznym a deterministycznym.

2. Obszar badań

Potok Poniczanka, prawostronny dopływ Raby, zasila Rabę w górnym jej biegu. Źródła Poniczanki znajdują się w Gorcach na wysokości ok. 900 m n.p.m., a ujście – w miejscowości Rabka ok. 490 m n.p.m. Przekrój pomiarowy Rabka, zlokalizowany w odległości 0,5 km od ujścia Poniczanki do Raby, zamyka zlewnię o powierzchni 33,1 km². Całkowita długość potoku wynosi 10 km, a średni spadek 0,041 (rys. 1) [1]. Zlewnia Poniczanki położona jest w obrębie Pogórza Sieniawskiego i Kotliny Chabówki na podłożu niesprzyjającemu retencyjności.



Rys. 1. Potok Poniczanka z zaznaczonym przekrojem wodowskazowy Rabka na tle zlewni Raby: 1 – granica zlewni Raby; 2 – posterunek wodowskazowy Rabka; 3 – zlewnia Poniczanki

Fig. 1. Poniczanka Creek with Rabka gauging cross-section marked on it shown in the frame of the Raba basin: 1 – Raba basin boundary; 2 – Rabka gauging station; 3 – Poniczanka catchment

Zbliżony do kolistego kształt zlewni (ze wskaźnikiem wydłużenia 0,65) sprzyja spływowi powierzchniowemu oraz decyduje o krótkim czasie koncentracji fal wezbraniowych (o znacznej wysokości). Dane na temat przepływu pochodzą z 12-letnich codziennych obserwacji przeprowadzonych w terminie od 1.11.1971 do 31.10.1983, oznaczanym skrótowo 1972-83 i obejmują cały okres istnienia posterunku Rabka na Poniczance. Choć w rocznikach hydrologicznych wód powierzchniowych dorzecza Wisły dotyczących rozpatrywanego okresu znajdują się informacje zarówno o stanach, jak i odpowiadających im natężeniach przepływu, badaniu poddano przepływy jako bardziej wiarygodne. Szczegółowe informacje statystyczne dotyczące rozpatrywanego przepływu znajdują się w tabeli 1. Materiałem empirycznym jest N elementowy szereg czasowy dobowych natężeń przepływu $\{Q_j, j = 1, 2, \dots, N\}$ ($N = 4383$); zatem funkcja $Q(t)$ dyskretyzowana jest przedziałem czasu $\Delta t = 1$ dzień.

Tabela 1

Statystyki przepływu dobowego potoku Poniczanka w posterunku Rabka z lat 1972–1983

Nazwa statystyki	Natężenie przepływu $Q(t)$ [m ³ /s]
minimum	0,01
maksimum	38,10
mediana	0,28
średnia	0,56
odchylenie standardowe	1,21

3. Metody

Nieliniowa analiza szeregów czasowych jest odpowiedzią na zmianę sposobu postrzegania świata, przyrody i procesów naturalnych, uwzględniającą nieliniowość oraz nowy rodzaj determinizmu – chaotyczny. Zaprezentowane poniżej metody są w takiej analizie szczególnie przydatne i wiarygodne.

3.1. Test 0-1

Zaproponowany przez Gottwalda i Melbourne'a [5–8] binarny test pozwala stwierdzić, czy proces deterministyczny reprezentowany przez jednowymiarowy szereg czasowy $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ jest regularny ((quasi)periodyczny) czy też chaotyczny. Test dotyczy **wyłącznie** procesów deterministycznych, z uprzednio stwierdzonym determinizmem procesu. W pierwszej kolejności losowo wybierana jest stała $c \in (\pi/5, 4\pi/5)$ i obliczane dwie zmienne translacyjne p_c, q_c według wzorów:

$$p_c(n) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \cos jc, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

oraz

$$q_c(n) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \sin jc, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

Następnie definiowane jest średnie przemieszczenie kwadratowe:

$$M_c(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N ([p_c(j+n) - p_c(j)]^2 + [q_c(j+n) - q_c(j)]^2) \quad (3)$$

oraz zmodyfikowane średnie przemieszczenie kwadratowe:

$$ZM_c(n) = M_c(n) - \bar{x}^2 \cdot \frac{1 - \cos nc}{1 - \cos c} \quad (4)$$

gdzie:

$\bar{x}$ – średnia arytmetyczna z wartości szeregu czasowego $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.

Jak zaznaczają autorzy, z definicji (3) wynika warunek $n \ll N$, który w praktyce oznacza obliczenie $M_c(n)$ tylko dla $n \leq n_{10}$, gdzie $n_{10} \ll N$ i proponują $n_{10} = N/10$. Wzór $K_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \log M_c(n) / \log n$ definiuje asymptotyczne tempo wzrostu przemieszczenia $M_c(n)$ jako funkcji n i można je wyznaczyć metodą regresji liniowej. Alternatywna propozycja [7] określenia wartości K_c związana jest ze zmodyfikowanym średnim przemieszczeniem kwadratowym ZM_c . Dla $X = \{1, 2, \dots, n_{10}\}$ i $Y = \{ZM_c(1), ZM_c(2), \dots, ZM_c(n_{10})\}$, K_c wyznaczone jest jako wartość współczynnika korelacji zmiennych X i Y według wzoru:

$$K_c(X, Y) = \text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}} \quad (5)$$

gdzie:

$\text{cov}(X, Y)$ – kowariancja zmiennych X i Y ,

$D^2(X)$ – wariancja zmiennej X .

Jak wyjaśniają autorzy, jeśli $K_c = 0$, to zasadnicza deterministyczna dynamika procesu jest regularna ((quasi)periodyczna), natomiast $K_c = 1$ oznacza jej chaotyczność. Aby uniknąć błędu spowodowanego zbyt krótkim i nierzadko obciążonym szumem szeregiem czasowym, zalecane jest powtórzenie powyższych obliczeń dla 100 różnych wartości stałej c w celu uzyskania 100 estymat K_c . Kończącym rezultatem testu binarnego jest wtedy wielkość diagnostyczna K równa medianie (jako bardziej odpornej na elementy odstające niż średnia) ze zbioru obliczonych uprzednio estymat K_c . Ostatecznie, $K \approx 0$ charakteryzuje dynamikę niechaotyczną, a $K \approx 1$ identyfikuje dynamikę chaotyczną. Dodatkową zaletą omawianego testu jest możliwość prześledzenia dynamiki komponentu translacyjnego (p_c, q_c) w układzie współrzędnych p - q w celu bezpośredniej weryfikacji wskazań zmiennej K . Jak twierdzą autorzy [7], w przypadku chaosu deterministycznego zachowanie komponentu (p_c, q_c) jest dyfuzyjne, a dla procesów periodycznych – niedyfuzyjne. Autorzy podnoszą również kwestię: odpowiedniego czasu próbkowania (bez nadmiernego próbkowania), długości szeregu czasowego (reprezentatywnie oddającego dynamikę procesu) i poziomu szumu w danych (odpowiednio niskiego), a biorąc pod uwagę wpływ tych czynników na wynik testu, proponują pewne modyfikacje [7].

3.2. Rekonstrukcja przestrzeni stanów

Analiza zmian zachodzących w układzie dynamicznym odbywa się w tzw. przestrzeni stanów układu. Zmiana stanu oznacza ruch, a trajektoria tego ruchu jest torem przejścia ze stanu w stan. Dysponując ciągiem pomiarów $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ pewnej zmiennej tego układu wykonanych w regularnych, dyskretnych odstępach czasu Δt , możliwa jest rekonstrukcja (odtworzenie) przestrzeni stanów przez współrzędne opóźnione [31, 19, 27, 20]. Dowolny stan układu w chwili $t_i = i \cdot \Delta t$ jest m -wymiarowym wektorem (punktem w przestrzeni stanów) $\mathbf{y}_i \in R^m$ utworzonym z opóźnionych wartości szeregu czasowego według wzoru:

$$\mathbf{y}_i(m) = [x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}] \quad (6)$$

gdzie:

- τ – opóźnienie czasowe,
- indeks $i = 1, 2, \dots, M$,
- ilość stanów $M = N - (m - 1)\tau$.

Wymiar przestrzeni m i opóźnienie τ są parametrami zanurzenia, których prawidłowo dobrana wartość zapewnia wiarygodną rekonstrukcję dynamiki układu. Wymiar m musi być wystarczająco wysoki, tak aby spełniona była nierówność: $m \geq 2D + 1$ [20], gdzie D jest – najczęściej wymagającym estymacji – wymiarem atraktora. Ponadto, w przypadku niestacjonarności ciągu $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ spowodowanej przez fluktuacje P zależnych czasowo parametrów systemu, propozycja [11] przewiduje zwiększenie przestrzeni rekonstrukcji: $m > 2(D + P)$.

3.3. Wymiar atraktora

Wymiar atraktora pozwala oszacować aktywną/efektywną liczbę stopni swobody analizowanego sytemu, a tym samym ocenić jego złożoność [28]. Najczęściej obliczany jest wymiar korelacyjny D_2 jako:

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C_2(r)}{\log r} \quad (7)$$

z sumą korelacyjną $C_2(r)$ [9]:

$$C_2(r) = \frac{2}{(M - W) \cdot (M - W - 1)} \sum_{i=1}^M \sum_{j=i+W+1}^M H\left(r - \|\mathbf{y}_i(m) - \mathbf{y}_j(m)\|\right) \quad (8)$$

gdzie:

- r – promień kuli o środku w punkcie $\mathbf{y}_i(m)$,
- $H(x)$ – funkcja schodkowa ($H(x) = 1$, jeśli $x > 0$, w przeciwnym razie $H(x) = 0$),
- $\|\mathbf{y}\|$ – norma wektora $\mathbf{y}$ w przestrzeni euklidesowej $\mathcal{R}^m$,
- W – okno czasowe (zwane oknem Theilera [28]) usuwa z sumy korelacyjnej korelacje wynikłe z bliskości czasowej punktów.

Suma korelacyjna $C_2(r)$ jest odsetkiem tych wszystkich par punktów, które są oddalone od siebie o mniej niż r . Dla dostatecznej ilości danych, dostatecznie wysokiej przestrzeni zanurzenia m i ustalonym oknie W , jeśli $r \rightarrow 0$, to $C_2(r)$ rośnie potęgowo: $C_2(r) \propto r^\nu$, gdzie

v oznacza wykładnik korelacyjny [9]. Jeżeli począwszy od pewnego m , dla kolejnych wymiarów zanurzenia wartość tego wykładnika osiągnie stały poziom (tzw. nasycenie), to zostaje przyjęta jako wymiar korelacyjny D_2 . Najbliższa liczba całkowita będąca zaokrągleniem w górę wymiaru korelacyjnego określa aktywną/efektywną liczbę stopni swobody układu.

3.4. Metoda GKA (The Gaussian Kernel Algorithm)

Metoda GKA [2, 32] jest przeznaczona dla danych deterministycznych z szumem losowym. W związku z uwzględnieniem szumu, w sumie korelacyjnej $C_2(r)$ (wzór (8)) zastąpiono funkcję schodkową $H(x)$ przez funkcję Gaussa, $e^{-x^2/4}$ [21] oraz zastosowano normę euklidesową. Nowa suma korelacyjna $C_2^g(r)$ ma postać [2]:

$$C_2^g(r) = \frac{2}{(M-W) \cdot (M-W-1)} \sum_{i=1}^M \sum_{j=i+W+1}^M e^{-\|y_i(m) - y_j(m)\|^2 / (4r^2)} \quad (9)$$

Dzięki zastosowanym ulepszeniom implementacyjnym możliwa jest wiarygodna estymacja wymiaru korelacyjnego D_2 oraz poziomu szumu σ dla danych z szumem losowym pochodzącym z rozkładu normalnego, równomiernego oraz kombinacji obu wymienionych typów, gdy szum jest poniżej 20% [32]. Zaimplementowany program [25] wykonuje obliczenia dla wskazanego opóźnienia czasowego τ w kolejnych wymiarach zanurzenia od 2 do wybranego m , uwzględniając wyspecyfikowaną wielkość okna korelacji W . Określenie poziomu szumu (rozumianego jako stosunek odchylenia standardowego szumu do odchylenia standardowego danych z szumem) oraz wartości wykładnika korelacyjnego odbywa się jednocześnie, dla każdego kolejnego wymiaru przestrzeni rekonstrukcji.

4. Wyniki

Aby uzyskać wstępny ogólny obraz zależności czasowej analizowanego szeregu, zaprezentowano rys. 2. U góry (rys. 2a) pokazany jest przebieg zmienności przepływu dobowego $Q(t)$ w skali 12 lat z podziałem na okresy roczne, a poniżej (rys. 2b, 2c) – w skali jednego, wybranego roku. Zaprezentowano rok 1980 – z najwyższym maksimum lokalnym natężenia przepływu w skali roku, oraz rok 1982 – z najniższym takim maksimum.

W celu weryfikacji rodzaju wykrytego determinizmu zastosowano test 0–1. Uzyskana wartość parametru diagnostycznego $K = 0,9976$ jednoznacznie identyfikuje dynamikę przepływu dobowego potoku Poniczanka jako chaotyczną. Warto nadmienić, że choć K jest medianą ze 100 obliczonych estymat K_c , to znikomo ($\pm 0,001$) różni się od tych wartości. Oznacza to, że dla każdej z losowo wybranych wartości stałej c wynik testu jest identyczny i równy 1. Aby wizualnie zweryfikować otrzymany rezultat, zbadano zachowanie komponentu translacyjnego (p_c, q_c) dla stałej $c = 0,8418$ (rys. 3). Można zauważyć, że punkty w przestrzeni p - q nie tworzą wyraźnej, regularnej struktury skupionej w jednym miejscu, ale przemieszczają się w sposób nieregularny w różne strony. Takie dyfuzyjne zachowanie wskazuje na chaos deterministyczny i jest czytelnym potwierdzeniem wyniku liczbowego.

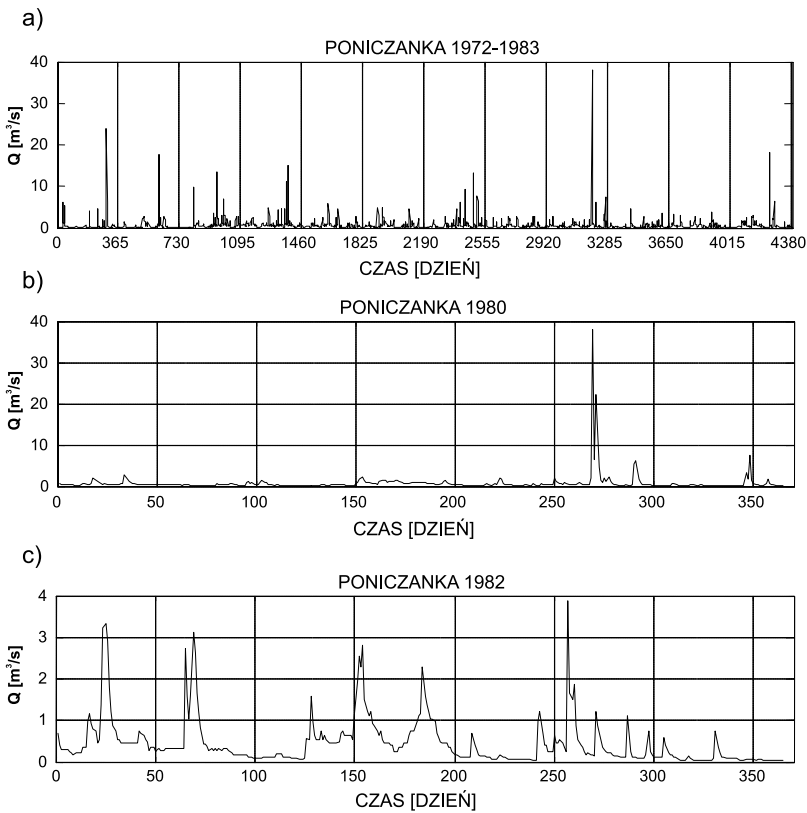
Aby dokonać rekonstrukcji przestrzeni stanów systemu, konieczne jest wyznaczenie wartości parametrów zanurzenia. Zasady wyboru opóźnienia τ oparte są z reguły na funkcji autokorelacji liniowej ACF i średniej informacji wzajemnej AMI. Funkcja AMI jest miarą sumy informacji jaką zmienna x_j niesie o zmiennej $x_{j+\tau}$ i określona jest wzorem (10) [4]:

$$AMI(\tau) = \sum_{j=1}^N p(x_j, x_{j+\tau}) \log_2 \frac{p(x_j, x_{j+\tau})}{p(x_j) \cdot p(x_{j+\tau})} \quad (10)$$

gdzie:

$p(x_j, x_{j+\tau})$ – łączne prawdopodobieństwo wystąpienia x_j i $x_{j+\tau}$,

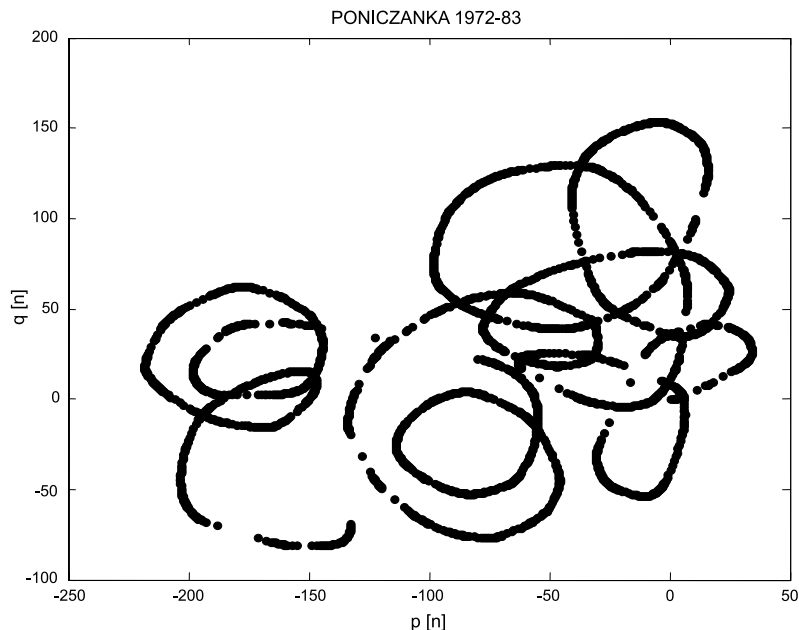
$p(x_j)$ – prawdopodobieństwo wystąpienia x_j w szeregu czasowym $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$.



Rys. 2. Zmienność rozpatrywanego szeregu czasowego natężenia przepływu w przekroju Rabka na potoku Poniczanka (a) wraz z uszczegółowieniem dotyczącym roku 1980 (b) oraz roku 1982 (c)

Fig. 2. The variability of the considered time series of the discharge in Rabka cross-section of the Poniczanka Creek (a) and the details related with the year 1980 (b) and the year 1982 (c)

Zakres wartości dla opóźnienia τ został ograniczony od góry wskazaniami funkcji autokorelacji liniowej ACF i średniej informacji wzajemnej AMI. Ustalono kontrolnie, że funkcja ACF osiąga 0 dla $\tau = 38$, zaś funkcja $AMI(\tau)$ ma pierwsze minimum dla $\tau = 19$. Tę ostatnią wartość $\tau_{AMI} = 19$ przyjęto jako górne ograniczenie zakresu wartości dla opóźnienia τ , zgodnie z [16].



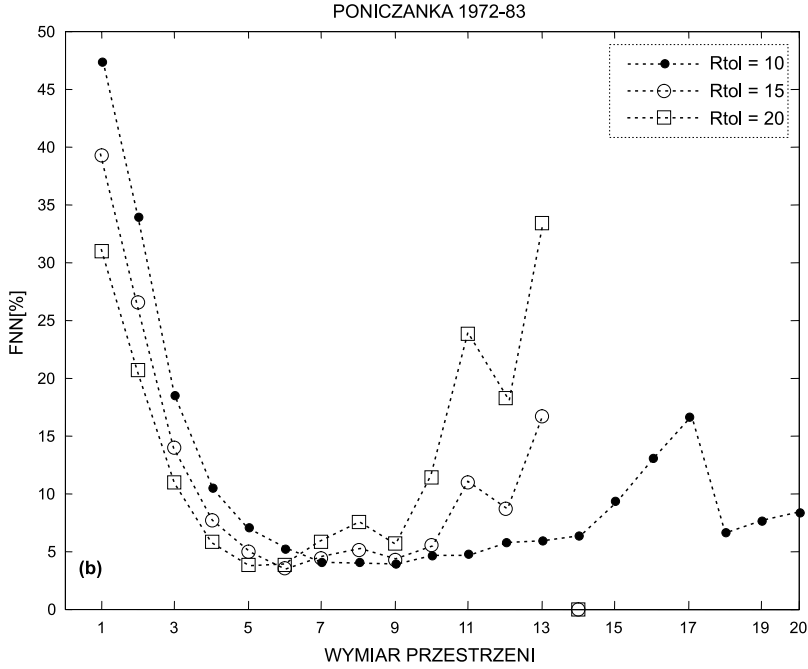
Rys. 3. Zachowanie dyfuzyjne komponentu translacyjnego ($p_c(n)$, $q_c(n)$) w teście 0–1 ze stałą $c = 0,8418$

Fig. 3. The diffusive behaviour of the translation component ($p_c(n)$, $q_c(n)$) in the 0–1 test with the constant $c = 0.8418$

Minimalny efektywny wymiar przestrzeni zanurzenia m oszacowano na podstawie metody fałszywych sąsiadów FNN [12] dla wybranego opóźnienia $\tau = \tau_{AMI} = 19$. Na rys. 4 zaprezentowano wyniki otrzymane programem *false_nearest* z darmowego pakietu oprogramowania TISEAN [10] z trzema różnymi wartościami progowymi R_{tol} . Wartość parametru R_{tol} dobierana jest heurystycznie, zwykle w zakresie [10, 30] i decyduje o zakwalifikowaniu sąsiada jako fałszywego bądź prawdziwego [12]. Można zauważyć, że dla przyjętych wartości R_{tol} procentowa liczba fałszywych sąsiadów FNN szybko spada, osiągając poziom 4–5% już dla wymiaru $m = 5$. Jednak zasadniczo dopiero przy $m = 14$ (dla $R_{tol} = 15$ i $R_{tol} = 20$) procent FNN jest bliski (dokładnie równy) zero. Stąd wskazanie minimalnego efektywnego wymiaru zanurzenia na $m_E = 14$.

Aby doprecyzować wartość τ , skorzystano z metody średniego przemieszczenia AD [18], w której wartość opóźnienia określa się przez ocenę *stopnia rozłożenia* trajektorii w przestrzeni stanów. Średnie przemieszczenie obliczane jest dla wybranej przestrzeni m , we wskazanym zakresie wartości τ , według wzoru:

$$AD(\tau, m) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_{i+j\tau} - x_i)^2} \quad (11)$$



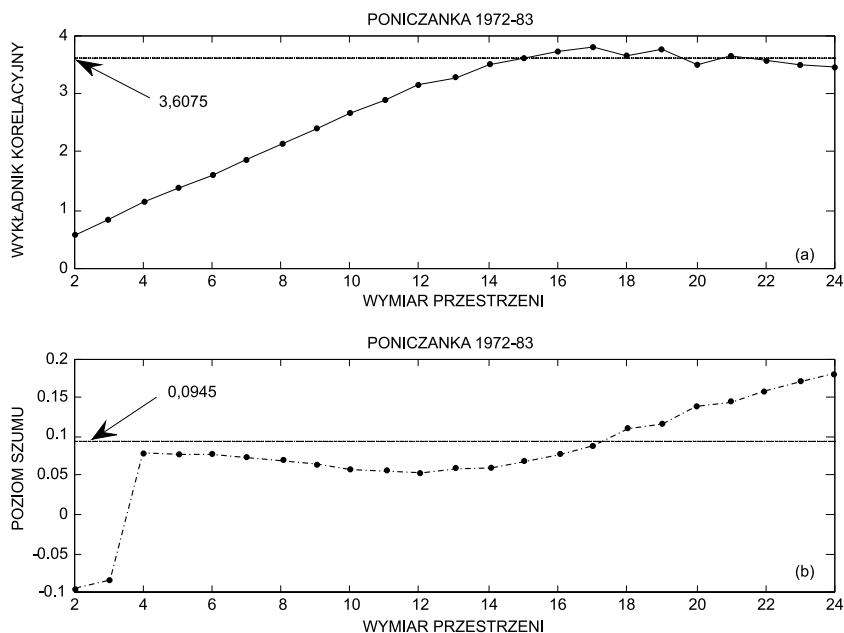
Rys. 4. Estymacja efektywnego wymiaru przestrzeni zanurzenia dla natężenia przepływu Poniczanki przy opóźnieniu $\tau_{AMI} = 19$: funkcja FNN z trzema różnymi wartościami progowymi R_{tol}

Fig. 4. Estimation of the effective embedding dimension for discharge of the Poniczanka Creek with delay $\tau_{AMI} = 19$: the FNN function with three different threshold values of R_{tol}

Wartość optymalna opóźnienia w wymiarze m przyjmowana jest umownie jako punkt, w którym nachylenie krzywej AD zmniejsza się poniżej 40% jej początkowego nachylenia, a odpowiednia wartość opóźnienia powinna być dobrana w pobliżu optymalnej [18]. Dzięki zastosowaniu metody AD z parametrami $m = 14$ i $\tau = 1, 2, \dots, \tau_{AMI}$ otrzymano wskazanie „optymalnego” opóźnienia $\tau_{AD} = 4$, przyjęte w niniejszej pracy jako ograniczenie dolne. W ten sposób wyodrębniono zakres $[\tau_{AD}, \tau_{AMI}] = \{4, 5, \dots, 19\}$ wyznaczający potencjalne wartości parametru zanurzenia τ , dla przyjętego efektywnego wymiaru zanurzenia $m_E = 14$.

Na koniec zastosowano metodę GKA dla opóźnień z zakresu $[\tau_{AD}, \tau_{AMI}]$ w celu obserwacji zachowania wykładnika korelacyjnego. Ostatecznie do obliczeń wzięte zostało opóźnienie $\tau = 9$ i przestrzeń zanurzenia $m = 2, 3, \dots, 24$. Zwiększając przestrzeń rekonstrukcji o pewną ($=10$) liczbę jednostek ponad wymiar efektywny ($24 = m_E + 10$), chodziło o możliwość zaobserwowania ewentualnego stanu nasycenia wykładnika korelacyjnego. Ponadto przyjęto następujące wartości parametrów pomocniczych: okno Theilera $W = 183$, czyli połowie dni w roku – zgodnie z propozycją [30] nawiązującą do wykrytego rocznego cyklu pro-

cesu [13], liczbę podziałów $N_{\text{bin}} = 256 = 2^8$, oraz progową szerokość pasma $hc = 3 \cdot \sigma = 0,3$ w rejonie skalowania sumy korelacyjnej (na podstawie procedury [32] ze wstępną estymacją poziomu szumu $\sigma = 0,1$ i przy uwzględnieniu że $hc \geq 3 \cdot \sigma$). Na rys. 5 przedstawiono wyniki estymacji wykładnika korelacyjnego v i poziomu szumu uzyskane w sposób automatyczny programem GKA z darmowego pakietu oprogramowania ANTA [25]. Z rys. 5a widać, że w kolejnych wymiarach przestrzeni zanurzenia wartość wykładnika korelacyjnego rośnie, a od $m = 14$ osiąga poziom nasycenia. Obliczona w wymiarach $m = 14-24$ średnia wartość wymiaru korelacyjnego to $\bar{D}_2 \approx 3,6075 \approx 3,61$, co pozwala określić na 4 aktywną/efektywną liczbę stopni swobody analizowanej dynamiki przepływu dobowego Poniczanki w badanym okresie. Z rys. 5b wynika, że w średni poziom szumu w wymiarach $m = 4-24$ wynosi $\bar{\sigma} \approx 0,0945$. Warto zauważyć, że przestrzeń rekonstrukcji $m = 2-3$ jest za mała do prawidłowej oceny poziomu szumu, stąd wskazania ujemne, nie mające wpływu na poprawność estymacji σ w wyższych wymiarach zanurzenia.



Rys. 5. Wyniki metody GKA z parametrem zanurzenia $\tau = 9$ dla przepływu dobowego Poniczanki: wartość wykładnika korelacyjnego (rys. 5a); oraz wyestymowany poziom szumu (rys. 5b)

Fig. 5. The results of GKA method with the embedding parameter $\tau = 9$ for the daily discharge of the Poniczanka Creek: correlation exponent value (Fig. 5a); and the estimated noise level (Fig. 5b)

5. Podsumowanie

Z dokonanej analizy wynika, że niewielki górski potok Poniczanka ze zlewnią o charakterze naturalnym stanowi układ deterministyczny [14, 15] z dynamiką chaotyczną. Choć wcześniejsza analiza widmowa badanego ciągu natężeń przepływu Poniczanki [13] – przez wykrycie istotnych statystycznie cykli – wskazywała na (quasi)periodyczność procesu (z ewentualnym szumem losowym), test 0–1 jednoznacznie rozpoznał jego chaotyczność, odrzucając równocześnie hipotezę o jego cykliczności. Oznacza to nieregularność i niestabilność układu.

Rezultaty uzyskane metodą GKA pokazują, że pomimo stosunkowo niewielkiej zlewni badawczej (poniżej 50 km²) dynamika przepływu w rozpatrywanym 12-letnim okresie jest relatywnie złożona, 4-wymiarowa, z czterema aktywnymi stopniami swobody. Otrzymane wyniki są zbieżne m.in. ze wskazaniem pracy [17], w której badaniu poddano ciąg dziennych natężeń przepływu rzeki Dora Baltea we Włoszech, a także z rezultatami dotyczącymi dziennych dopływów systemu zbiorników Wupper w Niemczech [26] oraz miesięcznych ciągów opadu i odpływu w zlewni rzeki Göta (Szwecja) [23].

Szum losowy w analizowanym ciągu pomiarowym kształtuje się średnio na poziomie około 0,1. Oznacza to z jednej strony, że deterministyczna dynamika procesu jest do pewnego stopnia zatarta, z drugiej zaś – że nie jest skutecznie zatarta, ponieważ możliwe było odróżnienie jej od szumu w metodzie GKA. Wymierne korzyści powinno zatem przynieść użycie nieliniowych metod redukcji szumu, w szczególności metod projekcji lokalnej, przykładowo [29]. Zastosowanie w takim przypadku tradycyjnych liniowych filtrów pasmowych może spowodować zniekształcenia danych o systemie, dające bardziej negatywny efekt niż dawał sam szum [22].

Modelowanie i predykcja badanego przepływu dobowego na gruncie tradycyjnych metod/modeli stochastycznych (uwzględniających determinizm w postaci trendu liniowego lub periodyczności) nie ma uzasadnienia w ujawnionych cechach dynamiki badanego procesu. Jak pokazano [3], prognostyczne modele nieliniowe mogą być konkurencyjne w stosunku do stochastycznych, a zastosowane w praktyce do dobowych ciągów przepływów rzecznych [24] (bez dodatkowej informacji o opadzie) dają rozsądne wyniki. Należy jednak zaznaczyć, że dysponując danymi uśrednionymi lub zagregowanymi w większym przedziale czasowym (miesięcznym, rocznym) wniosek taki powinien być poparty osobnymi analizami – wspomniane operacje mogą spowodować znaczną utratę informacji o dynamice procesu, skutkującą zwiększoną losowością ciągów danych.

Uzyskane informacje o czterech aktywnych stopniach swobody (lokalnie) i ok. 15-wymiarowej przestrzeni rekonstrukcji dynamiki systemu będą użyteczne w pierwszej kolejności przy redukcji szumu – metody projekcji lokalnej wymagają określenia wartości tych dwóch parametrów. Następnie, te same informacje będą wykorzystane przy decyzji dotyczącej liczby zmiennych (liczby wejść) w nieliniowym modelu prognostycznym.

Serdecznie dziękuję dr Joannie Korpak za przygotowanie jednego rysunku.

Literatura

- [1] Bajkiewicz-Grabowska E.(red.), *Słownik geograficzno-krajoznawczy Polski*, PWN, Warszawa 1998.
- [2] Diks C., *Estimating invariants of noisy attractors*, Physical Review E, 53(5), 1996, 4263-4266.
- [3] Farmer J.D., Sidorowich J.J., *Predicting chaotic time series*, Physical Review Letters, 59, 1987, 845-848.
- [4] Fraser A.M., Swinney H.L., *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*, Physical Review A, 33 (2), 1986, 1134-1140.
- [5] Gottwald G.A., Melbourne I., *A new test for chaos in deterministic systems*, Proceedings of the Royal Society, London A, 460, 2004, 603-611.
- [6] Gottwald G.A., Melbourne I., *Testing for chaos in deterministic systems with noise*, Physica D, 212, 2005, 100-110.
- [7] Gottwald G.A., Melbourne I., *On the implementation of the 0-1 test for chaos*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 8 (1), 2009, 129-145.
- [8] Gottwald G.A., Melbourne I., *On the validity of the 0-1 test for chaos*, Nonlinearity, 22 (6), 2009, 1367-1382.
- [9] Grassberger P., Procaccia I., *Measuring the strangeness of strange attractors*, Physica D, 9 (1-2), 1983, 189-208.
- [10] Hegger R., Kantz H., Schreiber T., *Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*, Chaos, 9 (2), 1999, 413-435.
- [11] Hegger R., Kantz H., Matassini L., Schreiber T., *Coping with nonstationarity by overembedding*, Physical Review Letters, 84 (18), 2000, 4092-4095.
- [12] Kennel M.B., Brown R., Abarbanel H.D.I., *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction*, Physical Review A, 45, 1992, 3403-3411.
- [13] Kędra M., *Cykliczność przepływu w zlewni rzeki Raby. Część II Przepływy dobowe*, Czasopismo Techniczne z. 2-Ś, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2006, 203-216.
- [14] Kędra M., *Zastosowanie statystycznego testu SSS do zidentyfikowania istnienia krótko-terminowej dynamiki w przepływach dobowych zlewni rzeki Raby*, Czasopismo Techniczne z. 1-Ś, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2008, 25-39.
- [15] Kędra M., *Analiza natury (deterministycznej/losowej) przepływu dobowego w zlewni Raby z wykorzystaniem diagramów rekurencyjnych*, Czasopismo Techniczne z. 2-Ś, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2009, 41-62.
- [16] Olbrich E., Kantz H., *Inferring chaotic dynamics from time-series: On which length scale determinism becomes visible*, Physical Letters A, 232, 1997, 63-69.
- [17] Porporato A., Ridolfi L., *Clues to the existence of deterministic chaos in river flow*, International Journal of Modern Physics B, 10 (15), 1996, 1821-1862.
- [18] Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J., *Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times*, Physica D, 73, 1994, 82-98.
- [19] Ruelle D., *Chemical kinetics and differentiable dynamical systems*, Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1981.
- [20] Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M., *Embedology*, Journal of Statistical Physics, 65, 1991, 579-616.
- [21] Schreiber T., *Influence of Gaussian noise on the correlation exponent*, Physical Review E, 56(1), 1997, 274-277.
- [22] Sivakumar B., Phoon K.-K., Liong S.-Y., Liaw C.-Y., *A systematic approach to noise reduction in chaotic hydrological time series*, Journal of Hydrology, 219, 1999, 103-135.

- [23] Sivakumar B., Berndtsson R., Olsson J., Jinno K., *Evidence of chaos in the rainfall-runoff process*, Hydrological Sciences Journal, 46 (1), 2001, 131-145.
- [24] Sivakumar B., Jayawardena A.W., Fernando T.M.K.G., *River flow forecasting: use of phase-space reconstruction and artificial neural networks approaches*, Journal of Hydrology, 265 (1), 2002, 225-245.
- [25] Small M., *Applied Nonlinear Time Series Analysis: Applications in Physics, Physiology and Finance*, Nonlinear Science Series A, 52, World Scientific Series on Nonlinear Science 2005, <http://www.eie.polyu.edu.hk/~ensmall/Homepage/ANTA_manual.html>.
- [26] Sukhodolov A., Napiórkowski J.J., Rowiński P.M., *Applicability of flow prediction based on attractors*, Acta Geophysica Polonica, 44 (3), 1996, 277-286.
- [27] Takens F., *Detecting strange attractors in turbulence*, [w:] Rand D.A., Young L.S. (red.), Dynamical Systems and Turbulence (Warwick 1980). Lecture Notes in Mathematics, 898, Springer-Verlag, Berlin 1981, 366-381.
- [28] Theiler J., *Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data*, Physical Review A, 34, 1986, 2427-2432.
- [29] Urbanowicz K., Hołyst J.A., Stemler T., Benner H., *Noise reduction in chaotic time series by a local projection with nonlinear constraints*, Acta Physica Polonica B, 35(9), 2004, 2175-2197.
- [30] Wang W., Van Gelder P.H.A.J.M., Vrijling J.K., *Is the streamflow process chaotic?*, [w:] Proceedings of the International Symposium on Stochastic Hydraulics, IAHR, Spain 2005.
- [31] Whitney H., *Differentiable manifolds*, Annals of Mathematics 37(2), 1936, 645-680.
- [32] Yu D., Small M., Harrison R., Diks C., *Efficient implementation of the Gaussian kernel algorithm in estimating invariants and noise level from noisy time series data*, Physical Review E, 61, 2000, 3750-3756.