

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki

ZENON WASZCZYSZYN, MARIA RADWAŃSKA

USTROJE POWIERZCHNIOWE

SKRYPT DLA STUDENTÓW WYŻSZYCH SZKÓŁ TECHNICZNYCH



Kraków 1985



PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTW POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Zbigniew Mendera

KIEROWNIK SEKCJI SKRYPTÓW
I SKRYPTOWYCH POMOCY DYDAKTYCZNYCH

Zbigniew Pieniążek

REDAKTOR SERII "L"
Zbigniew Pieniążek

SEKRETARZ SEKCJI
Ewa Małochleb



RECENZENT
Eugeniusz Bielewicz

ADRES REDAKCJI
31-155 Kraków
ul. Warszawska 24

Wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Krakowskiej w Krakowie.
Nakład 500+25+65 egz. Ark.wyd.11,0. Ark.druk.14,75. Oddano do druku 29.
01.1985 r. Podpisano do druku 27.11.1985 r. Druk ukończono w lutym 1986.

Zam. 81/85

L-12-1431

Cena zł 132,-



SPIS TRESCI

Od autorów	7
1. WSTĘP	9
1.1. Podstawowe pojęcia	9
1.2. Założenia	11
2. RÓWNANIA PŁYT	13
2.1. Związki odkształceń i naprężeń z przemieszczeniami we współ- rzędnych kartezjańskich	13
2.2. Związki dla płyty zginanej	19
2.3. Siły przekrojowe i równania równowagi płyty.	20
2.4. Równania tarczy i płyty zginanej	25
2.4.1. Równania przemieszczeniowe	25
2.4.2. Równania tarczy w siłach.	26
2.4.3. Równania rozdzielone płyty zginanej	28
2.5. Transformacje sił przekrojowych i przemieszczeń	29
2.6. Warunki brzegowe	31
2.7. Równania płyt we współrzędnych biegunowych	34
2.7.1. Operatory różniczkowe dla współrzędnych biegunowych	34
2.7.2. Stan kołowo-symetryczny płyty zginanej.	37
2.8. Energia potencjalna płyty	39
2.8.1. Energia sprężysta	40
2.8.2. Energia sprężysta zginania dla niektórych przypadków płyt	42
2.9. Zginanie płyty przy działaniu dużych sił w płaszczyźnie środ- kowej	44
2.9.1. Równanie różniczkowe płyty.	44
2.9.2. Dodatkowa energia sprężysta zginania	46
2.10. Równanie płyty na podłożu sprężystym typu Winklera	47
3. ANALITYCZNE METODY OBLICZANIA PŁYT	48
3.1. Uwagi o metodach obliczeniowych	48
3.2. Rozwiązanie analityczne dla płyt kołowych.	49
3.3. Analiza zginania kołowo-symetrycznego.	53
3.4. Przykłady do rozwiązania	57
3.5. Zastosowanie podwójnych szeregów trygonometrycznych do obli- czania płyt prostokątnych /metoda Naviera/	58
3.6. Zastosowanie pojedynczych szeregów trygonometrycznych /meto- da Levy'ego/.	62
3.7. Metoda Nadeia obliczania całki szczególnej	63

3.8. Uwagi o wykorzystaniu szeregów trygonometrycznych do obliczania płyt prostokątnych o różnych warunkach brzegowych . . .	66
3.9. Przykłady do rozwiązania	68
3.10. Metoda energetyczna /Ritza/.	69
3.11. Metoda ortogonalizacji /Bubnowa-Galerkina/	75
3.12. Przykłady do rozwiązania	81
4. OBLICZANIE PŁYT ZGINANYCH METODĄ RÓŻNIC SKOŃCZONYCH	82
4.1. Główne problemy MRS.	82
4.2. Podstawowe zależności w zapisie różnicowym	83
4.3. Warunki brzegowe	87
4.4. Obciążenia w równaniu różnicowym	90
4.5. Przykłady obliczania płyt prostokątnych	90
4.6. Wariacyjne ujęcie MRS dla płyt prostokątnych niepodatnie podpartych	96
4.7. Uogólnienie ujęcia wariacyjnego MRS na dowolne warunki brzegowe	102
4.8. Przykłady do rozwiązania	108
5. WYBOCZENIE PŁYT	110
5.1. Zjawisko utraty stateczności płyt i jego analiza	110
5.2. Wykorzystanie równania różniczkowego płyty do obliczenia obciążenia krytycznego	113
5.3. Analiza wyboczenia metodą energetyczną	121
6. RÓWNANIA POWŁOK	125
6.1. Niektóre wiadomości o teorii powierzchni	125
6.2. Uogólnione siły przekrojowe.	131
6.3. Równania równowagi wewnętrznej	136
6.4. Równania kinematyczne	142
6.5. Równania fizyczne	147
6.6. Zastępcze siły brzegowe i warunki brzegowe	148
6.7. Zestawienie podstawowych równań	150
6.8. Równania powłok obrotowych	153
6.9. Rozdzielenie zmiennych w zamkniętych powłokach obrotowych. .	156
6.10. Równania powłok małowyniosłych	158
7. POWŁOKI BEZMOMENTOWE	163
7.1. Wprowadzenie, założenia, równania	163
7.2. Stan bezmomentowy powłok obrotowych	165
7.3. Całkowanie równań równowagi w stanie obrotowo symetrycznym .	166
7.4. Przykłady do rozwiązania	174
7.5. Całkowanie równań równowagi kopuł kulistych.	175

7.6.	Pełne rozwiązanie dla zamkniętej powłoki walcowej	180
7.7.	Analiza powłok bezmomentowych we współrzędnych kartezyjskich	184
7.8.	Przykłady do rozwiązania	192
8.	ZGINANE POWŁOKI WALCOWE	194
8.1.	Uwagi ogólne	194
8.2.	Zginanie obrotowo-symetryczne zamkniętych powłok walcowych .	195
8.3.	Ogólna postać równań przemieszczeniowych.	204
8.4.	Uprozczone równania naprężeniowo-przemieszczeniowe do analizy przekryć walcowych.	209
9.	ZARYS TEORII UTRATY STATECZNOŚCI POWŁOK, ZAGADNIENIA NIEOMÓWIONE.	214
9.1.	Wyboczenie powłoki walcowej.	214
9.2.	Nieliniowa analiza utraty stateczności powłok	218
9.3.	Zagadnienia nieomówione	221
9.3.1.	Ustroje uzębrowane i trójwarstwowe.	222
9.3.2.	Ustroje niesprężyste	223
9.3.3.	Drgania ustrojów powierzchniowych	225
9.3.4.	Duże ugięcia płyt i powłok	226
9.3.5.	Metoda elementów skończonych	227
10.	LITERATURA	229
D.1.	Wzory różnicowe.	230
D.2.	Wzory Gaussa-Weingartena	232



Od autorów

W roku akademickim 1982/83 na III roku Wydziału Budownictwa Lądowego Politechniki Krakowskiej na specjalności Konstrukcje Budowlane został wprowadzony nowy przedmiot pod nazwą "Ustroje powierzchniowe". Niewielki wymiar godzin /15 godz. wykładu i 15 godz. ćwiczeń w semestrze VI/ zmusza do wielkiej dyscypliny w prowadzeniu zajęć i uważnego wyboru materiału. Z tego powodu jak też ze względu na częstokroć złożone wzory i ich długie wyprowadzenie, kłopotliwe podczas prowadzenia wykładów i ćwiczeń, od początku podjęcia tych zajęć autorzy rozpoczęli pracę nad odpowiednim skrypcem.

W omawianym skrypcie, autorzy zajęli się liniową teorią płyt i powłok, głównie w zakresie analizy statycznej. W rozdz. 1 zostały omówione podstawowe pojęcia i założenia. Rozdz. 2 jest poświęcony wyprowadzeniu podstawowych równań płyt. W rozdz. 3 pokazano metody analityczne, ścisłe i przybliżone obliczenia płyt zginanych. Metoda różnic skończonych w ujęciu lokalnym i wariacyjnym została w rozdz. 4 ograniczona do regularnych siatek prostokątnych. Krótko przedstawiono w rozdz. 5 zagadnienie analizy wybożenia płyt przy wykorzystaniu równania różniczkowego bądź za pomocą metody energetycznej.

Ogólne równania powłok zostały wyprowadzone w rozdz. 6. Tutaj też wyspecyfikowano te równania do analizy powłok obrotowych i mało wyniosłych. Powłoki bezmomentowe, zarówno obrotowe jak też we współrzędnych kartezjańskich, omówiono w rozdz. 7. Ważne zagadnienia analizy powłok walcowych przedstawiono w rozdz. 8.

Bardziej złożone problemy analizy ustrojów powierzchniowych omówili autorzy w rozdz. 9. W postaci krótkich informacji zwrócili też uwagę na zjawiska i podstawowe równania opisujące utratę stateczności i drgania powłok, analizę powłok anizotropowych i niejednorodnych oraz zagadnienia nieliniowe.

W wykazie literatury przytoczono jedynie pozycje w języku polskim. W "Dodatku" zostały wyprowadzone wzory różnicowe oraz wzory Gaussa-Weingartena, służące do obliczania pochodnych wektorów bazowych na powierzchni.

W skrypcie oprócz wyprowadzenia równań i wzorów autorzy zajęli się dość obszernie metodami obliczania płyt i powłok, ilustrując je przykładami liczbowymi. Celowo, prawie całkowicie została pominięta metoda elementów skończonych, która jest teraz powszechnie stosowana. Autorzy

uważają, że tej metodzie powinien być poświęcony oddzielny wykład /jest on aktualnie proponowany jako wykład fakultatywny/.

Skrypt powinien ułatwić studentom przyswojenie materiału przerabianego na wykładach i ćwiczeniach. Zakres problemów i zadań przedstawionych w skrypcie jest szerszy niż na zajęciach, co umożliwi wybór, zmiany i różnicowanie materiału w różnych latach. Uważamy, że skrypt będzie również służył studentom specjalizacji Mechanika Stosowana i Teoria Konstrukcji jako wprowadzenie do teorii i metod obliczania płyt i powłok sprężystych.

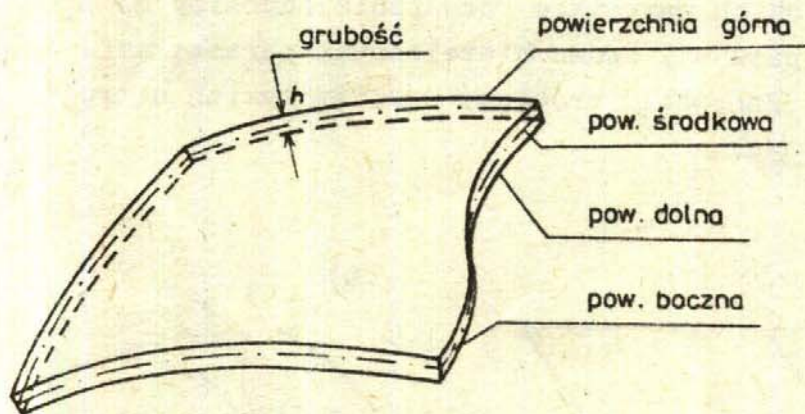
Autorzy pragną podziękować Prof. Eugeniuszowi Bielewiczowi za wnikliwą recenzję, a paniom Barbarze Batko i Magdalenie Stokłosie za wykonanie maszynopisu.

1. WSTĘP

1.1. Podstawowe pojęcia

W ramach mechaniki budowli zajmujemy się przede wszystkim ustrojami prętowymi /kratownice, belki, ramy, ruszty/. Elementy takich ustrojów mają jeden z wymiarów, utożsamiany z długością pręta, znacznie większy od pozostałych. Wynika stąd możliwość posługiwania się uproszczonym modelem geometrycznie jednowymiarowym, gdy rozważania sprowadzamy do osi prętów.

Dużą nośnością i korzystnymi własnościami mechanicznymi charakteryzują się ustroje powierzchniowe, nazywane często dźwigarami powierzchniowymi. W tych ustrojach jeden z wymiarów /grubość/ jest wyraźnie mniejszy od pozostałych. Ustrój powierzchniowy jest ograniczony powierzchniami, które można umownie nazwać: górną, dolną i boczną, jak pokazano na rys. 1.1. W niektórych ustrojach zamiast powierzchni górnej i dolnej wygodniej jest posługiwać się nazwami powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej.



Rys.1.1. Przykład ustroju powierzchniowego

Taką samą rolę jak oś pręta pełni w teorii ustrojów powierzchniowych powierzchnia środkowa, równoodległa do powierzchni górnej i dolnej. Grubość h jest najkrótszą odległością pomiędzy powierzchniami górną i dolną, odmierzoną wzdłuż prostej normalnej do powierzchni środkowej.

Ustrój powierzchniowy, w którym powierzchnia środkowa jest płaszczyzną nazywamy płytą, a powłoką, jeśli powierzchnia jest zakrzywiona.

Dla podkreślenia małej grubości używa się też określenia cienki ustrój powierzchniowy, dla którego zachodzi:

$$\frac{h}{l} \ll 1, \quad (1.1)$$

gdzie l jest charakterystyczną długością odmierzaną na powierzchni środkowej.

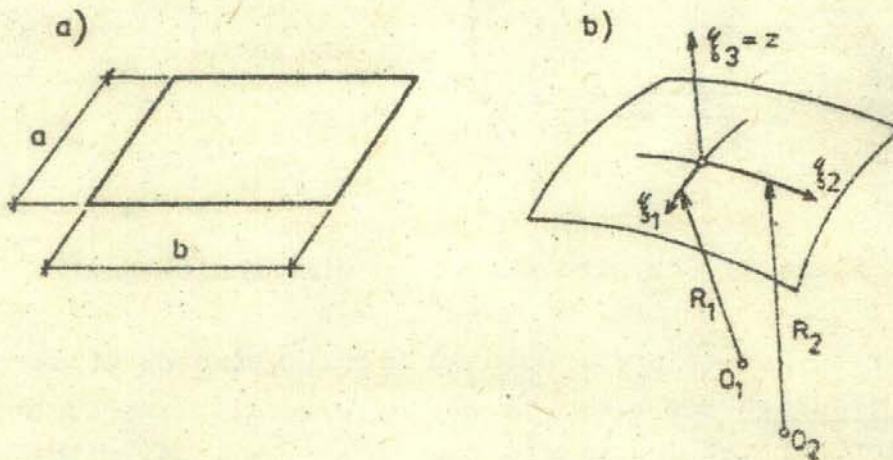
Tę długość specyfikujemy różnie, w zależności od typu powierzchni środkowej. Dla przykładu: w płytach prostokątnych $l = a$ dla $a < b$ i stosuje się oszacowanie:

$$\frac{h}{a} < \frac{1}{10}, \quad (1.2a)$$

a dla powierzchni zakrzywionych o głównych promieniach krzywizny R_1, R_2 ustrój będzie cienki jeśli zachodzi:

$$\frac{h}{R_{\min}} < \frac{1}{20} \div \frac{1}{30}. \quad (1.2b)$$

W ustrojach cienkich wszystkie rozważania odnosimy do powierzchni środkowej, którą opisujemy dwoma niezależnymi parametrami /współrzedne ξ_1, ξ_2 na rys. 1.2b/, stąd problemy analizy takich ustrojów są geometrycznie dwuwymiarowe.



Rys.1.2. Charakterystyczne wymiary związane z powierzchnią środkową

Jeśli ustroje są grube /grubość h jest porównywalna z pozostałymi wymiarami powierzchni środkowej/, to stosowanie opisów dwuwymiarowych może prowadzić do znacznych rozbieżności w porównaniu z ujęciem geometrycznie trójwymiarowym.

Jak już wspomnieliśmy w zależności od zakrzywienia powierzchni środkowej dźwigary powierzchniowe dzielimy najogólniej na płyty /powierzchnia środkowa jest płaszczyzną/ i powłoki.

Jeśli rozkład naprężeń wzdłuż grubości jest jednorodny /niezależny od zmiennej $\xi_3 = z$ /, to taki stan nazywamy bezmomentowym /często używa się też nazwy stanu tarczowego w płytach lub błonowego w powłokach/.

Płyty pracujące w stanie bezmomentowym nazywamy tarczami, aby je odróżnić od płyt zginanych. Podobnie w powłokach czasami dla precyzyjniejszego określenia używa się nazwy powłoki zginane.

W dalszym ciągu, mówiąc o płytach lub powłokach, będziemy mieli na myśli ustroje powierzchniowe zginane, dodając odpowiednie określenia dla stanu bezmomentowego.

Stan bezmomentowy jest najkorzystniejszy z punktu widzenia projektowania optymalnych konstrukcji, toteż dąży się do jego realizacji poprzez odpowiednie kształtowanie konstrukcji i jej podparcia, jak też sposobu przykładania obciążeń zewnętrznych. Powstaje przy tym nowy problem zabezpieczenia ustroju powierzchniowego przed utrata stateczności, tzn. przed gwałtownym przejściem do stanu giętnego.

1.2. Z a ł o ż e n i a

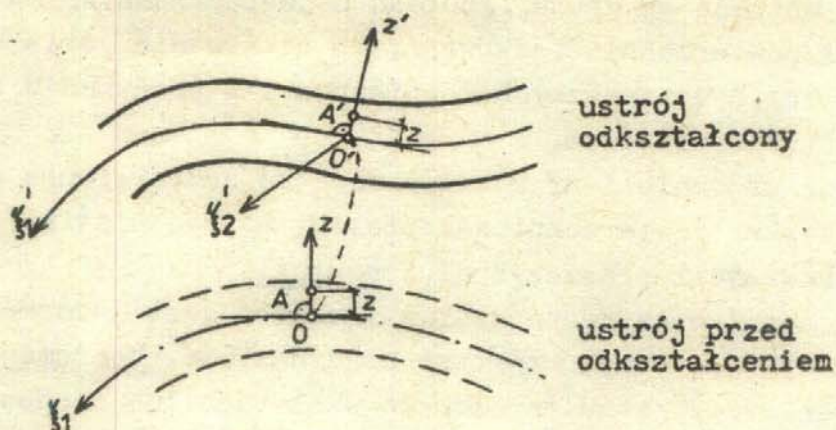
Znaczne uproszczenie rozwiązań otrzymujemy, jeśli przyjmiemy założenia, nazywane hipotezami Kirchhoffa-Love'a. Hipotezy te nakładają ograniczenia na deformacje i stan naprężeń ustroju powierzchniowego. Ujmujemy je w dwóch punktach:

1. Odcinek prostoliniowy, prostopadły do nieodkształconej powierzchni środkowej pozostaje prostoliniowy, niewydłużalny i prostopadły do powierzchni odkształconej. Na rys. 1.3 pokazano przekrój normalny, zaznaczony liniami przerywanymi na płaszczyźnie nieodkształconej (ξ_1, z).

Wypowiedziana hipoteza kinematyczna K - L jest odpowiednikiem hipotezy płaskich przekrojów Bernoulliego, stosowanej w teorii zginania prętów.

2. Naprężenie σ_z jest tak małe w porównaniu z pozostałymi składowymi tensora naprężeń w szczególności $\sigma_z \ll \sigma_x$ i $\sigma_z \ll \sigma_y$, że można je pominąć w związkach fizycznych, tzn.:

$$\sigma_z (\xi_1, \xi_2, z) \equiv 0. \quad (1.3)$$



Rys.1.3. Hipoteza kinematyczna K-L

Obydwie hipotezy K - L zostały potwierdzone doświadczalnie i obliczeniowo dla cienkich ustrojów powierzchniowych. Oprócz hipotez K - L przyjmujemy jeszcze dwa dalsze założenia, na których opiera się liniowa teoria:

A. Obowiązuje zasada zeszywnienia, tzn. przemieszczenia są na tyle małe, że rozważania można odnosić do ustroju nieodkształconego. Oznacza to, że obowiązują liniowe związki Cauchy'ego między przemieszczeniami i odkształceniami.

B. Materiał jest liniowo sprężysty, tj. obowiązuje prawo Hooke'a wyrażające liniowy związek między tensorami naprężeń i odkształceń.

Przyjmujemy jeszcze dalsze założenia, aby uprościć równania:

a/ ustrój powierzchniowy jest jednorodny /w szczególności nieuwarstwiony/, o stałej grubości:

$$h(\xi_1, \xi_2) = \text{const.}, \quad (1.4)$$

b/ materiał jest izotropowy o stałych sprężystości E, ν ,

c/ ograniczamy się do obciążeń przykładanych statycznie, tzn. będziemy pomijali siły bezwładności i energię kinetyczną podczas ruchu ustroju,

d/ rozważamy tylko odkształcenia wywołane obciążeniami zewnętrznymi lub zadanymi przemieszczeniami, pomijamy natomiast zmiany temperatury.

Hipotezy K - L prowadzą do sprzeczności, na które wskażemy w ciągu wykładu. W niektórych problemach /np. zagadnienia utraty stateczności/ odrzucamy niektóre założenia.

2. RÓWNANIA PŁYT

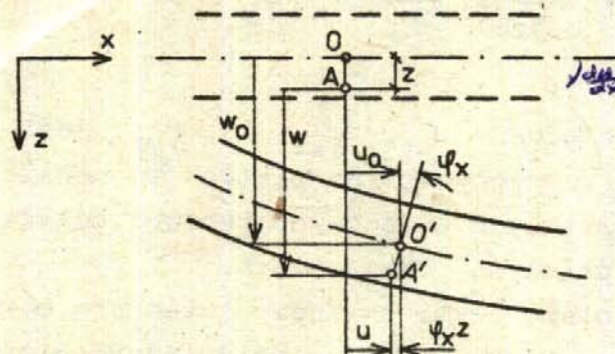
2.1. Związki odkształceń i naprężeń
z przemieszczeniami
we współrzędnych kartezjańskich

Zgodnie z kinematyczną hipotezą K - L przemieszczenia dowolnej warstwy /płaszczyzny równooddalonej/ płyty wynoszą:

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) + \varphi_x(x,y) \cdot z,$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) + \varphi_y(x,y) \cdot z, \quad (2.1)$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y).$$



Rys.2.1. Przemieszczenia płyty na płaszczyźnie (x, z)

Na rys. 2.1 pokazano przemieszczenia na płaszczyźnie (x, z) . Zgodnie z założeniem o niewydłużalności odcinka i małymi przemieszczeniami przyjmuje się przemieszczenia normalne do płaszczyzny środkowej $w(x, y, z) \approx w_0(x, y)$ oraz kąty obrotu odcinka normalnego:

$$\varphi_\alpha = - \frac{\partial w_0}{\partial \alpha} \quad \text{dla } \alpha = x, y, \quad (2.2)$$

gdzie zgodnie z założeniem małych przemieszczeń przyjmujemy $\varphi \approx \text{tg } \varphi \approx \sin \varphi$.

Korzystając ze związków Cauchy'ego obliczamy składowe tensora odkształcenia:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} z = \varepsilon_x^0(x,y) + \kappa_x(x,y)z, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} z = \varepsilon_y^0(x,y) + \kappa_y(x,y)z, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) z = \\ &= \gamma_{xy}^0(x,y) + \kappa_{xy}(x,y)z, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x = 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y = 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Zerowanie się odkształceń ε_z , γ_{xz} i γ_{yz} jest konsekwencją poczynionych założeń. W rzeczywistych płytach te odkształcenia są znacznie mniejsze od pozostałych składowych tensora odkształceń, co uzasadnia ich pomijanie w dalszych rozważaniach.

Tak więc jedynymi niezerowymi składowymi tensora odkształceń są odkształcenia ε_x , ε_y , γ_{xy} , które odpowiadają płaskiemu stanowi odkształcenia. W tym stanie występują wielkości, które dalej będziemy nazywali uogólnionymi odkształceniami. Rozdzielamy je na uogólnione odkształcenia stanu tarczowego:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\tag{2.4a}$$

oraz stanu giętnego:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\tag{2.4b}$$

Wielkości κ_x , κ_y odpowiadają krzywiznom, a κ_{xy} spaczeniu odkształconej powierzchni środkowej, która była początkowo płaszczyzną. Wzory (2.4b) są uproszczone zgodnie z założeniem małych przemieszczeń, np.:

$$\kappa_x = - \frac{w_{,xx}}{(1 + w_{,x}^2)^{3/2}} \approx - w_{,xx} .$$

Aby obliczyć składowe tensora naprężeń skorzystamy z równań fizycznych:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] ,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] ,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} .$$

Po wykorzystaniu hipotezy statycznej K - L, w myśl której $\sigma_z = 0$, z przytoczonych równań fizycznych obliczamy:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) ,$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) , \quad (2.5)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} .$$

Pozostałe składowe tensora naprężenia obliczamy z równań równowagi wewnętrznej:

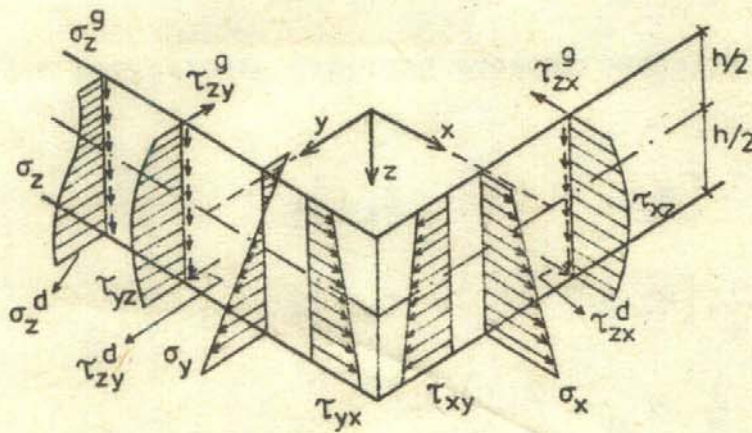
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \rightarrow \tau_{zx} ,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \rightarrow \tau_{zy} ,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \rightarrow \sigma_z ,$$

korzystając przy tym z warunków brzegowych na jednej z płaszczyzn ograniczających, np. na płaszczyźnie dolnej /rys. 2.2/:

$$\tau_{zj}^d = \tau_{zj} \left(x, y, \frac{h}{2} \right), \quad \sigma_z^d = \sigma_z \left(x, y, \frac{h}{2} \right). \quad (2.6)$$



Rys.2.2 Rozkład naprężeń w płycie

Z pierwszego równania równowagi obliczamy pochodną naprężenia τ_{zx} , podstawiając zależności (2.5) i (2.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - X = - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) - \\ &- \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - X = - \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - z \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \right. \\ &+ \left. \nu \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \right] - \\ &- \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - 2z \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right] - X = \\ &- \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] - X = \\
& = - \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\
& + \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w - X.
\end{aligned}$$

Otrzymane równanie całkujemy względem zmiennej z:

$$\begin{aligned}
\tau_{zx} = & - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\quad \right] - \int_{-h/2}^z X dz + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{z^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \\
& + f_1(x, y).
\end{aligned}$$

Funkcję $f_1(x, y)$ obliczamy, korzystając z warunku brzegowego (2.6)₁:

$$f_1(x, y) = \tau_{zx}^d + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h}{2} \left[\quad \right] + \int_{-h/2}^{h/2} X dz - \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w,$$

dzięki czemu dochodzimy do wzoru na naprężenie τ_{zx} :

$$\begin{aligned}
\tau_{zx} = & \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{2} - z \right) \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) \right] - \\
& - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \int_z^{h/2} X dz + \tau_{zx}^d. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Tak samo z drugiego równania równowagi wewnętrznej obliczamy:

$$\begin{aligned}
\tau_{zy} = & \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h}{2} - z \right) \left[\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] - \\
& - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \int_z^{h/2} Y dz + \tau_{zy}^d. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Z trzeciego równania równowagi obliczamy:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - z,$$

a po podstawieniu $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ i $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ze wzorów (2.7), (2.8), scałkowaniu i uwzględnieniu warunku brzegowego (2.6)₃ dochodzimy do zależności:

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - z \right)^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2} - z \right)^2 \cdot \right. \\ & \left. \cdot (h+z) \nabla^2 \nabla^2 w \right] + \int_z^{h/2} \left[\int_z^{h/2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dz \right] dz + \\ & + \int_z^{h/2} z dz + \left(\frac{h}{2} - z \right) \left(\frac{\partial \tau_{zx}^d}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}^d}{\partial y} \right) + \sigma_z^d. \end{aligned} \quad (2.9)$$

W wyprowadzonych wzorach posłużyliśmy się symbolami operatorów Laplace'a /laplasjan i bilaplasjan/:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2.10)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 = \nabla^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Zwróćmy uwagę na sprzeczności, jakie występują w wyprowadzonych związkach. Hipoteza kinematyczna K-L prowadzi do płaskiego stanu odkształceń (2.3), natomiast hipoteza statyczna powoduje powstanie płaskiego stanu naprężeń /obok $\sigma_z = 0$ z równań fizycznych wynika $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ /. Z drugiej strony warunki równowagi wymagają niezerowych wartości naprężeń τ_{zx} , τ_{zy} i σ_z , jak wynika ze wzorów (2.7) - (2.9). Sprzeczności te świadomie dopuszczamy, gdyż nie mają one istotnego znaczenia dla końcowych wyników.

2.2. Związki dla płyty zginanej

Rozpatrzmy przypadek szczególny, gdy na płytę działa jedynie obciążenie poprzeczne $p(x, y)$, o zwrocie zgodnym z osią z , przyłożone do górnej płaszczyzny, a więc:

$$\sigma_z \left(x, y, -\frac{h}{2} \right) = -p(x, y). \quad (2.11)$$

Jako zerowe wartości przyjmujemy:

$$u_0 = u_0 \equiv 0, \quad X = Y = Z = 0, \quad \tau_{zx}^d = \tau_{zy}^d = \sigma_z^d = 0. \quad (2.12a)$$

Po uwzględnieniu tych zależności w (2.7) - (2.8) otrzymujemy:

$$\tau_{zx}^E = \tau_{zy}^E = 0. \quad (2.12b)$$

Przy takich założeniach ulegają uproszczeniu związki przemieszczenia $w(x, y)$ z odkształceniami i naprężeniami:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0,$$

$$\tau_{zx} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w,$$

$$\tau_{zy} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \quad (2.13)$$

$$\sigma_z = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{6} \left(\frac{h}{2} - z \right)^2 (h+z) \nabla^2 \nabla^2 w.$$

Po podstawieniu związku na σ_z do warunku brzegowego (2.11) otrzymujemy równanie płyty zginanej:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p(x, y)}{D}, \quad (2.14)$$

gdzie D jest sztwnością płyty na zginanie:

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (2.15)$$

W rozpatrywanym przypadku płyty zginanej wszystkie wielkości zależą od funkcji ugięcia $w(x,y)$, którą wyznaczymy z równania płyty (2.14).

2.3. Siły przekrojowe i równania równowagi płyty

Zamiast równań równowagi wewnętrznej możemy posłużyć się równaniami odnoszonymi do płaszczyzny środkowej:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) dz = 0,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \right) dz = 0,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) dz = 0,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) z dz = 0,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \right) z dz = 0.$$

Na przykładzie pierwszego równania pokażemy przejście do uogólnionych wielkości. Równanie to możemy napisać w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz}_{n_x} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz}_{n_{yx}} + \underbrace{\tau_{zx} \Big|_{-h/2}^{h/2}}_{P_x} + \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} X dz}_{P_x} = 0,$$

gdzie zaznaczono siły przekrojowe n_x i n_{xy} oraz obciążenia p_x zredukowane do płaszczyzny środkowej.

W ten sposób układ równań równowagi płyty możemy napisać w postaci:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} + p_x = 0,$$

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + p_y = 0,$$

(2.16a)

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p_z = 0,$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x + b_x = 0,$$

(2.16b)

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y + b_y = 0.$$

W równaniach tych występują następujące siły przekrojowe:

a/ siły podłużne /normalne i styczne/

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz,$$

$$n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz,$$

(2.17a)

b/ siły poprzeczne

$$q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz, \quad q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dz,$$

(2.17b)

c/ momenty/zginające i skręcające/

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz,$$

(2.17c)

$$m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz. \quad (2.17c)$$

Obciążenia powierzchniowe wynikają z redukcji do płaszczyzny środkowej obciążeń zewnętrznych i sił masowych:

$$p_x = \tau_{zx}^d - \tau_{zx}^g + \int_{-h/2}^{h/2} X dz, \quad (2.18a)$$

$$p_y = \tau_{zy}^d - \tau_{zy}^g + \int_{-h/2}^{h/2} Y dz,$$

$$p_z = \sigma_z^d - \sigma_z^g + \int_{-h/2}^{h/2} Z dz,$$

$$b_x = (\tau_{zx}^d + \tau_{zx}^g) \frac{h}{2} + \int_{-h/2}^{h/2} X z dz, \quad (2.18b)$$

$$b_y = (\tau_{zy}^d + \tau_{zy}^g) \frac{h}{2} + \int_{-h/2}^{h/2} Y z dz.$$

Siły przekrojowe można wyrazić przez uogólnione odkształcenia. Odnosi się to do tzw. czynnych sił, do których zaliczamy siły podłużne i momenty. Odpowiednie przekształcenia pokazujemy na przykładzie siły normalnej n_x . Najpierw korzystamy ze związku fizycznego (2.5), a następnie ze związków kinematycznych (2.3):

$$\begin{aligned} n_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) dz = \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(\epsilon_x^0 + \nu \epsilon_y^0) \int_{-h/2}^{h/2} dz + (\alpha_x + \nu \alpha_y) \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} z dz}_0 \right] = \\ &= \frac{E h}{1-\nu^2} (\epsilon_x^0 + \nu \epsilon_y^0). \end{aligned}$$

W ten sposób dochodzimy do równań, które można nazwać równaniami fizycznymi, określającymi związki między uogólnionymi naprężeniami /czynne siły przekrojowe/ i uogólnionymi odkształceniami:

$$\begin{aligned} n_x &= B (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_y^0), & n_y &= B (\varepsilon_y^0 + \nu \varepsilon_x^0), \\ n_{xy} &= n_{yx} = \frac{1-\nu}{2} B \gamma_{xy}^0, \end{aligned} \quad (2.19a)$$

$$\begin{aligned} m_x &= D (\kappa_x + \nu \kappa_y), & m_y &= D (\kappa_y + \nu \kappa_x), \\ m_{xy} &= m_{yx} = \frac{1-\nu}{2} D \kappa_{xy}, \end{aligned} \quad (2.19b)$$

gdzie występuje szywność tarczowa B i plytowa D /dokładniej szywności stanu tarczowego i giętnego/:

$$B = \frac{E h}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (2.20)$$

Siły poprzeczne q_x i q_y są nazywane biernymi siłami przekrojowymi, gdyż nie wynikają one ze związków fizycznych, lecz z równań równowagi.

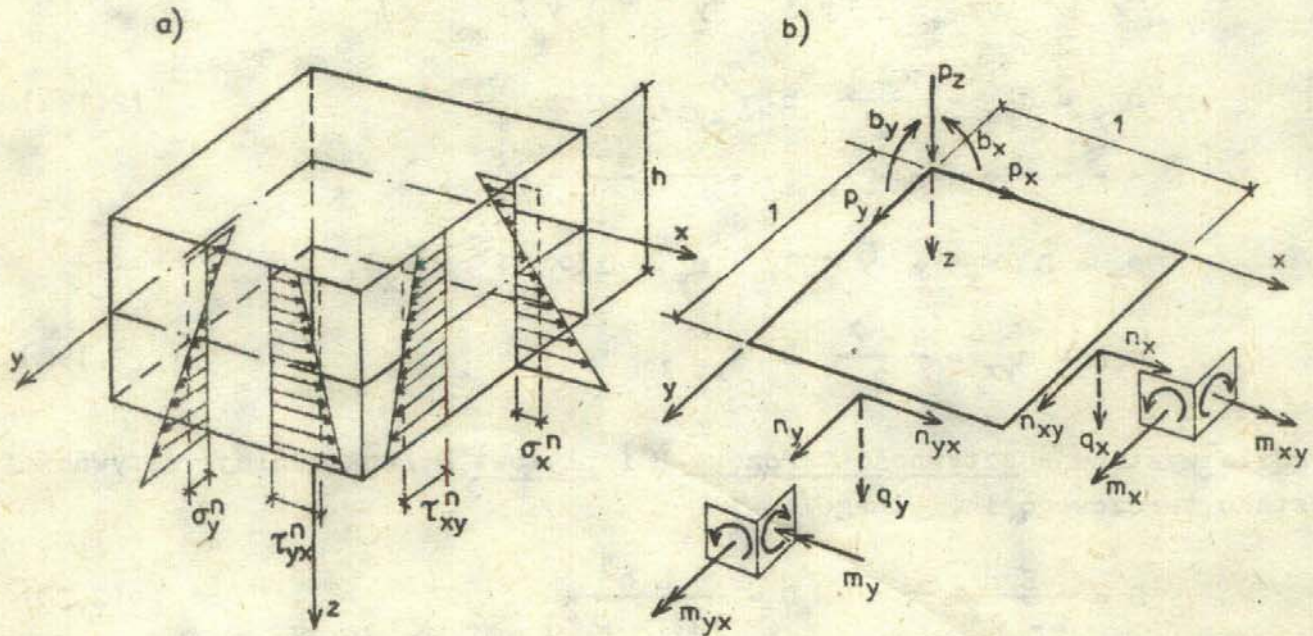
Jak wynika ze wzorów (2.17) siły przekrojowe są określane na jednostkę długości linii współrzędnych na powierzchni środkowej, a więc - mówiąc dokładniej - są to intensywności sił przekrojowych o wymiarach:

$$\begin{aligned} [n_{ij}] &= N/m, & [q_i] &= N/m, \\ [m_{ij}] &= Nm/m \quad \text{dla} \quad i, j = x, y. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Hipoteza kinematyczna K-L w połączeniu z założeniem B o liniowo-sprężystym materiale narzuca liniowy rozkład naprężeń σ_x , σ_y i τ_{xy} . Dzięki temu na podstawie znajomości sił podłużnych i momentów można jednoznacznie obliczyć wartości wymienionych naprężeń w dowolnym punkcie płyty:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^n + \sigma_x^m = \frac{n_x}{h} + \frac{12 m_x}{h^3} z, \\ \sigma_y &= \sigma_y^n + \sigma_y^m = \frac{n_y}{h} + \frac{12 m_y}{h^3} z, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^n + \tau_{xy}^m = \frac{n_{xy}}{h} + \frac{12 m_{xy}}{h^3} z = \tau_{yx} \quad (2.22)$$



Rys.2.3. Rozkład naprężeń i dodatnie zwroty sił przekrojowych i obciążeń powierzchniowych

Na rys.2.3a pokazano rozkłady naprężeń odpowiadające dodatnim wartościom sił podłużnych i momentów, a na rys. 2.3b wektory tych sił w odniesieniu do płaszczyzny środkowej. Na tym samym rysunku liniami przerywanymi zaznaczono dodatnie zwroty sił poprzecznych oraz intensywności obciążeń zewnętrznych.

Wracając do równań równowagi należy zwrócić uwagę, że podobnie jak równania fizyczne dzielą się one na równania stanu tarczowego (2.16a) i stanu giętnego (2.16b). Te ostatnie równania można przekształcić przez obliczenie sił poprzecznych z równań równowagi momentów:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} + b_x, \\ q_y &= \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + b_y, \end{aligned} \quad (2.23)$$

i podstawienie do równania równowagi (2.16b)₁. Dochodzimy w ten sposób do równania płyty wyrażonego przez momenty:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p, \quad (2.24)$$

gdzie obciążenie poprzeczne wynosi:

$$p = p_z + \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y}. \quad (2.25)$$

2.4. Równania tarczy i płyty zginanej

2.4.1. Równania przemieszczeniowe

Siły przekrojowe można wyrazić przez przemieszczenia płaszczyzny środkowej^x $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$:

$$n_x = B(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = B\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

$$n_y = B\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (2.26a)$$

$$n_{xy} = B \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$m_x = D(\kappa_x + \nu \kappa_y) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$m_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad (2.26b)$$

$$m_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

^x Dla przejrzystości zapisu będziemy dalej pomijać indeks o przy przemieszczeniach i odkształceniach, gdy rozważania odnoszą się do płaszczyzny środkowej.

Po podstawieniu (2.26b) do (2.24) otrzymujemy związki między siłami poprzecznymi i ugięciem w :

$$\begin{aligned} q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + b_x, \\ q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + b_y. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Uwzględnienie równań fizycznych (2.26) w równaniach (2.16a) i (2.24) prowadzi do równań tarczy i równania płyty zginanej w przemieszczeniach:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{p_x}{B}, \quad (2.28a)$$

$$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v = -\frac{p_y}{B},$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D}. \quad (2.28b)$$

2.4.2. Równania tarczy w siłach

Do równań równowagi (2.16a) dołączamy równanie nierozdzielności odkształceń:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (A)$$

Z równań fizycznych (2.19a) wynikają związki:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (n_x - \nu n_y),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{Eh} (n_y - \nu n_x), \quad (B)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} n_{xy},$$

które po podstawieniu do równania nierozdzielności prowadzą do równania:

$$\frac{\partial^2 n_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2} \right) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 n_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (C)$$

Po zróżniczkowaniu pierwszego równania równowagi (2.16a) względem zmiennej x , a równania (2.16a)₂ względem y i po dodaniu stronami otrzymujemy:

$$2 \frac{\partial^2 n_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} \right). \quad (D)$$

Podstawienie zależności (D) do (C) daje równanie nierozdzielności w postaci:

$$\nabla^2 (n_x + n_y) + (1+\nu) \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} \right) = 0. \quad (E)$$

Łącznie otrzymujemy 3 równania dla wyznaczenia trzech sił przekrojowych n_x , n_y , n_{xy} /równania równowagi (2.16a) i równanie nierozdzielności (E)/:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} &= -p_x, \\ \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} &= -p_y, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\nabla^2 (n_x + n_y) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} \right).$$

Jeśli warunki brzegowe są statyczne /wyrażone w siłach/, to zagadnienie obliczania tarcz jest statycznie wyznaczalne, gdyż można obliczyć siły przekrojowe z równań (2.29) bez uciekania się do przemieszczeń.

Zamiast trzech niewiadomych sił można posłużyć się funkcją naprężeń Airy'ego F , która spełnia tożsamościowo równania równowagi. Uzyskujemy to dzięki związkom:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int_0^x p_x dx. \quad (2.30)$$

$$n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int_0^y p_y dy, \quad (2.30)$$

$$n_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Po podstawieniu (2.30) do równania nierozdzielności (2.29)₃ otrzymujemy:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = -(1+\nu) \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} \right) + \nabla^2 \left(\int_0^x p_x dx + \int_0^y p_y dy \right). \quad (2.31)$$

W szczególnym przypadku stałych wartości obciążeń powierzchniowych $p_x(x, y) = c_x$, $p_y = c_y$ otrzymujemy:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - c_x x, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - c_y y, \quad n_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0. \quad (2.32)$$

2.4.3. Równania rozdzielone płyty zginanej

Jeśli dodamy stronami zależności (2.26b) dla m_x i m_y , to otrzymujemy:

$$m_x + m_y = -(1+\nu) D \nabla^2 w. \quad (A)$$

Wprowadzenie zastępczego momentu:

$$m = \frac{m_x + m_y}{1+\nu} \quad (2.33)$$

umożliwia przekształcić równania płyty zginanej do postaci:

$$\nabla^2 m = -p,$$

$$\nabla^2 w = - \frac{m}{D}. \quad (2.34)$$

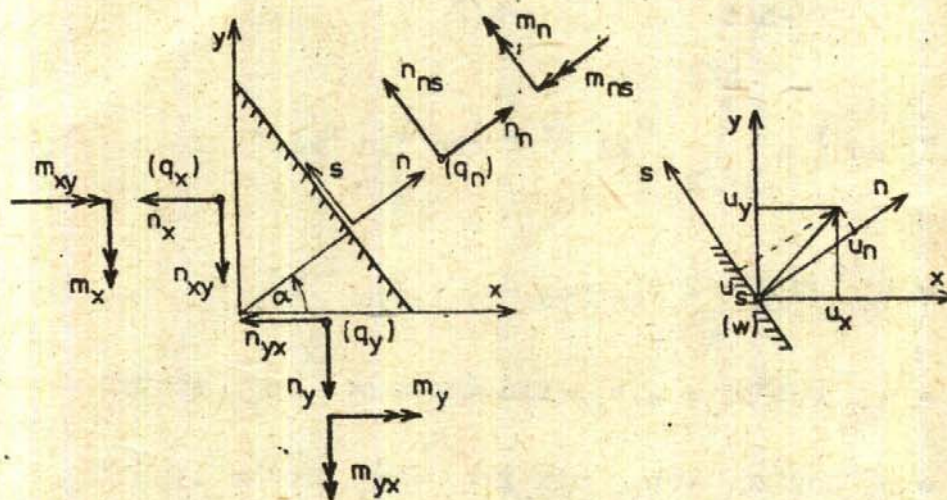
Równania te są stosunkowo rzadko używane ze względu na trudności w formułowaniu warunków brzegowych dla m .

2.5. Transformacje sił przekrojowych i przemieszczeń

Dla przejrzystości zapisu będziemy dalej pomijać indeks o przy przemieszczeniach lub odkształceniach, gdyż dalsze rozważania będziemy odnosili do płaszczyzny środkowej.

Oprócz kierunków wyznaczonych liniami współrzędnych x, y będziemy się też interesowali innymi, wzajemnie ortogonalnymi liniami, które oznaczymy przez n, s /kierunek normalny i styczny/, obróconymi o kąt α względem wyjściowego układu kartezjańskiego.

Będzie to przydatne np. do formułowania warunków brzegowych dla krawędzi nierównoległych do osi x, y , jak pokazano na rys.2.4; innym przykładem może być dowolny kierunek układania zbrojenia lub poszukiwanie kierunków głównych odpowiednich tensorów uogólnionych naprężeń.



Rys.2.4. Transformacja sił przekrojowych i przemieszczeń

Siły przekrojowe tworzą symetryczne tensory sił podłużnych i momentów:

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} n_x & n_{xy} \\ n_{yx} & n_y \end{pmatrix}, \quad \tilde{m} = \begin{pmatrix} m_x & m_{xy} \\ m_{yx} & m_y \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

a siły poprzeczne i przemieszczenia tworzą odpowiednio wektory /tensory o walencji jeden/:

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Przy obrocie układu wokół osi z tak, że $x \rightarrow x' = n$, $y \rightarrow y' = s$, $z = z'$ obowiązuje prawo transformacji wektora i tensora o walencji dwa:

$$a_{i'} = l_{ji} a_j \quad \text{gdzie } l_{ji} = \cos(j, i')$$

$$\sigma_{i'j'} = l_{ki} l_{kj} \sigma_{kl}.$$

Łatwo wykazać, że prawo transformacji obowiązuje również do uogólnionych naprężeń /sił przekrojowych/. Pokażemy to na przykładzie składowej

n_n :

$$\begin{aligned} n_n = n_{nn} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{nn} dz = \int_{-h/2}^{h/2} l_{kn} l_{ln} \sigma_{kl} dz = \\ &= l_{kn} l_{ln} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kl} dz = l_{kn} l_{ln} n_{kl} = \\ &= l_{xn}^2 n_{xx} + 2 l_{xn} l_{yn} n_{xy} + l_{yn}^2 n_{yy} = \\ &= n_{xx} \cos^2 \alpha + 2 n_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + n_{yy} \sin^2 \alpha = \\ &= n_x \cos^2 \alpha + n_{xy} \sin 2\alpha + n_y \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Tak samo można transformować składowe tensora momentów.

Łącznie wzory na składowe tensorów sił uogólnionych i przemieszczeń odpowiadających przekrojowi płyty o normalnej n mają postać:

$$\begin{aligned} n_n &= n_x \cos^2 \alpha + n_y \sin^2 \alpha + n_{xy} \sin 2\alpha, \\ n_{ns} &= \frac{1}{2} (n_y - n_x) \sin 2\alpha + n_{xy} \cos 2\alpha, \end{aligned} \quad (2.37a)$$

$$m_n = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + m_{xy} \sin 2\alpha, \quad (2.37b)$$

$$m_{ns} = \frac{1}{2} (m_y - m_x) \sin 2\alpha + m_{xy} \cos 2\alpha,$$

$$q_n = q_x \cos \alpha + q_y \sin \alpha, \quad (2.38)$$

$$u_n = u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha,$$

$$u_s = -u_x \sin \alpha + u_y \cos \alpha. \quad (2.39)$$

2.6. Warunki brzegowe

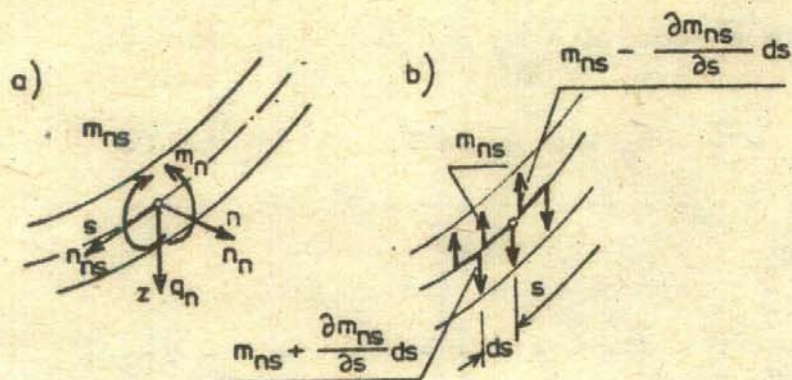
Zajmiemy się najpierw równaniami przemieszczeniowymi (2.28). Z rzędu tych równań wynika, że na każdym brzegu należy sformułować po dwa warunki brzegowe dla stanu tarczowego i stanu giętnego. Jeśli warunki dotyczą uogólnionych przemieszczeń, to mamy kinematyczne warunki brzegowe:

$$u_n = \bar{u}_n, \quad u_s = \bar{u}_s, \quad w = \bar{w}, \quad \varphi_n = \bar{\varphi}_n, \quad (2.40)$$

gdzie wielkości nadkreślane oznaczają znane /dane/ funkcje zmiennej s , która parametryzuje krawędź płyty o współrzędnych $\bar{x} = x(s)$, $\bar{y} = y(s)$. W szczególnym przypadku brzegu utwierdzonego mamy:

$$\bar{u} = \bar{u}_s = \bar{w} = 0, \quad \bar{\varphi}_n = 0. \quad (2.41)$$

Jeśli na krawędzi płyty są znane obciążenia /siły brzegowe/, to mamy statyczne warunki brzegowe. Tak samo jak dla przemieszczeń możemy zadać tylko 4 niezależne warunki. Ponieważ na krawędzi występuje 5 sił $/n_n, n_{ns}, q_n, m_n, m_{ns}/$, więc należy je zamienić czterema, statycznie równoważnymi siłami zastępczymi, które odpowiadają uogólnionym przemieszczeniom występującym w (2.40). Ścisłe uzasadnienie podanego stwierdzenia można uzyskać poprzez rachunek wariacyjny /por. [18], s.267/. Na rys. 2.5 pokazano zastąpienie momentu skręcającego m_{ns} przez parę dodatkowych sił poprzecznych $\partial m_{ns} / \partial s$.



Rys.2.5. Siły brzegowe i zastąpienie momentu skręcającego parami dodatkowych sił poprzecznych

Zamiast siłą poprzeczną q_n przy brzegu posługujemy się zastępczą siłą poprzeczną \bar{q}_n , którą wyznaczamy w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\bar{q}_n &= q_n + \left(m_{ns} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} ds - m_{ns} \right) \frac{1}{ds} = \\ &= q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}.\end{aligned}\quad (2.42)$$

Dla brzegu prostoliniowego otrzymujemy:

$$\bar{q}_n = -D \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right].\quad (2.42a)$$

Dzięki zastępczej sile brzegowej \bar{q}_n możemy sformułować 4 statyczne warunki brzegowe:

$$n_n = \bar{n}_n, \quad n_{ns} = \bar{n}_{ns}, \quad q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = \bar{q}_n, \quad m_n = \bar{m}_n.\quad (2.43)$$

Jeśli zadane wartości sił brzegowych są równe zero, to dochodzimy do warunków brzegu swobodnego / są one też nazywane naturalnymi warunkami brzegowymi/:

$$n_n = n_{ns} = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = 0, \quad m_n = 0.\quad (2.44)$$

Warunki statyczne można też wyrazić przez przemieszczenia, korzystając ze wzorów (2.19), (2.4) i (2.42):

$$\frac{\partial u_n}{\partial n} + \nu \frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{\bar{n}_n}{B}, \quad \frac{\partial u_s}{\partial s} + \nu \frac{\partial u_n}{\partial n} = \frac{\bar{n}_{ns}}{B}, \quad (2.43a)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right] = \frac{\bar{q}_n}{D}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = -\frac{\bar{m}_n}{D}.$$

Oprócz podanych warunków można również mówić o mieszanych warunkach brzegowych. Są one kombinacją warunków kinematycznych i statycznych.

Ze względu na dalsze obliczenia podajemy warunki brzegowe dla płyty zginanej:

a/ utwierdzenie

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (2.45)$$

b/ brzeg swobodny

$$m_n = 0, \quad \bar{q}_n = 0, \quad (2.46)$$

c/ przegubowe podparcie

$$w = 0, \quad m_n = 0. \quad (2.47)$$

Jeśli brzeg jest prostoliniowy i niepodatny, tzn. wzdłuż tego brzegu zachodzi $w = 0$, to wtedy również $\partial w / \partial s = 0$ i $\partial^2 w / \partial s^2 = 0$. Dla takiego przypadku upraszcza się warunek przegubowego podparcia:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0. \quad (2.47a)$$

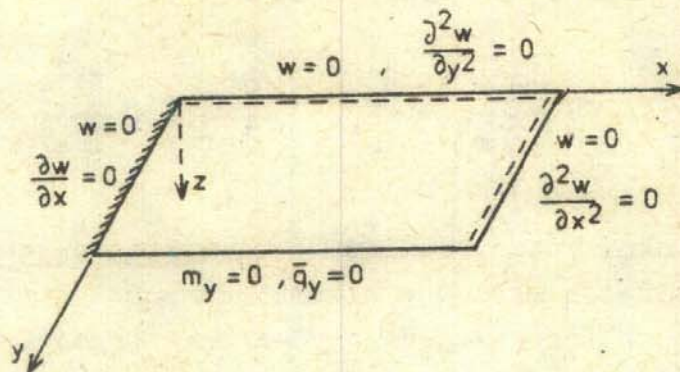
Na rys. 2.6 pokazano przykład warunków brzegowych dla zginanej płyty prostokątnej.

Przy zginaniu płyt pojawiają się skupione siły w narożach. Tok ich powstania tłumaczy rysunek 2.7. Wartość siły R wynosi:

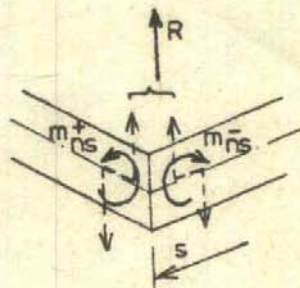
$$R = m_{ns}^+ + m_{ns}^- . \quad (2.48)$$

Jeśli brzegi schodzą się pod kątem prostym, to wtedy $m_{ns}^+ = m_{ns}^- = m_{ns}$ i otrzymujemy:

$$R = 2 m_{ns} . \quad (2.48a)$$



Rys.2.6. Przykład warunków brzegowych dla prostokątnej płyty zginanej



Rys.2.7. Interpretacja pojawienia się siły skupionej w narożu

Nie zajmiemy się dokładniej sformułowaniem warunków brzegowych dla równania tarczy (2.31). Są one dokładnie omówione w teorii sprężystości w ramach analizy płaskiego stanu naprężeń.

2.7. Równania płyt we współrzędnych biegunowych

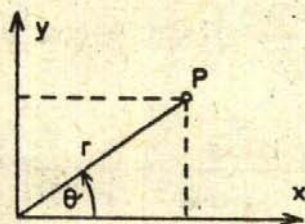
2.7.1. Operatory różniczkowe dla współrzędnych biegunowych

Wszystkie zależności wyprowadziliśmy we współrzędnych kartezjańskich. W często stosowanych płytach kołowych wygodniej jest posługiwać się współrzędnymi biegunowymi. Jak wynika z rys. 2.8 zachodzi następujący związek między współrzędnymi kartezjańskimi x, y i biegunowymi r, θ :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

lub

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{y}{x}.$$



Rys.2.8. Układy współrzędnych dla określenia położenia punktu P

Korzystając z tych związków obliczamy pochodne:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \vartheta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \vartheta,$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \vartheta}{r}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\cos \vartheta}{r}.$$

Pochodne funkcji $f[r(x,y), \vartheta(x,y)]$ wynoszą:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{r},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r} \sin \vartheta + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\cos \vartheta}{r}.$$

Tak samo obliczamy drugie pochodne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{r} \right) \cos \vartheta - \\ &- \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{r} \right) \frac{\sin \vartheta}{r} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \cos^2 \theta - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \sin \theta \cos \theta - \\
&- \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \sin^2 \theta = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \cos^2 \theta - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta + \\
&+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \sin^2 \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \sin 2\theta + \\
&+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \cos^2 \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \cos 2\theta + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) \sin 2\theta.
\end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy, że oś r pokrywa się z osią x , to w podanych wzorach należy podstawić $\theta = 0$, co daje wzory na operatory różniczkowe:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (2.50)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(4 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right].$$

Dzięki operatorom (2.50) możemy posługiwać się wzorami i równaniami wyprowadzonymi we współrzędnych kartezjańskich. Dla przykładu przytaczamy wzory na siły przekrojowe płyty zginanej:

$$m_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right],$$

$$m_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right],$$

$$m_{r\theta} = -D (1 - \nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad (2.51)$$

$$q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w,$$

$$q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w,$$

$$\bar{q}_r = q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial m_{r\theta}}{\partial \theta}.$$

2.7.2. Stan kołowo-symetryczny płyty zginanej

Jeśli wszystkie wielkości są niezależne od zmiennej obwodowej θ , to taki stan nazywamy kołowo-symetryczny. W takim przypadku zmienną niezależną jest tylko promień r i pochodne cząstkowe zamieniamy pochodnymi zwyczajnymi. Równania płyty zginanej mają postać:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{p(r)}{D},$$

$$m_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right),$$

$$m_{\theta} = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right), \quad (2.52)$$

$$q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \bar{q}_r,$$

$$q_{\theta} = 0, \quad m_{r\theta} = 0.$$

Analizę płyt kołowo-symetrycznych można uprościć. Z równania równowagi części płyty ograniczonej walcem o promieniu r /rys. 2.9/:

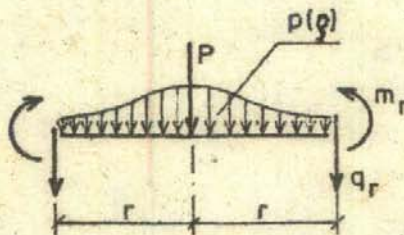
$$2\pi r q_r + P + 2\pi \int_0^r p(\varphi) \varphi d\varphi = 0.$$

wynika wzór na siłę poprzeczną:

$$q_r = -\frac{P}{2\pi r} - \frac{1}{r} \int_0^r p(\varphi) \varphi d\varphi. \quad (2.53)$$

Dla obciążenia równomiernie rozłożonego $p_0 = \text{const.}$ otrzymujemy:

$$q_r = -\frac{P}{2\pi r} - \frac{p_0 r}{2}. \quad (2.53a)$$



Rys.2.9. Obliczenie siły poprzecznej dla płyty kołowo-symetrycznej

Jako zmienną podstawową przyjmujemy dalej kąt ugięcia:

$$\varphi_r \equiv \varphi = -\frac{dw}{dr}, \quad (2.54)$$

przez który wyrażamy siłę poprzeczną:

$$q_r = D \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) = D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right].$$

Po podzieleniu obydwu stron tej zależności przez D otrzymujemy równanie, z którego można obliczyć kąt ugięcia φ :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = \frac{q_r}{D} = -\frac{1}{Dr} \left(\frac{P}{2\pi} + \int_0^r p(\varrho) \varrho d\varrho \right). \quad (2.55)$$

Przez kąt ugięcia φ można wyrazić również momenty zginające:

$$\begin{aligned} m_r &= D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right), \\ m_\theta &= D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.8. Energia potencjalna płyty

Energia potencjalna płyty składa się z energii potencjalnej sił wewnętrznych i energii potencjalnej obciążeń zewnętrznych:

$$\Pi = U + W = \frac{1}{2} \iint_A \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon} dA + \left(- \iint_A \underline{p}^T \underline{u} dA - \oint_S \underline{R}^T \underline{r} dS \right), \quad (2.57)$$

gdzie dla skrócenia posłużono się zapisem macierzowym dla wielkości uogólnionych: naprężeń $\underline{\sigma}$, odkształceń $\underline{\varepsilon}$, obciążeń powierzchniowych \underline{p} , odpowiadających im przemieszczeń \underline{u} , obciążeń brzegowych \underline{R} i przemieszczeń brzegu \underline{r} :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \{ \underline{\sigma}_n, \underline{\sigma}_m \} = \{ n_x, n_y, n_{xy} \mid m_x, m_y, m_{xy} \}, \\ \underline{\varepsilon} &= \{ \underline{\varepsilon}_n, \underline{\varepsilon}_m \} = \{ \varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0 \mid \alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy} \}, \\ \underline{p} &= \{ p_x, p_y, p_z, b_x, b_y \}, \\ \underline{u} &= \{ u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y \}, \\ \underline{R} &= \{ \bar{n}_n, \bar{n}_s, \bar{q}_n, \bar{m}_n \}, \\ \underline{r} &= \{ \bar{u}_n, \bar{u}_s, \bar{w}, \bar{\varphi}_n \}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

2.8.1. Energia sprężysta

W przypadku materiału sprężystego podstawiamy równania fizyczne (2.19) do energii potencjalnej U . Wtedy energia potencjalna sił wewnętrznych jest nazywana energiami sprężystymi. Energia sprężysta właściwa /odpowiadająca elementarnej powierzchni płaszczyzny środkowej $dA = dx dy/$ wynosi:

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dz = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \\
 &+ \tau_{xy} \gamma_{xy}) dz = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x (\varepsilon_x^0 + \alpha_x z) + \sigma_y (\varepsilon_y^0 + \alpha_y z) + \\
 &+ \tau_{xy} (\gamma_{xy}^0 + \alpha_{xy} z)] dz = \frac{1}{2} (\varepsilon_x^0 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz + \alpha_x \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz + \\
 &+ \varepsilon_y^0 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz + \alpha_y \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz + \gamma_{xy}^0 \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz + \\
 &+ \alpha_{xy} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz) = \\
 &= \frac{1}{2} (\varepsilon_x^0 n_x + \alpha_{xx} m_x + \varepsilon_y^0 n_y + \alpha_{yy} m_y + \gamma_{xy}^0 n_x + \alpha_{xy} m_{xy}) = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ [\varepsilon_x^0 B (\varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_y^0) + \varepsilon_y^0 B (\varepsilon_y^0 + \nu \varepsilon_x^0) + \gamma_{xy}^0 \frac{1-\nu}{2} B \gamma_{xy}^0] + \right. \\
 &+ \left. [\alpha_x D (\alpha_x + \nu \alpha_y) + \alpha_y D (\alpha_y + \nu \alpha_x) + \alpha_{xy} \frac{1-\nu}{2} D \alpha_{xy}] \right\} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} B \left(\varepsilon_x^0{}^2 + \varepsilon_y^0{}^2 + 2\nu \varepsilon_x^0 \varepsilon_y^0 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy}^0{}^2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} D \left(\chi_x^2 + \chi_y^2 + 2\nu \chi_x \chi_y + \frac{1-\nu}{2} \chi_{xy}^2 \right) = \Phi_n + \Phi_m.$$

Energię sprężystą właściwą stanu tarczowego Φ_n i giętnego Φ_m możemy wyrazić przez przemieszczenia, wykorzystując związki kinematyczne (2.4). W dalszym ciągu dla przejrzystości zapisu pomijamy indeks o i stosujemy skrócone oznaczenia pochodnych cząstkowych:

$$\Phi_n = \frac{B}{2} \left[u_{,x}^2 + v_{,y}^2 + 2\nu u_{,x} v_{,y} + \frac{1-\nu}{2} (u_{,y} + v_{,x})^2 \right] =$$

(2.60a)

$$= \frac{B}{2} \left\{ (u_{,x} + v_{,y})^2 - 2(1-\nu) \left[u_{,x} v_{,y} - \frac{1}{4} (u_{,y} + v_{,x})^2 \right] \right\},$$

$$\Phi_m = \frac{D}{2} \left[w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\nu w_{,xx} w_{,yy} + 2(1-\nu) w_{,xy}^2 \right] =$$

$$= \frac{D}{2} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) [w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xy}^2] \right\}. \quad (2.60b)$$

Energię sprężystą płyty rozdzielamy więc na energię stanu tarczowego /rozciągania, ściskania/ i energię sprężystą zginania:

$$U = U_n + U_m = \int_{(A)} \Phi_n dA + \int_{(A)} \Phi_m dA =$$

$$= \frac{B}{2} \iint_A \{ \quad \} dx dy + \frac{D}{2} \iint_A \{ \quad \} dx dy, \quad (2.61)$$

gdzie między klamrami należy podstawić odpowiednie wyrażenia z (2.60).

Energia sprężysta we współrzędnych biegunowych ma postać:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{B}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left\{ \left(u_{,r} + \frac{u}{r} + \frac{v_{,\theta}}{r} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{u_{,r}}{r} (v_{,\theta} + u) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{4} \left(\frac{u_{,\theta}}{r} + v_{,r} - \frac{v}{r} \right)^2 \right] \right\} r d\theta dr + \quad (2.62) \\
 & + \frac{D}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[w_{,rr} \left(\frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{w_{,r}}{r} \right) - \left(\frac{w}{r} \right)_{,r\theta}^2 \right] \right\} r d\theta dr .
 \end{aligned}$$

2.8.2. Energia sprężysta zginania dla niektórych przypadków płyt

W płytach ograniczonych brzegiem prostoliniowym podpartym niepodatnie, tzn. gdy $\bar{w}(s) = 0$ lub dla dowolnego kształtu brzegu utwierdzonego, wzór na energię sprężystą zginania znacznie upraszcza się. Korzystamy w tym celu z twierdzenia Greena celem przekształcenia wyrażenia w nawiasie kwadratowym. Najpierw przekształcamy całkę /całkowanie przez części/:

$$\begin{aligned}
 \iint_A \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy &= - \oint_S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx - \\
 - \iint_A \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} dx dy &= - \oint_S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \\
 - \oint_S \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy + \iint_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy,
 \end{aligned}$$

stąd wynika:

$$\begin{aligned}
 \iint_A [w_{,xx} w_{,yy} - (w_{,xy})^2] dx dy &= \\
 = \oint_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right). \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

Rozpatrzmy dwa przypadki:

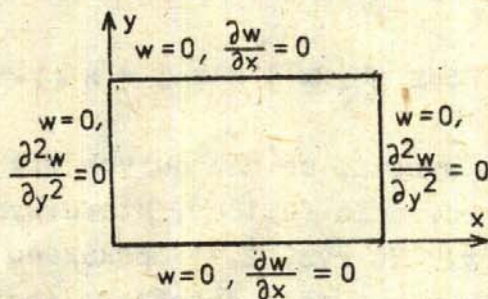
a. Płyta prostokątna niepodatnie podparta.

Dla takiej płyty wynikają związki pokazane na rys. (2.10), a więc oprócz $w = 0$ zachodzi:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{dla brzegów } y = \text{const.}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dla brzegów } x = \text{const.}$$

Tak więc wartość całki (2.63) równa się zero.



Rys.2.10. Związki dla brzegu prostokątnej płyty niepodatnie podpartej

b. W przypadku płyty o brzegu utwierdzonym mamy zależności:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial s} = 0,$$

stąd dla wszystkich brzegów wynikają związki:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

a więc całka (2.63) znika.

Tak więc w podanych, szczególnych przypadkach płyt zginanych energię potencjalną można napisać w postaci:

$$U_m = \frac{D}{2} \iint_A (\nabla^2 w)^2 dx dy. \quad (2.64)$$

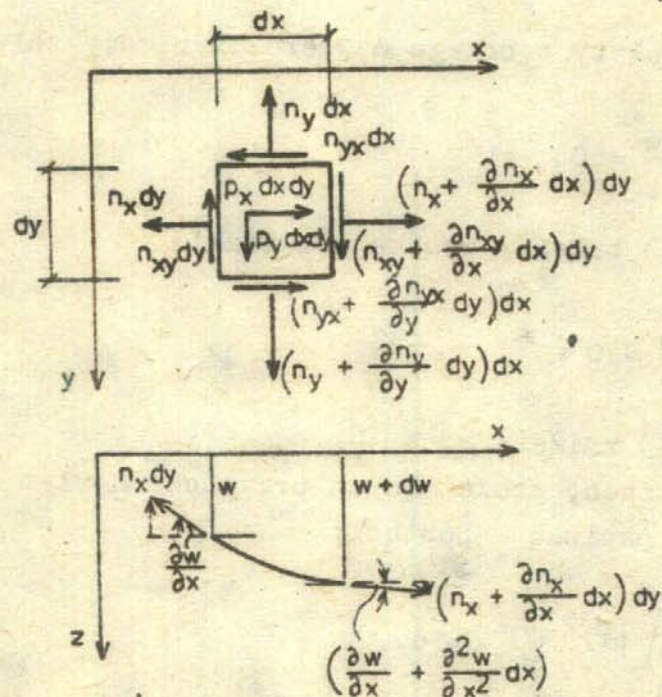
2.9. Zginanie płyty przy działaniu dużych sił w płaszczyźnie środkowej

2.9.1. Równanie różniczkowe płyty

Dotychczas stosowaliśmy założenie A z p.1.2 o zasadzie zeszywnienia. Jeśli obciążenie zewnętrzne wywołują duże siły podłużne, to mogą one mieć duży wpływ na zginanie płyty. Taka sytuacja występuje w zagadnieniach stateczności płyt. W dalszym ciągu zajmujemy się wyprowadzeniem równania płyty przy pominięciu zasady zeszywnienia, lecz przy zachowaniu pozostałych założeń. W szczególności zachowujemy założenie małych obrotów normalnej do powierzchni środkowej, skąd wynika:

$$\sin \varphi_j \approx \varphi_j, \quad \cos \varphi_j \approx 1 \quad \text{dla } j = x, y. \quad (2.65)$$

Z przybliżenia (2.65) wynika, że dla dużych sił podłużnych n_x, n_y, n_{xy} nie ulegną zmianie równania (2.16a), które wyrażają równowagę sił równoległych do osi x, y . Na rys. 2.11 pokazano tylko siły podłużne. Rzut sił osiowych na kierunek z daje dodatkowe obciążenie:



Rys.2.11. Siły działające w płaszczyźnie środkowej płyty zginanej

$$\begin{aligned}
\bar{p}_z \, dx \, dy = & - n_x \, dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} \, dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \, dx \right) dy - \\
& - n_y \, dx \frac{\partial w}{\partial y} + \left(n_y + \frac{\partial n_y}{\partial y} \, dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \, dy \right) dx - \\
& - n_{xy} \, dy \frac{\partial w}{\partial y} + \left(n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} \, dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \, dx \right) dy - \\
& - n_{yx} \, dx \frac{\partial w}{\partial x} + \left(n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} \, dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \, dy \right) dx + \\
& + \left(p_x \frac{\partial w}{\partial x} + p_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \, dy = \\
= & \left[\left(n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& + \left(\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} + p_x \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + p_y \right) \frac{\partial w}{\partial y} + \\
& + \left(\frac{\partial n_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \, dx + \frac{\partial n_y}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \, dy + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \, dx + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \, dy \right) \right] dx \, dy.
\end{aligned}$$

Z wyrażeń w nawiasie pozostaje tylko pierwsze, gdyż drugie i trzecie są równe zero /równania równowagi/, a czwarte pomijamy jako wielkości niższego rzędu /przy $dx, dy \rightarrow 0$ /. Tak więc dodatkowe, zastępcze obciążenie poprzeczne, wynosi:

$$\bar{p}_z = n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (2.66)$$

Obciążenie \bar{p}_z dodajemy do obciążenia p w równaniu płyty zginanej (2.28b). Łącznie równanie płyty z dużymi siłami działającymi w płaszczyźnie środkowej ma postać:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{1}{D} \left(p + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (2.67)$$

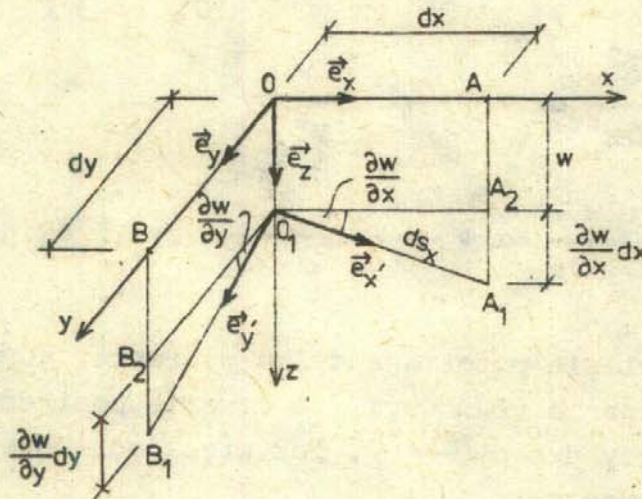
Równanie (2.67) stanowi podstawę analizy utraty stateczności /wyboczenia/ płyt. W takiej analizie siły podłużne są obliczane ze stanu tarzowego równaniami (2.16a).

2.9.2. Dodatkowa energia sprężysta zginania

Oprócz energii sprężystej U_m wywołanej działaniem momentów uwzględniamy dodatkową pracę, jaką siły podłużne wykonają podczas zginania płyty:

$$U'_m = \iint_A (n_x \epsilon'_x + n_y \epsilon'_y + n_{xy} \gamma'_{xy}) dx dy. \quad (2.68)$$

Zakładamy przy tym, że podczas zginania siły podłużne nie ulegają zmianie, a przez ϵ'_x , ϵ'_y , γ'_{xy} oznaczamy odkształcenia wywołane przez ugięcie w . Wzory na te odkształcenia wyprowadzamy na podstawie rys. 2.12.



Rys.2.12. Wpływ zgięcia na odkształcenie płaszczyzny środkowej

Odkształcenie ϵ'_x obliczamy zgodnie z założeniem małych ugięć:

$$\begin{aligned} \epsilon'_x &= \frac{ds_x - dx}{dx} = \sqrt{1 + w_{,x}^2} - 1 = \\ &= 1 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 - \frac{1}{8} w_{,x}^4 + \dots - 1 \approx \frac{1}{2} w_{,x}^2. \end{aligned}$$

Tak samo obliczamy odkształcenie $\epsilon'_y = w_{,y}^2/2$.

Odształcenie postaciowe interpretujemy jako zmianę kąta prostego, co można obliczyć z iloczynu skalarnego wektorów \vec{e}_x i \vec{e}_y' :

$$\begin{aligned}\gamma'_{xy} &= \vec{e}_x' \cdot \vec{e}_y' = \frac{\vec{e}_x + w_{,x} \vec{e}_z}{\sqrt{1 + w_{,x}^2}} \cdot \frac{\vec{e}_y + w_{,y} \vec{e}_z}{\sqrt{1 + w_{,y}^2}} \approx \\ &\approx (\vec{e}_x + w_{,x} \vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_y + w_{,y} \vec{e}_z) = w_{,x} w_{,y}.\end{aligned}$$

Tak więc łącznie odkształcenia płaszczyzny środkowej wywołane ugięciem wynoszą:

$$\varepsilon'_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon'_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma'_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.69)$$

W ten sposób energia sprężysta zginania przy działaniu sił w płaszczyźnie środkowej wynosi:

$$\begin{aligned}U_m &= \frac{1}{2} \iint_A (n_x w_{,x}^2 + 2n_{xy} w_{,x} w_{,y} + n_y w_{,y}^2) dx dy \\ &+ \frac{D}{2} \iint_A \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) [w_{,xx} w_{,yy} - w_{,xy}^2] \right\} dx dy. \quad (2.70)\end{aligned}$$

Funkcjonał (2.70) jest wykorzystywany w metodach przybliżonych analizy stateczności dla obliczenia obciążeń krytycznych.

2.10. Równanie płyty na podłożu sprężystym typu Winklera

Najprostszy opis podłoża ujmuje tzw. model Winklera, w którym odpór podłoża jest proporcjonalny do ugięcia. Wynika stąd obciążenie zastępcze:

$$\bar{p} = -kw. \quad (2.71)$$

Równanie płyty na podłożu sprężystym ma postać:

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{k}{D} w = \frac{p}{D}, \quad (2.72)$$

gdzie k jest sztywnością podłoża Winklera.

3. ANALITYCZNE METODY OBLICZANIA PŁYT

3.1. Uwagi o metodach obliczeniowych

W poprzednich rozdziałach wyprowadziliśmy równania w ramach tzw. modelu kontynualnego, który charakteryzuje się występowaniem operatorów różniczkowych. Do równań różniczkowych dołączamy warunki brzegowe, formułując tzw. zagadnienie brzegowe. Rozwiązania poszukujemy w postaci funkcji, posługując się metodami analitycznymi, które mogą być ścisłe lub przybliżone /gdy niektóre równania lub warunki brzegowe nie są spełnione/. Zastosowanie tych metod pokażemy na przykładzie obliczania płyt kołowych i prostokątnych.

Rozwiązania ścisłe można otrzymać tylko dla szczególnych przypadków kształtu brzegu, obciążenia i warunków brzegowych. W pozostałych przypadkach, wśród których mieści się wiele praktycznie ważnych zadań, poszukujemy rozwiązania metodami przybliżonymi. Stosowanie podejścia analitycznego wymaga jednak często bądź daleko idących uproszczeń, bądź też staje się bardzo pracochłonne. Z tego względu powszechnie stosuje się metody numeryczne.

Metody te polegają na poszukiwaniu rozwiązania w postaci liczbowej. W tym celu modele kontynualne aproksymujemy modelami dyskretnymi, w których występują tylko operatory algebraiczne. Najprostszym sposobem tworzenia modelu dyskretnego jest zastąpienie pochodnych wzorami różnicowymi i poszukiwanie rozwiązań w węzłach siatki różnicowej. Tak sformułowana metoda różnic skończonych /MRS/ jest stosowana w mechanice konstrukcji od dawna i obecnie przeżywa swój renesans dzięki maszynom cyfrowym. Odnosi się to zwłaszcza do wariacyjnego ujęcia MRS. Polega ono na zastosowaniu różnic skończonych w wyrażeniu podcałkowym energii sprężystej i na minimalizacji tego funkcjonału względem przemieszczeń węzłów siatki.

Innym sposobem budowania modelu dyskretnego jest podział ustroju na elementy skończone. Jako podstawowe niewiadome metody elementów skończonych /MES/ przyjmuje się uogólnione wielkości, np. przemieszczenia lub /i reakcje w węzłach elementów. Metoda uogólnia podejścia znane z analizy ustrojów prętowych /metoda przemieszczeń, sił, mieszana/ na dowolne ustroje, w tym również na ustroje powierzchniowe. W MES poszukiwane wartości węzłowe odpowiadają stopniom swobody /mnożnikom/ funkcji bazowych, które aproksymują pola przemieszczeń lub naprężeń wewnątrz elementów skończonych.

W skrypcie pokażemy zastosowanie metody różnic skończonych do obliczenia płyt zginanych, zakładając, że metodzie elementów skończonych będzie poświęcony oddzielny wykład.

3.2. Rozwiązanie analityczne dla płyt kołowych

W zagadnieniach liniowych analizy płyt kołowych możemy rozdzielić zmienne przez rozwinięcie wszystkich wielkości w szeregi trygonometryczne względem zmiennej obwodowej θ :

$$y(r, \theta) = y_0(r) + \sum_{j=1}^{\infty} [y_c^j(r) \cos \theta j + y_s^j(r) \sin \theta j]. \quad (3.1)$$

Podstawienie (3.1) do równań płyty pozwala sprowadzić zagadnienie do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych dla kolejnych $j=0, 1, \dots, J$, gdzie ze względów rachunkowych zachowujemy J wyrazów szeregów, kierując się dokładnością obliczeń.

Bardziej szczegółowe postępowanie pokażemy dla przypadku występowania płaszczyzny symetrii w płycie zginanej, gdy można ugięcie płyty przedstawić w postaci:

$$w = \sum_{j=0}^J w_j(r) \cos j \theta. \quad (3.2)$$

W szereg cosinusowy rozwijamy wielkości występujące w stanie kołowo-symetrycznym, w sinusowy pozostałe wielkości:

$$\cos: w, p, m_r, m_\theta, q_r; \quad (3.3)$$

$$\sin: m_{r\theta}, q_\theta.$$

Po wykorzystaniu (3.2) równanie płyty przyjmuje postać /korzystamy z bilaplasjanu (2.50)₃ /:

$$\begin{aligned} & \sum_j \left\{ \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} - \right. \\ & \left. - \frac{j^2}{r^2} \left[2 \frac{d^2}{dr^2} - 2 \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} (4 - j^2) \right] \right\} w_j(r) \cos j \theta = \\ & = \sum_j \frac{p_j(r)}{L} \cos j \theta. \end{aligned}$$

Zakładamy, że równanie to ma być spełnione dla każdego wyrazu, co prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_j}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_j}{dr^3} - \frac{1}{r^2} (1 + 2j^2) \frac{d^2 w_j}{dr^2} + \\ + \frac{1}{r^3} (1 + 2j^2) \frac{dw_j}{dr} - \frac{j^2}{r^4} (4 - j^2) w_j = \frac{p_j(r)}{D}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Całkami ogólnymi równania (3.4) są funkcje:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{w}_0 &= c_{10} + c_{20} r^2 + c_{30} \ln r + c_{40} r^2 \ln r, \\ \overset{\circ}{w}_1 &= c_{11} r + c_{21} r^3 + c_{31} r^{-1} + c_{41} r \ln r, \\ \overset{\circ}{w}_j &= c_{1j} r^j + c_{2j} r^{j+2} + c_{3j} r^{-j} + c_{4j} r^{-j+2} \text{ dla } j > 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Stałe c_{ij} dla $i = 1, \dots, 4$; $j = 0, 1, \dots, J$ obliczamy z warunków brzegowych, które ustalamy dla kolejnych wartości j . Warunki brzegowe wyrażamy przez ugięcie w_j :

$$w_j = \overset{\circ}{w}_j + \bar{w}_j \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, J, \quad (3.6)$$

gdzie \bar{w}_j jest całką szczególną równania (3.4).

Dla konturu o $r = r_b$ należy sformułować 2 warunki brzegowe w odniesieniu do ugięcia $w_j(r_b)$, kąta ugięcia $\varphi_{rj}(r_b)$, momentu $m_{rj}(r_b)$ lub zastępczej siły poprzecznej $\bar{q}_{rj}(r_b)$. Statyczne warunki brzegowe można wyrazić przez funkcję w_j dzięki wzorom (2.51).

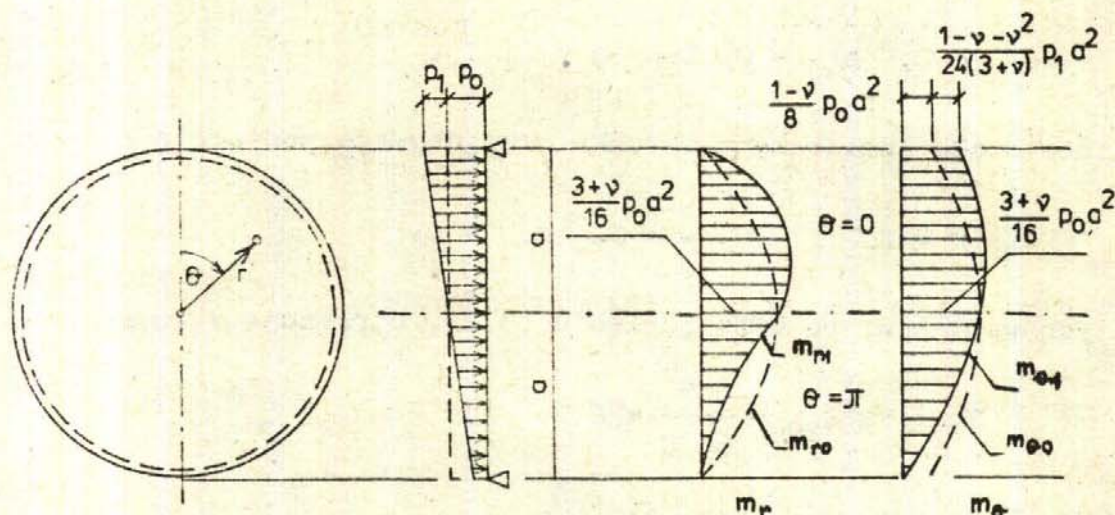
Przykład 3.1. Płyta kołowa zginana obciążeniem poprzecznym liniowo zmiennym /rys. 3.1/.

Rozkład obciążenia poprzecznego jest określony wzorem:

$$p(r, \theta) = p_0 + p_1 r \cos \theta.$$

Całką szczególną równania (3.4) jest funkcja:

$$\bar{w}(r, \theta) = \frac{p_0 r^4}{64 D} + \frac{p_1 r^5}{192 D a} \cos \theta.$$



Rys.3.1. Płyta kołowa poddana działaniu obciążenia poprzecznego liniowo zmiennego

Rozwiązanie dla $j = 0, 1$ ma postać:

$$w_0 = c_{10} + c_{20} r^2 + c_{30} \ln r + c_{40} r^2 \ln r + \frac{p_0 r^4}{64D},$$

$$w_1 = c_{11} r + c_{21} r^3 + c_{31} r^{-1} + c_{41} r \ln r + \frac{p_1 r^5}{192Da}.$$

Warunki brzegowe wymagają obliczenia momentu promieniowego m_r :

$$m_{r0} = -D \left(\frac{d^2 w_0}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw_0}{dr} \right) =$$

$$= -D \left[2(1+\nu)c_{20} - \frac{1}{r^2}(1-\nu)c_{30} + 4(1+\ln r)c_{40} + \frac{3+\nu}{16} + \frac{p_0 r^2}{D} \right],$$

$$m_{r1} = -D \left[\frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \left(\frac{dw_1}{dr} - \frac{1}{r} w_1 \right) \right] =$$

$$= -D \left[2(3+\nu)r c_{21} + 2(1-\nu) \frac{c_{31}}{r^3} + (1+\nu) \frac{c_{41}}{r} + \frac{5+\nu}{48} \frac{p_1 r^3}{Da} \right].$$

Z obliczonych zależności wynika, że dla $r \rightarrow 0$ zarówno w_j jak też m_{rj} są nieograniczone. Aby ugięcie i moment zginający osiągnęły wartości skończone, należy przyjąć:

$$c_{3j} = 0, \quad c_{4j} = 0 \quad \text{dla } j = 0, 1. \quad (3.7)$$

Pozostałe stałe obliczamy z warunku przegubowego podparcia brzegu:

$$\text{dla } r = a \quad w = 0, \quad m_{rj} = 0.$$

Z tych warunków, po uwzględnieniu (3.7), otrzymujemy równania:

$$\begin{cases} c_{10} + a^2 c_{20} + \frac{p_0 a^4}{64 D} = 0, \\ 2(1+\nu) c_{20} + (3+\nu) \frac{p_0 a^2}{16 D} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a c_{11} + a^3 c_{21} + \frac{p_1 a^4}{192 D} = 0, \\ 2(3+\nu) a c_{21} + (5+\nu) \frac{p_1 a^2}{48 D} = 0, \end{cases}$$

skąd obliczamy:

$$c_{10} = \frac{5+\nu}{1+\nu} \frac{p_0 a^4}{64 D}, \quad c_{20} = -\frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{p_0 a^2}{32 D},$$

$$c_{11} = \frac{7+\nu}{3+\nu} \frac{p_1 a^3}{192 D}, \quad c_{21} = -\frac{5+\nu}{3+\nu} \frac{p_1 a}{96 D}.$$

Po podstawieniu obliczonych stałych otrzymujemy wzór na ugięci:

$$w = \frac{p_0 a^4}{64 D} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} - \varrho^2 \right) (1 - \varrho^2) +$$

$$+ \frac{p_1 a^4}{192 D} \left(\frac{7+\nu}{1+\nu} - \varrho^2 \right) (1 - \varrho^2) \varrho \cos \theta.$$

Obliczamy moment zginający m_r :

$$m_r = m_{r0} + m_{r1} \cos \theta =$$

$$= \frac{3+\nu}{16} p_0 a^2 (1 - \varrho^2) + \frac{5+\nu}{48} p_1 a^2 \varrho (1 - \varrho^2) \cos \theta,$$

oraz moment obwodowy m_θ :

$$\begin{aligned}
 m_\theta &= -D \left\{ \left[\frac{1}{r} \frac{dw_0}{dr} + \nu \frac{d^2 w_0}{dr^2} \right] + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{dw_1}{dr} - \frac{w_1}{r} \right) + \nu \frac{d^2 w_1}{dr^2} \right] \cos \theta \right\} = \\
 &= \frac{p_0 a^2}{16} \left[(3 + \nu) - (1 + 3\nu) \varrho^2 \right] + \\
 &+ \frac{p_1 a^2}{48} \left[\frac{(5 + \nu)(1 + 3\nu)}{3 + \nu} - (1 + 5\nu) \varrho^2 \right] \cos \theta .
 \end{aligned}$$

Wzory napisano przy użyciu współrzędnej bezwymiarowej:

$$\varrho = \frac{r}{a} \in [0, 1] . \quad (3.8)$$

Na rys. 3.1 pokazano wykresy momentów zginających dla $\theta = 0, \pi$, zaznaczając linią przerywaną część odpowiadającą obciążeniu symetrycznemu. W środku płyty otrzymano:

$$w(0) = w_0(0) = \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \frac{p_0 a^4}{64 D} ,$$

$$m_r(0) = m_\theta(0) = m_{r0}(0) = m_{\theta 0}(0) = \frac{3 + \nu}{16} p_0 a^2 .$$

3.3. Analiza zginania kołowo - symetrycznego

Korzystając z równań wyprowadzonych w p. 2.6.2 można łatwo analizować płytę zginaną w stanie kołowo-symetrycznym.

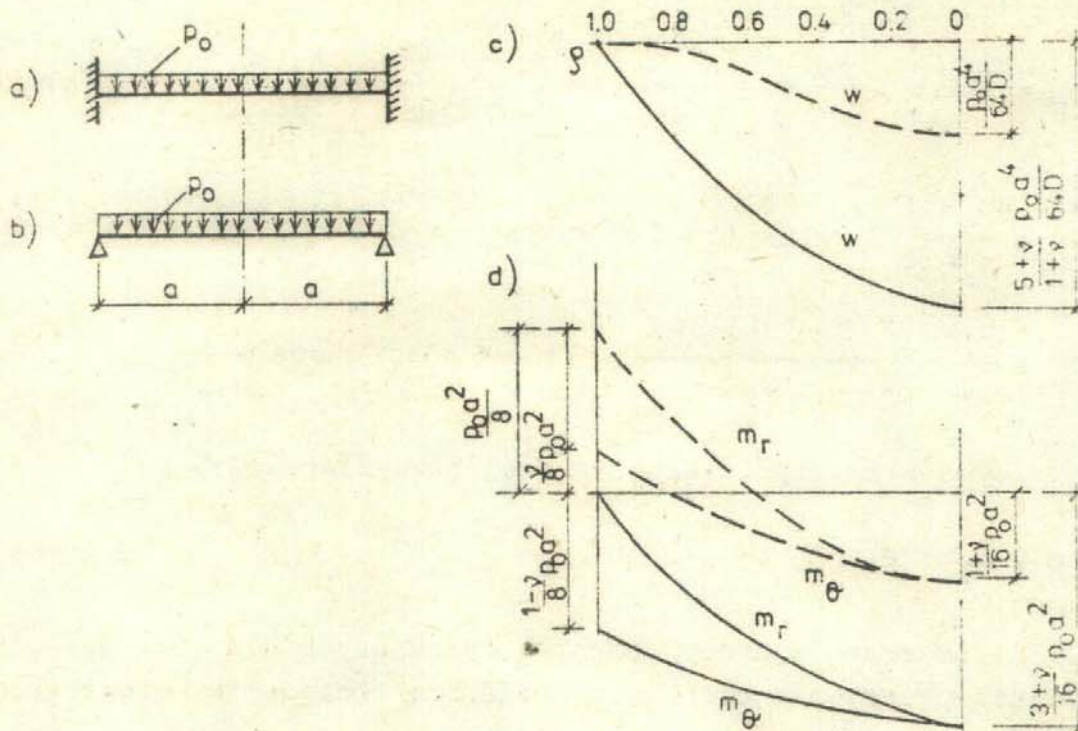
Przykład 3.2. Utwierdzona płyta kołowa obciążona równomiernie /rys. 3.2a/.

Siłę poprzeczną obliczamy ze wzoru (2.53a):

$$q_r = - \frac{p_0 r}{2}$$

i podstawiamy do równania (2.55):

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \varphi) \right] = - \frac{p_0}{2r} r .$$



Rys.3.2. Płyta kołowo obciążona równomiernie o brzegu utwierdzonym ---- i przegubowo podpartym —

Kolejne całkowania dają:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) = -\frac{P_0}{4D} r^2 + C_1,$$

$$r\varphi = -\frac{P_0}{16D} r^4 + \frac{C_1}{2} r^2 + C_2.$$

Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie dla kąta ugięcia φ /obrót normalnej do płaszczyzny środkowej/:

$$\varphi = -\frac{P_0}{16D} r^3 + \frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r}. \quad (3.9)$$

Aby kąt obrotu osiągnął wartość skończoną dla $r \rightarrow 0$ należy przyjąć $C_2 = 0$.

Pierwszy warunek brzegowy dla φ piszemy w postaci:

$$a/ \text{ dla } r = a \quad \varphi = 0 \rightarrow C_1.$$

otrzymując:

$$C_1 = \frac{p_0 a^2}{8 D}, \quad (3.10)$$

tak, że wzór na kąt ugięcia płyty utwierdzonej przyjmuje postać:

$$\varphi = \frac{p_0 a^3}{16 D} \varrho (1 - \varrho^2).$$

Korzystając ze wzorów (2.56) obliczamy momenty zginające:

$$m_r = \frac{p_0 a^2}{16} [(1+\nu) - (3+\nu) \varrho^2],$$

$$m_\theta = \frac{p_0 a^2}{16} [(1+\nu) - (1+3\nu) \varrho^2].$$

Korzystając ze związku (2.54), aby obliczyć ugięcie w całkujemy równanie (3.9):

$$w = \frac{p_0}{64D} r^4 - \frac{C_1}{4} r^2 - C_2 \ln r + C_3.$$

Ponieważ $C_2 = 0$, a C_1 jest dla płyty utwierdzonej wyznaczone wzorem (3.10), to z drugiego warunku brzegowego

$$b/ \text{ dla } r = a \quad w = 0$$

obliczamy stałą C_3 :

$$C_3 = \frac{p_0 a^4}{64D}.$$

W ten sposób funkcja ugięcia przyjmuje postać:

$$w = \frac{p_0 a^4}{64D} (1 - \varrho^2)^2.$$

Maksymalne ugięcie występuje w środku płyty:

$$w_{\max} \equiv w(0) = \frac{p_0 a^4}{64D},$$

a momenty w charakterystycznych punktach wynoszą:

$$m_r(0) = m_\theta(0) = \frac{1+\nu}{16} p_0 a^2,$$

$$m_r(a) = -\frac{p_0 a^2}{8}, \quad m_\theta(a) = -\frac{\nu p_0 a^2}{8}.$$

Maksymalne wartości naprężeń w punktach $r = 0$, a wynoszą:

$$\sigma_r(0)_{\max} = \sigma_\theta(0)_{\max} = \frac{6}{h^2} m_r(0) = \frac{3}{8} (1 + \nu) \frac{p_0 a^2}{h^2},$$

$$\sigma_r(a)_{\max} = \frac{3}{4} \frac{p_0 a^2}{h^2}, \quad \sigma_\theta(a)_{\max} = \frac{3}{4} \frac{\nu p_0 a^2}{h^2}.$$

Przykład 3.3. Przegubowo podparta płyta kołowa obciążona równomiernie /rys. 3.2b/.

W porównaniu z płytą utwierdzoną zmianie ulega warunek brzegowy $\varphi(a) = 0$ na $m_r(a) = 0$. Łącznie warunki brzegowe dla obliczenia stałych całkowania C_1 i C_2 w funkcji (3.9) mają postać:

$$a/ \text{ dla } r = 0 \quad \varphi = 0 \rightarrow C_2 = 0,$$

$$b/ \text{ dla } r = a \quad \frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} = 0 \rightarrow C_1 = \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \frac{p_0 a^2}{8D},$$

a stałą C_3 dla ugięcia w obliczamy z warunku brzegowego:

$$c/ \text{ dla } r = a \quad w = 0 \rightarrow C_3 = \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \frac{p_0 a^4}{64D}.$$

W ten sposób otrzymujemy funkcję ugięcia płyty przegubowo podpartej:

$$w = \frac{p_0 a^4}{64D} (1 - \rho^2) \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} - \rho^2 \right),$$

i maksymalne ugięcie:

$$w_{\max} \equiv w(0) = \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \frac{p_0 a^4}{64D}.$$

Momenty zginające są opisane funkcjami:

$$m_r = \frac{3 + \nu}{16} p_0 a^2 (1 - \rho^2),$$

$$m_\theta = \frac{p_0 a^2}{16} [(3 + \nu) - (1 + 3\nu)\rho^2],$$

skąd wynikają ich wartości w charakterystycznych punktach:

$$m_r(0) = m_\theta(0) = \frac{3+\nu}{16} p_0 a^2,$$

$$m_r(1) = 0, \quad m_\theta(1) = \frac{1-\nu}{8} p_0 a^2.$$

Maksymalne wartości naprężeń w punktach $r = 0, a$ wynoszą:

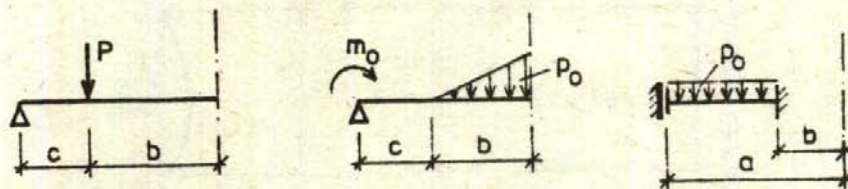
$$\sigma_r(0)_{\max} = \sigma_\theta(0)_{\max} = \frac{6}{h^2} m_r(0) = \frac{3}{8} (3+\nu) \frac{p_0 a^2}{h^2},$$

$$\sigma_\theta(a)_{\max} = \frac{3}{4} (1-\nu) \frac{p_0 a^2}{h^2}.$$

Na rys. 3.2c pokazano wykres ugięć dla płyty utwierdzonej i przegubowo podpartej /utwierdzenie brzegu zewnętrznego zmniejsza maksymalne ugięcie przeszło 4-krotnie/. Na kolejnych wykresach na rys. 3.2 pokazano wykresy momentów zginających.

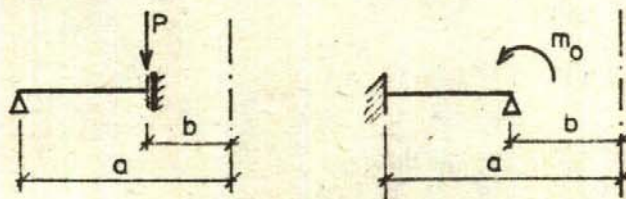
3.4. Przykłady do rozwiązania

1. Napisać warunki brzegowe i ciągłości dla obliczenia stałych całowania w płytach obciążonych kołowo-symetrycznie /rys. 3.3/.



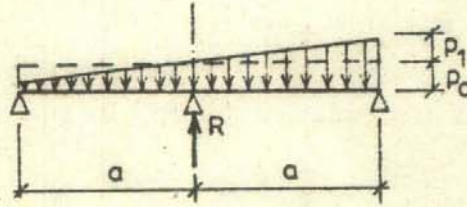
Rys.3.3

2. Korzystając z odpowiedniej modyfikacji wzoru (2.53) i równania (2.55), obliczyć ugięcia i rozkład momentów w podanych płytach pierścieniowych, zginanych kołowo-symetrycznie /rys. 3.4/.



Rys.3.4

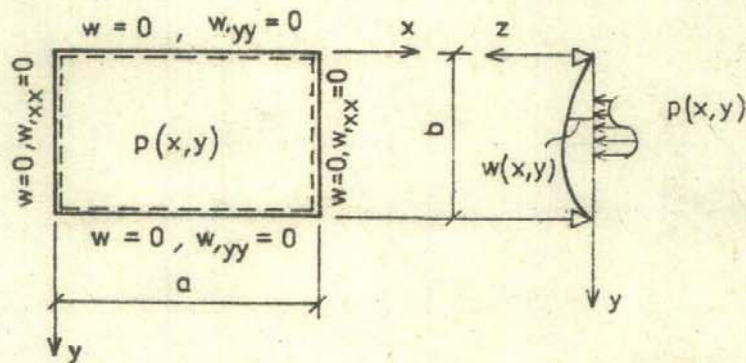
3. Korzystając z zasady superpozycji obliczyć wartość reakcji R w podporze podpierającej środek płyty obciążonej jak w przykładzie 1 /rys. 3.5/.



Rys.3.5

3.5. Zastosowanie podwójnych szeregów trygonometrycznych do obliczania płyt prostokątnych /metoda Naviera/

W szczególnym przypadku płyty prostokątnej podpartej przegubowo /rys. 3.6/ można przyjąć rozwiązanie w postaci funkcji sinusowych o zmiennych rozdzielonych:



Rys.3.6. Płyta prostokątna, przegubowo podparta

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y, \quad (3.11)$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

$$\alpha_i = \frac{i\pi}{a}, \quad \beta_j = \frac{j\pi}{b}. \quad (3.12)$$

Wszystkie parzyste pochodne funkcji $w(x, y)$ będą też szeregami sinusowymi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= - \sum_i \sum_j \alpha_i^2 w_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= - \sum_i \sum_j \beta_j^2 w_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y,\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 w &= - \sum_i \sum_j (\alpha_i^2 + \beta_j^2) w_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y, \\ \nabla^2 \nabla^2 w &= \sum_i \sum_j (\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2 w_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y.\end{aligned}$$

Funkcja ugięcia (3.11) spełnia warunki brzegowe, napisane w postaci (2.47a):

$$w(0, y) = w(a, y) = w(x, 0) = w(x, b) = 0,$$

$$w_{,xx}(0, y) = w_{,xx}(a, y) = w_{,yy}(x, 0) = w_{,yy}(x, b) = 0.$$

Po podstawieniu bielaplasjanu w postaci (3.13)₄ równanie płyty przyjmuje postać:

$$\sum_i \sum_j (\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2 w_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (3.14)$$

Współczynniki w_{ij} obliczamy tak jak się to czyni w analizie harmoniczej. Mnożymy najpierw równanie (3.14) przez $\sin \alpha_k x$ i całkujemy względem zmiennej $x \in [0, a]$, następnie mnożymy równanie przez $\sin \beta_1 y$ i całkujemy w przedziale $[0, b]$ względem zmiennej y . Całki po lewej stronie spełniają warunek ortogonalności funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{aligned}\int_0^a \sin \alpha_i x \sin \alpha_k x dx &= \begin{cases} \frac{a}{2} & \text{dla } i = k \\ 0 & \text{dla } i \neq k \end{cases} \\ \int_0^b \sin \beta_j y \sin \beta_1 y dy &= \begin{cases} \frac{b}{2} & \text{dla } j = 1 \\ 0 & \text{dla } j \neq 1 \end{cases}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Otrzymujemy w ten sposób wzór na współczynniki W_{ij} :

$$W_{ij} = \frac{4}{D a b (\alpha_1^2 + \beta_j^2)^2} \int_0^a \int_0^b p(x,y) \sin \alpha_1 x \sin \beta_j y \, dx dy. \quad (3.16)$$

Oczywiście, znając W_{ij} otrzymujemy ugięcie $w(x,y)$ w postaci funkcji (3.11), a przez nie możemy wyrazić wszystkie wielkości, w tym najważniejsze dla projektowania momenty zginające.

Zarówno ugięcie $w(x,y)$ jak też wynikające z niego wielkością są wyrażone w postaci podwójnych szeregów sinusowych. Tylko w nielicznych przypadkach udaje się obliczyć sumę tych szeregów. Ze względów praktycznych ograniczamy się najczęściej do skończonej liczby wyrazów szeregów, ustalonej według potrzebnej dokładności obliczeń. Liczba tych wyrazów wzrasta przy wzroście rzędu pochodnych /przy tej samej dokładności obliczeń należy przyjąć więcej wyrazów do obliczania momentów niż do liczenia ugięcia/.

Przykład 3.4. Płyta przegubowo podparta, obciążona równomiernie.

We wzorze (3.16) przyjmujemy $p(x,y) = p_0 = \text{const}$. Całka występująca po prawej stronie przyjmuje wartości:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b \sin \alpha_1 x \sin \beta_j y \, dx dy = \\ & = \frac{1}{\alpha_1 \beta_j} (1 - \cos i\pi) (1 - \cos j\pi) = \\ & = \frac{a b}{i j \pi^2} \cdot \begin{cases} 4 \text{ dla } i, j = 1, 3, 5, \dots \\ 0 \text{ dla } i, j = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Dochodzimy w ten sposób do funkcji ugięcia:

$$w(x,y) = \frac{16 p_0}{D \pi^6} \sum_{i=1,3,\dots} \sum_{j=1,3,\dots} \frac{\sin \alpha_1 x \sin \beta_j y}{i j \left(\frac{1}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2}.$$

W obliczeniach inżynierskich interesuje nas maksymalne ugięcie:

$$w_{\max} = w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{16 p_0}{D \pi^6} \sum_i \sum_j \frac{(-1)^{\frac{i+j}{2}-1}}{i j \left(\frac{1}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2} = \frac{p_0 a^4}{D} \zeta(b/a).$$

W tabelicy 1 zestawiono wartości współczynnika ζ w zależności od stosunku boków b/a . Podobnie można stabelaryzować wartości maksymalnych momentów zginających, które występują też w środku rozpiętości płyty:

$$\max m_x = p_0 a^2 \mu_1, \quad \max m_y = p_0 a^2 \mu_2.$$

gdzie współczynniki μ_1, μ_2 zależą od stosunku boków płyty b/a oraz współczynnika Poissona ν . W tabl. 1 podano wartości tych współczynników dla $\nu = 0,3$.

Tabela 3.1

Wartości maksymalnych ugięć i momentów zginających
dla płyty prostokątnej przegubowo podpartej,
obciążonej równomiernie

b/a	1,0	1,2	1,5	2,0	3,0	5,0	∞
$\zeta = w_{\max} D / p_0 a^4$	0,00406	0,00564	0,00772	0,01013	0,01223	0,01297	0,01302
$\mu_1 = \max m_x / p_0 a^2$	0,0479	0,0627	0,0812	0,1017	0,1184	0,1246	0,1250
$\mu_2 = \max m_y / p_0 a^2$	0,0479	0,0501	0,0498	0,0464	0,0406	0,0375	0,0375

Celem zorientowania się w zbieżności rozwiązania podajemy niżej wyniki obliczeń dla płyty kwadratowej

	1, j = 1	1, j = 1,3	1, j = 1,3,5
ζ	0,004161	0,004055	0,004053
μ_1	0,05475	0,04813	0,04777

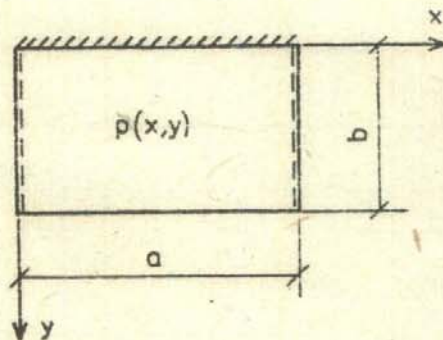
 $\nu = 0,3$ $b/a = 1,0$

3.6. Zastosowanie pojedynczych szeregów trygonometrycznych /metoda Levy'ego/

Ogólniejszym, a ponadto lepiej zbieżnym sposobem otrzymania rozwiązania jest zastosowanie pojedynczego szeregu sinusowego. W przypadku, gdy dwa naprzeciwległe boki /dalej przyjmujemy boki równoległe do osi y - rys. 3.7/ są przegubowo podparte ugięcie $w(x, y)$, przyjmujemy w postaci:

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(y) \sin \alpha_j x, \quad (3.17)$$

gdzie tak jak w (3.11) przyjęto oznaczenie $\alpha_j = j \pi / a$.



Rys.3.7. Płyta obliczana pojedynczymi szeregami sinusowymi

Funkcja (3.17) spełnia warunki przegubowego podparcia dla boków $x=0$, $x=a$. Po podstawieniu funkcji (3.17) do równania płyty, przemnożeniu przez $\sin \alpha_k x$ i przecałkowaniu względem $x \in [0, a]$ otrzymujemy następujące równanie:

$$Y_j^{IV} - 2 \alpha_j^2 Y_j^{II} + \alpha_j^4 Y_j = F_j(y), \quad (3.18)$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenie $()' = d() / dy$, a znana funkcja $F_j(y)$ wynosi:

$$F_j(y) = \frac{2}{Da} \int_0^a p(x,y) \sin \alpha_j x dx. \quad (3.19)$$

Równanie (3.18) jest niejednorodnym równaniem różniczkowym zwyczajnym, którego całką ogólną jest funkcja:

$$\begin{aligned} \overset{0}{Y}_j(y) = & C_{1j} \operatorname{sh} \alpha_j y + C_{2j} \operatorname{ch} \alpha_j y + \\ & + C_{3j} \alpha_j y \operatorname{sh} \alpha_j y + C_{4j} \alpha_j y \operatorname{ch} \alpha_j y . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Całkę szczególną $\bar{Y}_j(y)$ obliczamy dla określonej funkcji $F_j(y)$ jedną z metod znanych w analizie liniowych równań różniczkowych zwyczajnych /np. metodą uzmiennienia stałych/.

Stałe całkowania C_{ij} obliczamy na podstawie warunków brzegowych wzdłuż brzegów $y = 0$, $y = b$ formułowanych dla funkcji $Y_j(y) = \overset{0}{Y}_j(y) + \bar{Y}_j(y)$.

3.7. Metoda N a d a i a o b l i c z a n i a c a ł k i s z c z e g ó l n e j

Jeśli obciążenie zewnętrzne jest funkcją tylko jednej zmiennej, to całkę szczególną można obliczyć z równania pasma. Przyjmujemy, że obciążenie jest funkcją zmiennej x ; w takim przypadku równanie pasma ma postać:

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} = \frac{p(x)}{D} . \quad (3.21)$$

Równanie to odpowiada równaniu linii ugięcia belki o jednostkowej szerokości pracującej w płaskim stanie odkształceń /zamiast EI w (3.21) występuje sztywność $D = EI/(1-\nu^2)$ /.

Rozwiązaniem równania (3.21) jest funkcja:

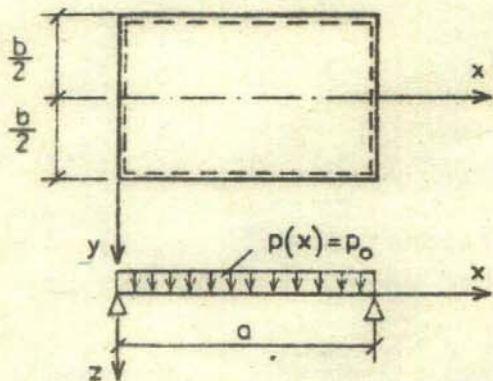
$$\bar{w}(x) = \frac{1}{D} f(x) + B_1 \frac{x^3}{3!} + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_3 x + B_4 . \quad (3.22)$$

Wartości stałych B_i obliczamy z warunków brzegowych pasma dla $x = 0, a$.

Całkę ogólną $\overset{0}{w}(x, y)$ obliczamy z jednorodnego równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych:

$$\nabla^2 \nabla^2 \overset{0}{w} = 0 . \quad (3.23)$$

Przykład 3.6. Zastosowanie pojedynczego szeregu trygonometrycznego do obliczenia płyty przegubowo podpartej obciążonej równomiernie /rys. 3.8/.



W porównaniu z przykładem 3.5 przesuniemy tylko układ współrzędnych, co pozwoli wykorzystać symetrię płyty dla obliczenia stałych całkowania C_{1j} w funkcji (3.20).

Rys.3.8. Płyta przegubowo podparta

Funkcja $f(x)$ w (3.22) jest wynikiem czterokrotnego całkowania funkcji obciążenia

$$f(x) = \frac{p_0 x^4}{4!},$$

skąd wynika:

$$\bar{w}(x) = \frac{p_0 x^4}{24D} + B_1 \frac{x^3}{6} + B_2 \frac{x^2}{2} + B_3 x + B_4.$$

Stałe całkowania obliczamy z warunków brzegowych:

$$\bar{w}(0) = \bar{w}(a) = 0, \quad \left. \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right|_{x=a} = 0.$$

Po obliczeniu tych stałych otrzymujemy:

$$\bar{w}(x) = \frac{p_0}{24D} (x^4 - 2ax^3 + a^3x).$$

Całka ogólna $\bar{w}(x,y)$ ma być funkcją parzystą zmiennej y , co powoduje, że w (3.20) nie mogą występować człony $(\text{sh } \alpha_j y)$ i $(y \text{ch } \alpha_j y)$. Dochodzimy w ten sposób do całki ogólnej:

$$\bar{w}(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} (C_{2j} \text{ch } \alpha_j y + C_{3j} \alpha_j y \text{sh } \alpha_j y) \sin \alpha_j x.$$

Ze względu na postać całki szczególnej rozwijamy również powyższy wielomian w szereg sinusowy:

$$\bar{w}(x) = \frac{4 p_0 a^4}{D \pi^5} \sum_j \frac{1}{j^5} \sin \alpha_j x,$$

dzięki czemu pełne rozwiązanie płyty przyjmuje postać:

$$w(x,y) = \frac{p_0 a^4}{D} \sum_{j=1,3,5,\dots} \left(\frac{4}{\pi^5 j^5} + A_j \operatorname{ch} \alpha_j y + B_j \alpha_j y \operatorname{sh} \alpha_j y \right) \sin \alpha_j x .$$

Stałe całkowania obliczamy z warunków brzegowych:

$$w\left(x, \pm \frac{b}{2}\right) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x,y = \pm \frac{b}{2}} = 0,$$

z których wynikają równania algebraiczne:

$$\frac{4}{\pi^5 j^5} + A_j \operatorname{ch} \gamma_j + \gamma_j B_j \operatorname{sh} \alpha_j = 0,$$

$$(A_j + 2 B_j) \operatorname{ch} \gamma_j + \gamma_j B_j \operatorname{sh} \alpha_j = 0.$$

Obliczone stąd stałe A_j i B_j wynoszą:

$$A_j = - \frac{2(\gamma_j \operatorname{th} \alpha_j + 2)}{\pi^5 j^5 \operatorname{ch} \gamma_j}, \quad B_j = \frac{2}{\pi^5 j^5 \operatorname{ch} \gamma_j},$$

gdzie posłużono się oznaczeniem:

$$\gamma_j = \frac{j \pi b}{2 a} .$$

Aby porównać wyniki otrzymane z rozwiązaniem uzyskanym za pomocą podwójnego szeregu trygonometrycznego przytaczamy rozwiązanie dla maksymalnego ugięcia:

$$w_{\max} = \frac{4 p_0 a^4}{D \pi^5} \sum_{j=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}}}{j^5} \left(1 - \frac{\gamma_j \operatorname{th} \gamma_j + 2}{2 \operatorname{ch} \gamma_j} \right).$$

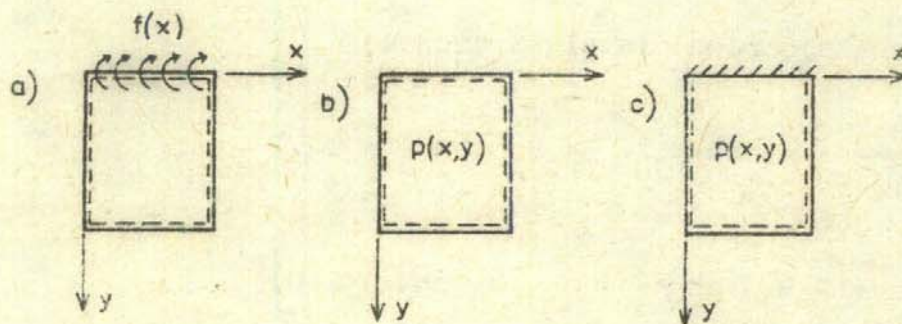
W przypadku płyty kwadratowej mamy $\gamma_j = j \pi / 2$ i maksymalne ugięcie wynosi:

$$w_{\max} = \frac{4 p_0 a^4}{D \pi^5} (0,31438 - 0,00387 + \dots) = \frac{p_0 a^4}{D} (0,00413 - \dots).$$

Porównując wyniki, widać że zachowanie tylko pierwszego wyrazu daje błąd dla ugięcia rzędu 0,7 %, gdy z podwójnego szeregu było 2,5 %.

3.8. Uwagi o wykorzystaniu szeregów trygonometrycznych do obliczania płyt prostokątnych o różnych warunkach brzegowych

Korzystając z zasady superpozycji można obliczać płyty z różnymi warunkami brzegowymi. Pokażemy kilka przykładów.



Rys.3.9. Płyta o jednym brzegu utwierdzonym

Opierając się na rozwiązaniu (3.20) możemy analizować płytę obciążoną momentem brzegowym /rys. 3.9a/

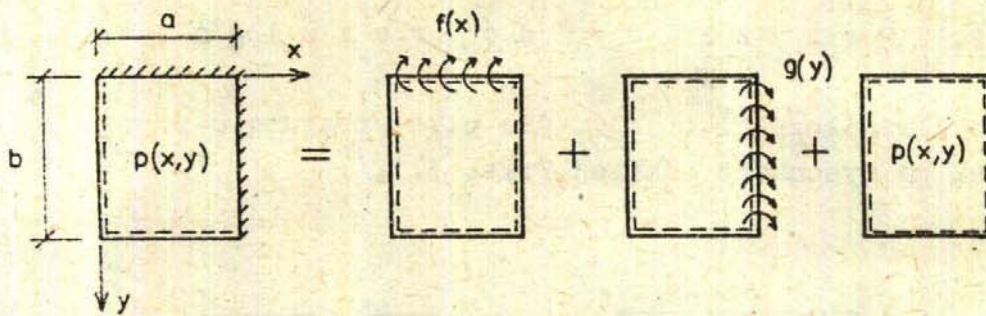
$$f(x) = \sum_j F_j \sin \alpha_j x .$$

Z superpozycji rozwiązania otrzymanego dla płyty podpartej przegubowo /rys. 3.9b/ i obciążonej momentem brzegowym otrzymujemy przypadek brzegu utwierdzonego /rys. 3.9c/, obliczając współczynniki F_j z warunku brzegowego

$$\frac{\partial}{\partial y} (w_f + w_p) \Big|_{y=0} = 0 ,$$

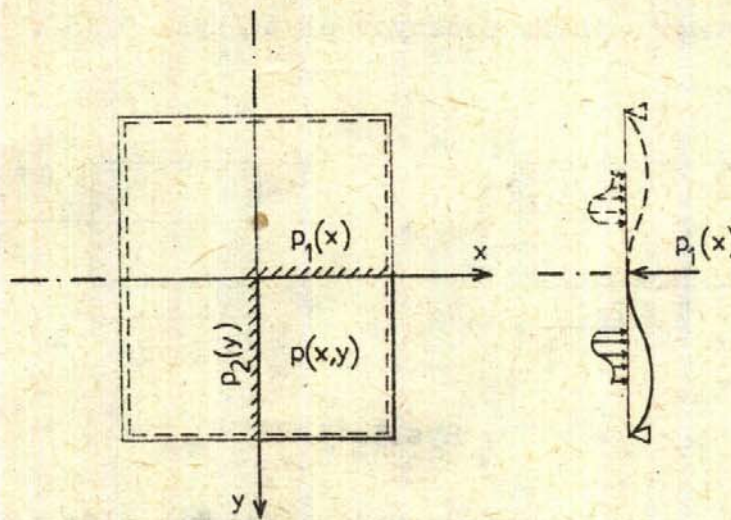
gdzie ugięcie $w_f(x,y)$ jest od obciążenia $f(x)$, a $w_p(x,y)$ od $p(x,y)$.

Przytoczone rozumowanie można łatwo rozszerzyć na utwierdzenie większej liczby brzegów. Pokazano to na przykładzie płyty o utwierdzonych dwóch brzegach /rys. 3.10/.



Rys.3.10. Płyta o dwóch brzegach utwierdzonych

Omówiony przykład można analizować też w inny sposób. Zamiast płyty o wymiarach $a \times b$ można rozpatrzyć płytę o bokach $2a \times 2b$, rozszerzając ją symetrycznie /rys. 3.11/. W powiększonej płycie są spełnione warunki $w_{,x}(0, y) = w_{,y}(x, 0) = 0$. Zerowe wartości ugięć wzdłuż boków $x = 0$, $y = 0$ otrzymuje się przez przyłożenie obciążeń liniowych $p_1(x)$, $p_2(y)$.

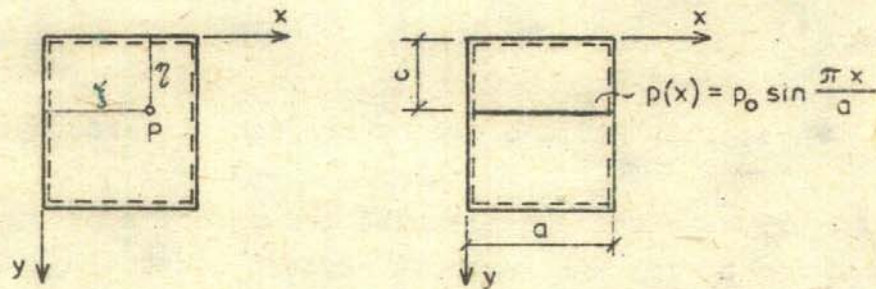


Rys.3.11. Inny sposób analizy płyty o brzegach utwierdzonych

Wiele innych przykładów wykorzystania pokazanych podejść do obliczania płyt prostokątnych /w tym również ciągłych/ można znaleźć w [5, 9].

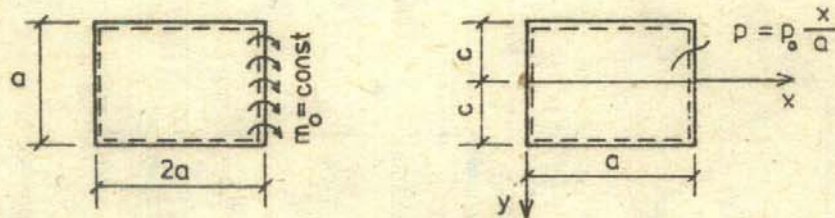
3.9. Przykłady do rozwiązania

1. Obliczyć współczynniki W_{ij} dla płyt przegubowo-podpartych, obciążonych jak na rysunkach poniżej /rys. 3.12/.



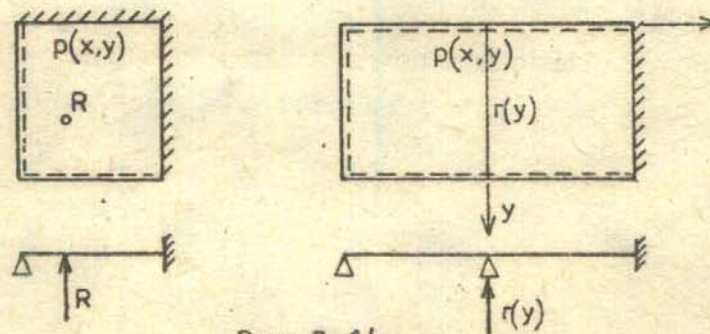
Rys.3.12

2. Podać tok postępowania i odpowiednie zależności prowadzące do obliczenia maksymalnego ugięcia podanych płyt /rys. 3.13/.



Rys.3.13.

3. Korzystając z zasady superpozycji podać tok postępowania i zależności, które pozwolą obliczyć reakcje w niepodatnych podporach pośrednich podanych płyt /rys. 3.14/.



Rys.3.14

4. Obliczyć maksymalne ugięcie płyty rozpatrzonej w przykładzie 3.4 przy założeniu, że leży ona na jednorodnym podłożu typu Winklera o sztywności k .

3.10. Metoda energetyczna /Ritza/

Metoda ta opiera się na tzw. zasadzie minimum energii potencjalnej ustroju, która mówi: spośród kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń /spełniających kinematyczne warunki brzegowe/ rozwiązaniem spełniającym warunki równowagi ustroju będzie pole przemieszczeń, dla którego energia potencjalna Π osiąga minimum. Warunkiem koniecznym minimum funkcjonału energii jest zerowanie się jego pierwszej wariacji:

$$\delta \Pi = 0. \quad (3.24)$$

Wykorzystanie praktyczne zasady minimum energii pokażemy w odniesieniu do zginania płyt, dla których polu przemieszczeń odpowiada funkcja ugięcia $w(x, y)$. Rozwiązania przybliżonego poszukujemy w postaci:

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i \psi_i(x, y), \quad (3.25)$$

gdzie w_i są współczynnikami, a $\psi_i(x, y)$ znanymi funkcjami, spełniającymi kinematyczne warunki brzegowe. W odniesieniu do tych funkcji przyjmujemy ponadto, że są one liniowo niezależne, a więc rozwiązaniem (3.24) będzie liniowa kombinacja funkcji ψ_i .

Warunek (3.24) piszemy w postaci:

$$\delta \Pi = \sum_i \frac{\partial \Pi}{\partial w_i} \delta w_i = 0,$$

gdzie wariacje δw_i wynikają z wirtualnego przemieszczenia:

$$\delta \tilde{w} = \sum_i \delta w_i \cdot \psi_i(x, y).$$

Warunek $\delta \Pi = 0$ ma być spełniony dla dowolnych wariacji δw_i , a więc zamiast (3.24) możemy rozpatrywać równoważny układ równań:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_i} = 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, n. \quad (3.24a)$$

Jeśli do funkcjonału energii (2.57) podstawimy funkcję $\tilde{w}(x, y)$, to energia sprężysta (2.61) będzie formą kwadratową, a praca obciążeń powierzchniowych formą liniową względem współczynników w_i :

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{D}{2} \iint_A \left\{ \left(\sum_i w_i \cdot \nabla^2 \psi_i \right) \left(\sum_j w_j \nabla^2 \psi_j \right) - \right. \\ & - 2(1-\nu) \left[\sum_i w_i \psi_{i,xx} \sum_j w_j \psi_{j,yy} - \sum_i w_i \psi_{i,xy} \cdot \right. \\ & \left. \left. \cdot \sum_j w_j \psi_{j,xy} \right] \right\} dx dy - \sum_i w_i \iint_A p \psi_i dx dy . \end{aligned}$$

Po zróżniczkowaniu względem kolejnych współczynników w_i możemy napisać (3.24a) w postaci układu równań liniowych:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} w_j = b_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n, \quad (3.26)$$

gdzie współczynniki a_{ij} i b_i wynoszą:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & D \iint_A \left[(\psi_{i,xx} + \psi_{i,yy}) (\psi_{j,xx} + \psi_{j,yy}) - \right. \\ & \left. - (1-\nu) (\psi_{i,xx} \psi_{j,yy} + \psi_{j,xx} \psi_{i,yy} - 2\psi_{i,xy} \psi_{j,xy}) \right] dx dy, \\ b_i = & \iint_A p(x,y) \psi_i dx dy . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Tak samo wyprowadzamy wzory dla układu współrzędnych biegunowych. Tutaj przytaczamy je tylko dla przypadku kołowej symetrii:

$$\begin{aligned} a_{ij} = & D \iint_A \left[(\psi_{i,rr} + \frac{1}{r} \psi_{i,r}) (\psi_{j,rr} + \frac{1}{r} \psi_{j,r}) - \right. \\ & \left. - (1-\nu) \frac{1}{r^2} (\psi_{i,rr} \psi_{j,r} + \psi_{j,rr} \psi_{i,r}) \right] r dr, \\ b_i = & \iint_A p(r) \psi_i r dr . \end{aligned} \quad (3.27a)$$

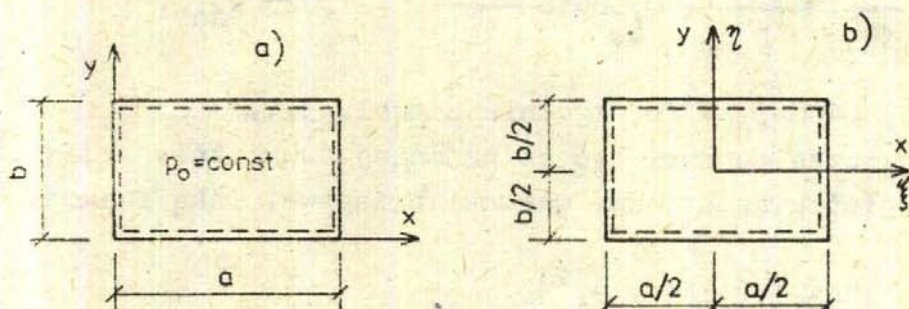
Opisana metoda jest przybliżona. Jej dokładność zależy od doboru funkcji dopuszczalnych $\Psi_i(x, y)$. W zależności od warunków podparcia funkcjami dopuszczalnymi mogą być funkcje trygonometryczne, wielomiany lub funkcje odpowiadające postaciom wyboczenia albo drgań własnych. W ustrojach powierzchniowych najczęściej przyjmuje się funkcje z rozdzielonymi zmiennymi:

$$\Psi_i(x, y) = \sum_{k(i)} \sum_{m(i)} X_k(x) Y_m(y). \quad (3.28)$$

Przykładowo funkcjami Ψ_i mogą być następujące kombinacje X_k i Y_m :

$$\Psi_1 = X_1 Y_1, \quad \Psi_2 = X_1 Y_2 + X_2 Y_1, \quad \Psi_3 = X_2 Y_2, \dots \quad (3.28a)$$

Przykład 3.7. Płyta przegubowo podparta obciążona równomiernie /rys. 3.15/.



Rys.3.15. Układy współrzędnych w płycie prostokątnej

Zajmiemy się prostymi, jednoparametrowymi funkcjami dopuszczalnymi. Zaczynamy od funkcji trygonometrycznej:

$$\Psi_1 = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (3.29)$$

Funkcja ta spełnia warunki brzegowe, tak kinematyczne, jak też statyczne.

Przy liczeniu współczynnika a_{11} pod całką wzoru (3.27)₁ pomijamy człon z mnożnikiem $(1-\nu)$, zgodnie z p. 2.7.2:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = \\ &= \pi^4 D \frac{ab}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$b_1 = p_0 \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{4}{\pi^2} p_0 ab.$$

Na ich podstawie współczynnik w_1 :

$$w_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{16}{\pi^6 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \cdot \frac{p_0 a^4}{D}. \quad (3.30)$$

Wracając do funkcji (3.29), otrzymujemy funkcję ugięcia:

$$w = w_1 \psi_1 = w_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Rozwiązanie (3.30) odpowiada pierwszemu wyrazowi szeregu z przykładu 3.4. Maksymalne ugięcie jest określone współczynnikiem w_1 . Dla płyty kwadratowej otrzymujemy:

$$w_1 = \frac{4}{\pi^6} \frac{p_0 a^4}{D} = 0,00416 \frac{p_0 a^4}{D} = 1,025 w_{\xi c}, \quad (3.31)$$

gdzie $w_{\xi c} = 0,00406 p_0 a^4/D$, zgodnie z tabl. 3.1.

Funkcja dopuszczalna musi być co najmniej dwukrotnie różniczkowalna i powinna spełniać kinematyczne warunki brzegowe. Taką funkcją może być:

$$\psi_1 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2), \quad (3.32)$$

gdzie ξ, η są bezwymiarowymi współrzędnymi dla układu zaczepionego w środku płyty:

$$\xi = \frac{2x}{a}, \quad \eta = \frac{2y}{b} \quad \text{dla} \quad \xi, \eta \in [-1, 1]. \quad (3.33)$$

Dla płyty kwadratowej maksymalne ugięcie wynosi:

$$w_1 = \frac{5}{1408} \frac{p_0 a^4}{D} = 0,00355 \frac{p_0 a^4}{D} = 0,874 w_{\xi c},$$

a więc błąd rozwiązania wynosi 12,6%, w porównaniu z 2,5% błędem dla funkcji dopuszczalnej (3.29).

Inną możliwością doboru funkcji dopuszczalnych jest przyjęcie $X_1(\xi)$, $Y_1(\eta)$ jako linii ugięcia belki wolnopodpartej:

$$\psi_1 = \left(1 - \frac{6}{5} \xi^2 + \frac{1}{5} \xi^4\right) \left(1 - \frac{6}{5} \eta^2 + \frac{1}{5} \eta^4\right). \quad (3.34)$$

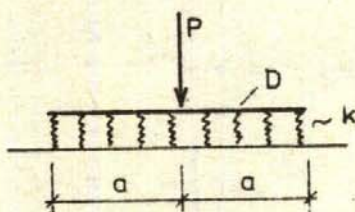
Dla płyty kwadratowej otrzymujemy:

$$w_1 = 0,00393 \frac{p_0 a^4}{D} = 0,968 w_{\text{śc}},$$

a więc błąd wynosi 3,2 %.

Przytoczone rozwiązania wskazują na znaczne zwiększenie dokładności przy spełnieniu wszystkich warunków brzegowych /nie tylko kinematycznych/ przez funkcje dopuszczalne. Funkcja (3.30) pomimo dość dobrej wartości ugięcia będzie ponadto dawała błędne wartości momentów i sił poprzecznych.

Przykład 3.8. Płyta kołowa na podłożu sprężystym typu Winklera /rys 3.16/.



Rys.3.16. Płyta kołowa na podłożu typu Winklera

Całkowita energia potencjalna składa się z energii sprężystej zginania U_m oraz pracy obciążeń W_p i odporu podłoża W_w :

$$\mathcal{P} = U_m + W_p + W_w,$$

gdzie poszczególne człony wynoszą:

$$U_m = \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r})^2 - \frac{2}{r} (1-\nu) w_{,rr} w_{,r} \right] r dr d\theta,$$

$$W_p = -P \cdot w(0),$$

$$W_w = - \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{2} (-k w) w r dr d\theta.$$

Jako funkcję dopuszczalną przyjmiemy część całki ogólnej (3.6)₁:

$$w = w_1 + w_2 r^2, \quad (3.35)$$

a więc stąd wynika:

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_2 = r^2, \quad w(0) = w_1.$$

Do obliczenia całki energii sprężystej potrzebujemy pochodne:

$$w_{,r} = 2 w_2 r, \quad w_{,rr} = 2 w_2.$$

co prowadzi do związku między energią potencjalną i parametrami w_1, w_2 :

$$\begin{aligned} \pi = 2\pi \left\{ \frac{D}{2} \int_0^a [(2w_2 + 2w_2)^2 - \frac{2}{r} (1-\nu) 2w_2 \cdot 2w_2 r] r dr + \right. \\ \left. + \frac{k}{2} \int_0^a (w_1 + w_2 r^2)^2 r dr \right\} - P w_1. \end{aligned}$$

Warunek zerowania się pierwszej wariacji energii potencjalnej prowadzi do równań (3.24a):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \pi}{\partial w_1} &= k \int_0^a (w_1 + w_2 r^2) r dr - \frac{P}{2\pi} = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \pi}{\partial w_2} &= D \int_0^a (1+\nu) w_2 r dr + k \int_0^a (w_1 r^2 + w_2 r^4) r dr = 0, \end{aligned}$$

które po obliczeniu całek możemy przekształcić do postaci:

$$w_1 + \frac{a^2}{2} w_2 = \frac{P}{\pi a^2 k},$$

$$w_1 + \left[\frac{2}{3} + 16(1+\nu) \frac{D}{k a^4} \right] a^2 w_2 = 0.$$

Rozwiązanie możemy więc przedstawić w postaci:

$$w_1 = \frac{4 + 96(1+\nu) c}{1 + 96(1+\nu) c} pa, \quad w_2 = - \frac{6}{1 + 96(1+\nu) c} \frac{P}{a}, \quad (3.36)$$

gdzie posłużono się bezwymiarowymi wielkościami:

$$c = \frac{D}{k a^4}, \quad p = \frac{P}{\pi k a^3}.$$

W [15] na str. 245 jest podane rozwiązanie ścisłe:

$$w_{\max} = 4.30 \cdot 10^{-2} \text{ cm} = w_{\text{śc}}$$

dla danych:

$$a = 5 \text{ cm}, \quad c = 1, \quad \nu = 0,3, \quad p = 8.16 \cdot 10^{-3}.$$

Po podstawieniu tych danych do (3.36) otrzymujemy:

$$w_1 = 4.18 \cdot 10^{-2} \text{ cm} = 0,97 w_{\text{śc}},$$

a więc błąd wynosi 3 % pomimo że funkcja (3.35) nie spełnia wszystkich warunków brzegowych.

Należy dodać, że przyjęta funkcja (3.35) nie jest wystarczająca do obliczania rozkładu momentów zginających, zwłaszcza w otoczeniu przyłożonej siły skupionej. Aby otrzymać dobre przybliżenie, należałoby uwzględnić co najmniej człon $\psi_3 = r^2 \ln r$.

3.11. Metoda ortogonalizacji /Bubnowa - Galerkina/

Równanie różniczkowe płyty możemy napisać w skróconej postaci

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \frac{P}{D} = L(w; p) = 0. \quad (3.37)$$

Przybliżone rozwiązanie przyjmujemy w takiej samej postaci jak w metodzie Ritza:

$$\tilde{w} = \sum_{i=1}^n w_i \psi_i(x, y). \quad (3.38)$$

Funkcje bazowe $\psi_i(x, y)$ mają być liniowo niezależne i powinny spełniać warunki brzegowe zadania.

Ponieważ \tilde{w} jest rozwiązaniem przybliżonym, to po podstawieniu tej funkcji do równania (3.37) powstanie funkcja błędu:

$$L(\tilde{w}; p) = R(x, y).$$

W metodzie Bubnowa-Galerkina błąd będzie minimalny, jeśli współczynniki w_i rozwiązania (3.38) obliczymy z warunków ortogonalności funkcji $R(x, y)$ i funkcji bazowych $\psi_i(x, y)$:

$$\iint_A L\left(\sum_{j=1}^N w_j \psi_j; p\right) \psi_i \, dA = 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, n. \quad (3.39)$$

Po uwzględnieniu (3.37) dochodzimy do następującego układu równań liniowych:

$$\sum_{j=1}^N \left(\iint_A \nabla^2 \psi_j \cdot \nabla^2 \psi_i \, dx dy \right) w_j = \iint_A \frac{p}{D} \psi_i \, dx dy,$$

który można napisać w postaci skróconej:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} w_j = b_i \quad \text{dla } i = 1, \dots, n, \quad (3.40)$$

gdzie współczynniki a_{ij} i b_i wynoszą:

$$a_{ij} = \iint_A \nabla^2 \psi_j \cdot \nabla^2 \psi_i \, dA, \quad (3.41)$$

$$b_i = \iint_A \frac{p}{D} \psi_i \, dA.$$

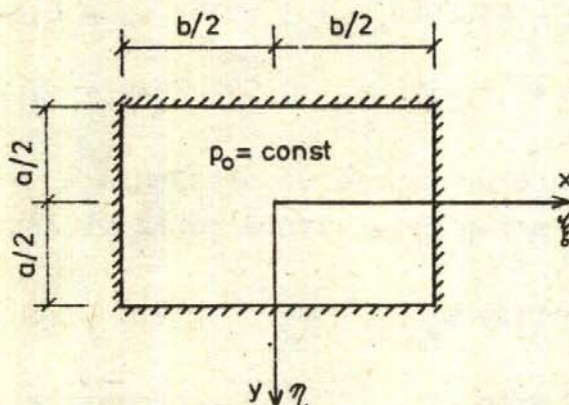
Wzory (3.41) są ważne dla różnych układów współrzędnych.

Metoda ortogonalizacji jest ogólniejsza od metody energetycznej. Można ją stosować bez budowania funkcjonału energii potencjalnej. Z tego powodu metoda ortogonalizacji jest używana w analizie różnych zagadnień, gdzie można wyprowadzić równanie różniczkowe /lub układy równań/ bez uciekania się do odpowiednich funkcjonałów. Przykładem może być analiza zginania płyt niesprężystych.

Jeżeli funkcje bazowe spełniają tylko kinematyczne warunki brzegowe, to warunki ortogonalności wymagają obliczenia odpowiednich całek wzdłuż konturu, aby zminimalizować błąd, z jakim spełniamy siłowe warunki brzegowe.

W metodzie energetycznej posługujemy się funkcjami kinematycznie dopuszczalnymi $\psi_1 \in C^{2/2}$, a więc dwukrotnie różniczkowalnymi. W metodzie ortogonalizacji musimy przyjmować funkcje bazowe $\psi_1 \in C^{4/4}$. Jeśli funkcje te spełniają w dodatku wszystkie warunki brzegowe, to współczynniki a_{ij} oraz b_i liczone wzorami (3.27) lub (3.41) są takie same, a więc metody Ritza i Bubnowa-Galerkina dają jednakowe wyniki.

Przykład 3.9. Płyta utwierdzona obciążona równomiernie /rys.3.17/.



Rys.3.17. Prostokątna płyta z bezwymiarowym układem współrzędnych

Dla współrzędnych bezwymiarowych (3.33) przyjmujemy funkcje bazowe (3.28), a więc:

$$\psi_1 = X_1 Y_1, \quad \psi_2 = X_1 Y_2 + X_2 Y_1, \quad \psi_3 = X_2 Y_2,$$

gdzie funkcje jednej zmiennej wynoszą:

$$X_1 = (\xi^2 - 1)^2, \quad X_2 = \xi^2 X_1,$$

$$Y_1 = (\eta^2 - 1)^2, \quad Y_2 = \eta^2 Y_1.$$

Funkcje te spełniają warunki brzegowe:

$$X_k(\pm 1) = 0, \quad \left. \frac{\partial X_k}{\partial x} \right|_{\xi = \pm 1} = 0,$$

$$Y_m(\pm 1) = 0, \quad \left. \frac{\partial Y_m}{\partial y} \right|_{\eta = \pm 1} = 0.$$

Obliczymy 3 kolejne przybliżenia ugięcia płyty:

$$\tilde{w} / n/ = \sum_{i=1}^n w_i \psi_i .$$

Współczynniki a_{ij} , b_j obliczono dla płyty kwadratowej w [15]. Przewadzi to do następnego układu równań liniowych:

$$106,997 w_1 + 19,4541 w_2 + 1,08078 w_3 = 0,142222 w_0 ,$$

$$19,4541 w_1 + 43,8964 w_2 + 3,49168 w_3 = 0,0406349 w_0 ,$$

$$1,08078 w_1 + 3,49168 w_2 + 0,094474 w_3 = 0,00290245 w_0 ,$$

gdzie po prawej stronie występuje współczynnik $w_0 = p_0 a^4 / D$. Kolejne przybliżenia otrzymujemy przez rozwiązanie coraz większej liczby równań:

$$w_1^{/1/} = 0,001329 w_0 ,$$

$$w_1^{/2/} = 0,001268 w_0 , \quad w_2^{/2/} = 0,0003379 w_0 ,$$

$$w_1^{/3/} = 0,001264 w_0 , \quad w_2^{/3/} = 0,0003343 w_0 , \quad w_3^{/3/} = 0,0003906 w_0 .$$

Z postaci funkcji dopuszczalnych wynika, że $w_1^{/1/}$ odpowiada ugięciu środka płyty:

$$w_{\max} = w(0, 0) = w_1^{/1/} .$$

Obliczone wartości można porównać z rozwiązaniem otrzymanym podwójnymi szeregami trygonometrycznymi. W [15], str. 193 dla płyty kwadratowej $b/a = 1$ podano rozwiązania, które można uznać za ścisłe:

$$w(0, 0) = 0,30126 \frac{p_0 a^4}{D} = w_{\text{śc}} ,$$

skąd wynika:

$$w_1^{/1/} = 1,0548 w_{\text{śc}} .$$

Jeśli jako rozwiązanie przybliżone przyjmiemy:

$$\tilde{w} = \frac{w_1}{4} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right) ,$$

to otrzymujemy przybliżenie:

$$w_1 = 0,0012833 \frac{pa^4}{D} = 1,0185 w_{\text{śc}}.$$

Otrzymane rozwiązanie dla \tilde{w} daje dobre wyniki również dla momentów zginających.

Dla płyty kwadratowej i $\nu = 0,3$ otrzymano rozwiązanie /tabl. 35, str. 193 w [15] /:

$$m_x(0, 0) = 0,0231 p_0 a^2,$$

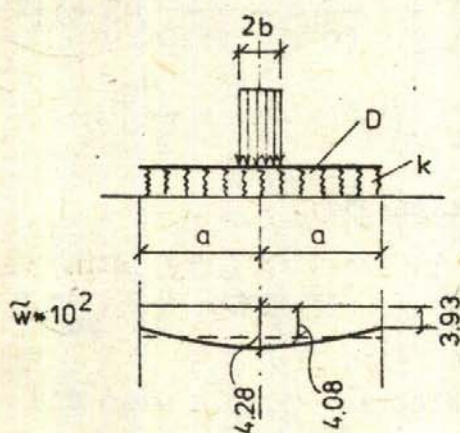
$$m_x(a/2, 0) = -0,0513 p_0 a^2.$$

Przyjmując współczynniki $w_j^{i/}$ momenty zginające wynoszą:

$$m_x^{1/}(0, 0) = 0,0276 p_0 a^2, \quad m_x^{3/}(0, 0) = 0,0228 p_0 a^2,$$

$$m_x^{1/}(a/2, 0) = -0,0425 p_0 a^2, \quad m_x^{3/}(a/2, 0) = -0,0512 p_0 a^2.$$

Przykład 3.10. Płyta kołowa na podłożu winklerowskim /rys.3.18/.



Rys.3.18. Płyta kołowo-symetryczna na podłożu winklerowskim

Do obliczeń metodą ortogonalizacji nie można przyjąć funkcji \tilde{w} w postaci wielomianu drugiego stopnia (3.35). Do obliczeń przyjmujemy ugięcie w postaci:

$$\tilde{w} = w_1 + w_2 r^2 + w_3 r^4 + w_4 r^6.$$

Współczynniki w_3 i w_4 obliczamy z warunków brzegowych:

$$m_r(a) \equiv -D \left(\frac{d^2 \tilde{w}}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\tilde{w}}{dr} \right)_{r=a} = 0,$$

$$q_r(a) \equiv -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \tilde{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{w}}{dr} \right)_{r=a} = 0.$$

Z tych równań otrzymujemy:

$$w_3 = -\frac{3}{4} \frac{1+\nu}{2+\nu} \frac{w_2}{a^2}, \quad w_4 = \frac{1+\nu}{6(2+\nu)} \frac{w_2}{a^4},$$

co prowadzi do funkcji \tilde{w} w postaci:

$$\tilde{w} = w_1 + w_2 r^2 \left(1 - \frac{3}{4} \frac{1+\nu}{2+\nu} \frac{r^2}{a^2} + \frac{1+\nu}{6(2+\nu)} \frac{r^4}{a^4} \right).$$

Z warunków ortogonalności obliczamy współczynniki a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_1 , b_2 według wzorów (3.41). Dochodzimy w ten sposób do układu równań:

$$w_1 + \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{5}{12} \mu \right) w_2 = p a,$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{5}{12} \mu \right) w_1 + \left[\frac{2}{3} - \frac{37}{60} \mu + \frac{377}{2520} \mu^2 + \left(1 - \frac{3}{5} \mu \right) 16 \mu c \right] a^2 w_2 = \\ = p a \beta^2 \left[1 - \left(\beta^2 + \frac{\beta^4}{6} \right) \frac{\mu}{2} \right], \end{aligned}$$

gdzie posłużono się oznaczeniami:

$$\mu = \frac{1+\nu}{2+\nu}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad c = \frac{D}{ka^4}, \quad p = \frac{qb^2}{ka^3} = \frac{p}{\pi ka^3}.$$

Dla danych jak w przykładzie 3.8, a więc dla

$$a = 5 \text{ cm}, \quad c = 1, \quad \beta = 0, \quad \nu = 0,3, \quad p = 8,16 \cdot 10^{-3}$$

otrzymujemy:

$$\tilde{w}(0) = w_1 = 4,28 \cdot 10^{-2} \text{ cm} = 0,995 w_{\xi c},$$

$$\tilde{w}(a) = 3,93 \cdot 10^{-2} \text{ cm} = 1,005 w_{\xi c}.$$

Tak więc widać, że dla analizowanej płyty błędy w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym /por. [15], str. 246/ wynoszą zaledwie 0,5 %. W przykładzie 3.8, gdzie tę samą płytę analizowaliśmy metodą Ritz'a, przyjmując ugięcie przybliżone (3.35), błąd wynosił 3 %.

Niewielkie różnice między ugięciami brzegu i środka płyty świadczą o dość dużej jej sztywności. Jeśli przyjmiemy $D \rightarrow \infty$, to $w_2 = 0$ i ugięcie jest stałe i wynosi

$$\tilde{w} = p a = 4.08 \cdot 10^{-2} \text{ cm.}$$

Na rys. 3.18 linią przerywaną zaznaczono ugięcie płyty sztywnej.

3.12. Przykłady do rozwiązania

1. Korzystając z przybliżonych postaci funkcji dopuszczalnych (3.29), (3.32), (3.34) obliczyć metodą energetyczną wartości momentów zginających w środku płyty i porównać je z rozwiązaniem ścisłym z tabl. 3.1 dla $b/a = 2,0$.

2. Opierając się na metodzie Ritz'a obliczyć wartości współczynników w_1 i c występujących w funkcji ugięcia $\tilde{w}(\rho)$ dla płyt kołowych równomiernie obciążonych o następujących warunkach brzegowych /rys. 3.2/:

a/ utwierdzenie brzegu

$$\tilde{w} = w_1 (1 - \rho^2)^2,$$

b/ przegubowe podparcie

$$\tilde{w} = w_1 (c - \rho^2) (1 - \rho^2).$$

3. Obliczyć współczynniki w_1 dla płyty i funkcji bazowych z przykładu 3.7, posługując się metodą ortogonalizacji.

4. OBLICZANIE PŁYT ZGINANYCH METODĄ RÓZNIC SKONCZONYCH

4.1. Główne problemy MRS

Metoda różnic skończonych /MRS/, o której wspomnieliśmy w p.3.1, wymaga ustalenia węzłów, w których obliczamy ugięcia i siły przekrojowe płyty. Taki zbiór punktów /węzłów/ otrzymujemy jako przecięcie linii siatki różnicowej.

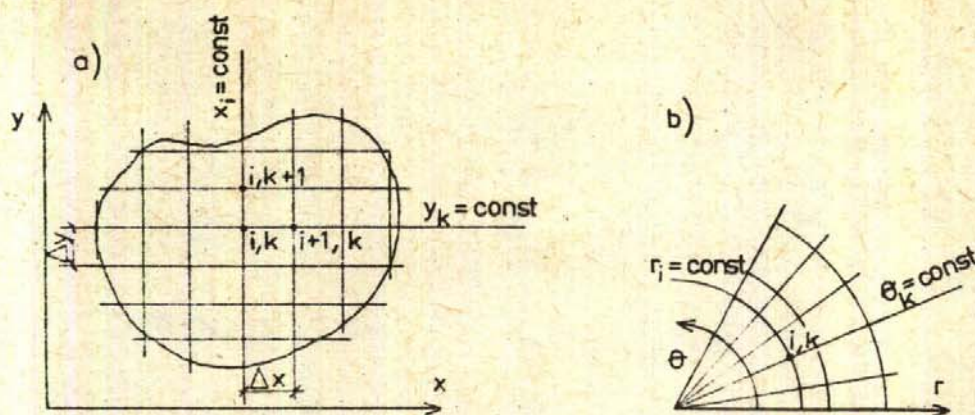
W przypadku układu współrzędnych kartezjańskich siatkę tworzą linie równoległe do układu współrzędnych $x = x_i = \text{const.}$, $y = y_i = \text{const.}$, we współrzędnych biegunowych linie promieniowe i obwodowe $r = r_i = \text{const.}$, $\theta = \theta_i = \text{const.}$ /rys. 4.1/. Ogólnie mówimy o dyskretyzacji obszaru i problemu. W pierwszym przypadku chodzi o zamianę obszaru ciągłego przeliczalnym /dyskretnym/ zbiorem węzłów, w drugim przypadku o poszukiwanie rozwiązania w postaci przeliczalnego zbioru wartości ugięć $w_{i,k}^x$ zamiast funkcji ugięcia $w(x, y)$. Od strony obliczeniowej rozwiązywanie równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych jest zastąpione rozwiązywaniem układu równań algebraicznych.

Stosowanie MRS wymaga rozwiązania następujących zagadnień:

- a. Zastąpienie operatorów różniczkowych w równaniu różniczkowym płyty lub w funkcjonale energii potencjalnej odpowiednimi wzorami różnicowymi.
- b. Sformułowanie warunków brzegowych w postaci różnicowej.
- c. Dyskretyzacja obciążeń rozłożonych.
- d. Obliczenie współczynników układu równań algebraicznych i rozwiązanie tego układu.
- e. Obliczenie wartości sił przekrojowych w węzłach siatki różnicowej korzystając ze wzorów różnicowych w równaniach kinematycznych.

W dalszym ciągu zajmiemy się tylko płytami prostokątnymi przy założeniu siatki różnicowej o stałym kroku $\Delta x = \text{const.}$, $\Delta y = \text{const.}$ /rys. 4.1a/. Odpowiednie wzory różnicowe są wyprowadzone w dodatku D.1. Wzory dla układu współrzędnych biegunowych można znaleźć w monografii [5].

^{x/}Przecinek rozdziela tylko indeksy i nie oznacza różniczkowania.



Rys.4.1. Siatki różnicowe dla różnych układów współrzędnych

Należy dodać, że MRS można też stosować do nieregularnych obszarów przy dowolnym rozmieszczeniu węzłów. Odpowiednie informacje są podane w [11].

4.2. Podstawowe zależności w zapisie różnicowym

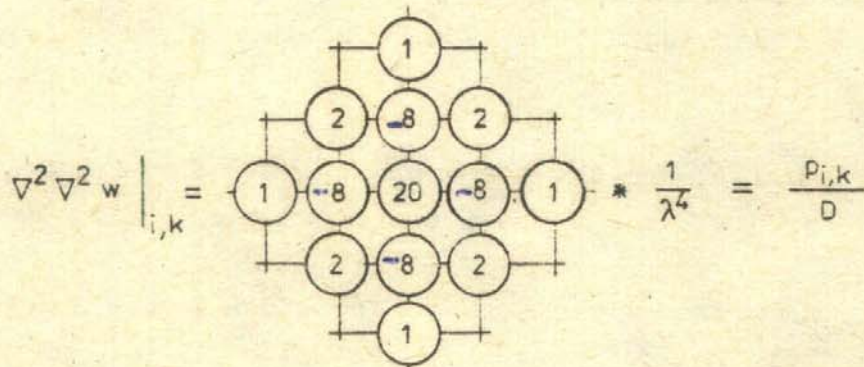
Korzystając ze wzorów różnicowych zebranych w tabl. D.1.1 równanie różniczkowe płyty (2.28b) piszemy w postaci:

$$\begin{aligned}
 \nabla^4 w \approx & \frac{1}{\Delta x^4} (w_{i-2,k} - 4w_{i-1,k} + 6w_{i,k} - 4w_{i+1,k} + \\
 & + w_{i+2,k}) + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} [4w_{i,k} - 2(w_{i-1,k} + w_{i,k-1} + \\
 & + w_{i+1,k} + w_{i,k+1}) + (w_{i-1,k-1} + w_{i-1,k+1} + w_{i+1,k-1} + \\
 & + w_{i+1,k+1})] + \frac{1}{\Delta y^4} (w_{i,k-2} - 4w_{i,k-1} + 6w_{i,k} - \\
 & - 4w_{i,k+1} + w_{i,k+2}) = \frac{P_{i,k}}{D} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

W przypadku siatki kwadratowej $\Delta x = \Delta y = \lambda$ równanie (4.1) upraszcza się do postaci:

$$\begin{aligned}
 20 w_{i,k} - 8(w_{i-1,k} + w_{i+1,k} + w_{i,k-1} + w_{i,k+1}) + \\
 + 2(w_{i-1,k-1} + w_{i-1,k+1} + w_{i+1,k-1} + w_{i+1,k+1}) + \\
 + (w_{i-2,k} + w_{i+2,k} + w_{i,k-2} + w_{i,k+2}) = \frac{\lambda^4}{D} P_{i,k} \quad (4.1a)
 \end{aligned}$$

Równanie (4.1a) służy zbudowaniu układu równań algebraicznych do wyznaczenia ugięć węzłów całej płyty. Korzystamy w tym celu z tzw. gwiazdy współczynników, która jest symetryczna względem punktu centralnego i,k /rys. 4.2/.



Rys.4.2. Gwiazda współczynników dla równania płyty

Siły przekrojowe oraz zastępcze siły poprzeczne wyrażamy również za pomocą wzorów różnicowych:

$$\begin{aligned}
 (m_x)_{i,k} &\approx -D \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \nu \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right]_{i,k} = \\
 &= -\frac{D}{\lambda^2} \left[(w_{i+1,k} - 2w_{i,k} + w_{i-1,k}) + \right. \\
 &\quad \left. + \nu (w_{i,k+1} - 2w_{i,k} + w_{i,k-1}) \right], \\
 (m_y)_{i,k} &\approx -D \left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} + \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right] = -\frac{D}{\lambda^2} \left[(w_{i,k+1} - 2w_{i,k} + w_{i,k-1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \nu (w_{i+1,k} - 2w_{i,k} + w_{i-1,k}) \right].
 \end{aligned}$$

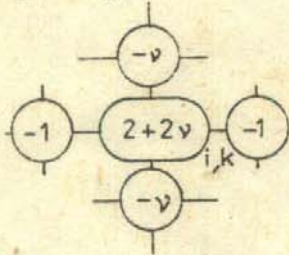
$$\begin{aligned}
 (m_{xy})_{ik} &= (m_{yx})_{i,k} \approx -D(1-\nu) \left[\frac{\Delta}{2\Delta x} \left(\frac{\Delta w}{2\Delta y} \right) \right]_{i,k} = \\
 &= \frac{1-\nu}{4\lambda^2} D \left[w_{i-1,k-1} + w_{i+1,k+1} - w_{i-1,k+1} - w_{i+1,k-1} \right], \\
 (q_x)_{i,k} &\approx -D \left[\frac{\Delta}{2\Delta x} \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right) \right]_{i,k} = \\
 &= -\frac{D}{2\lambda} \left[\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_{i+1,k} - \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_{i-1,k} + \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right)_{i+1,k} - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right)_{i-1,k} \right] = -\frac{D}{2\lambda^3} \left[-w_{i-2,k} + w_{i+2,k} - \right. \\
 &\quad - w_{i-1,k-1} + w_{i+1,k-1} - w_{i-1,k+1} + w_{i+1,k+1} - \\
 &\quad \left. - 4(w_{i+1,k} - w_{i-1,k}) \right], \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (q_y)_{i,k} &\approx -D \left[\frac{\Delta}{2\Delta y} \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right) \right]_{i,k} = \\
 &= -\frac{D}{2\lambda} \left[\left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_{i,k+1} - \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right)_{i,k-1} + \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right)_{i,k+1} - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right)_{i,k-1} \right] = -\frac{D}{2\lambda^3} \left[-w_{i,k-2} + w_{i,k+2} - w_{i-1,k-1} + \right. \\
 &\quad \left. + w_{i-1,k+1} - w_{i+1,k-1} + w_{i+1,k+1} - 4(w_{i,k+1} - w_{i,k-1}) \right],
 \end{aligned}$$

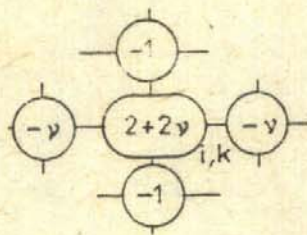
$$\begin{aligned}
 (\bar{q}_x)_{i,k} &\approx -D \left[\frac{\Delta^3 w}{\Delta x^3} + (2-\nu) \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right) \right]_{i,k} = \\
 &= -\frac{D}{\lambda^3} \left[-w_{i-2,k} - 2w_{i-1,k} + 2w_{i+1,k} + w_{i+2,k} + \right. \\
 &\quad \left. + (2-\nu)(-w_{i-1,k-1} + 2w_{i-1,k} - w_{i-1,k+1} + \right. \\
 &\quad \left. + w_{i+1,k-1} - 2w_{i+1,k} + w_{i+1,k+1}) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\bar{q}_y)_{i,k} &\approx -D \left[\frac{\Delta^3 w}{\Delta y^3} + (2-\nu) \frac{\Delta}{\Delta y} \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right) \right]_{i,k} = \\
 &= -\frac{D}{\lambda^3} \left[-w_{i,k-2} - 2w_{i,k-1} + 2w_{i,k+1} + w_{i,k+2} + \right. \\
 &\quad \left. + (2-\nu) (-w_{i-1,k-1} + 2w_{i,k-1} + w_{i+1,k-2} - \right. \\
 &\quad \left. - w_{i-1,k+1} - 2w_{i,k+1} + w_{i+1,k+1}) \right].
 \end{aligned}$$

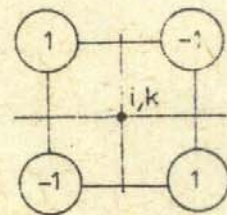
$$(m_x)_{i,k} = \frac{D}{\lambda^2} *$$



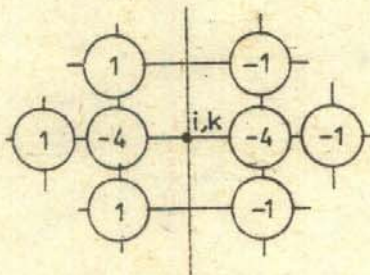
$$(m_y)_{i,k} = \frac{D}{\lambda^2} *$$



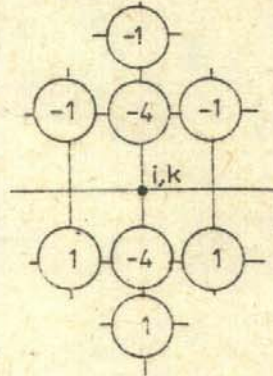
$$(m_{xy})_{i,k} = \frac{D(1-\nu)}{4\lambda^2} *$$



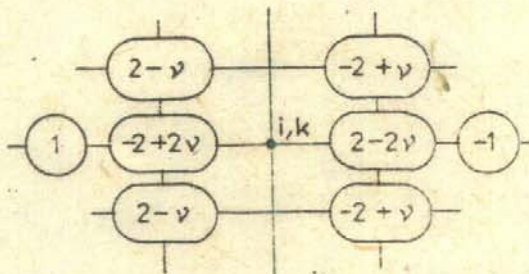
$$(q_x)_{i,k} = \frac{D}{2\lambda^3} *$$



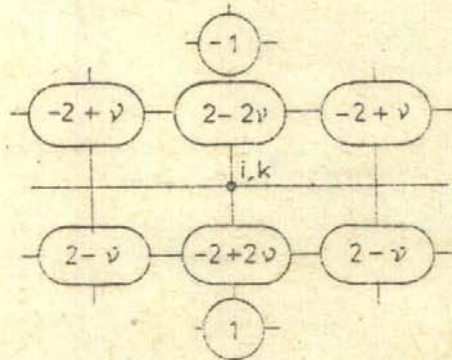
$$(q_y)_{i,k} = \frac{D}{2\lambda^3} *$$



$$(\bar{q}_x)_{i,k} = \frac{D}{\lambda^3} *$$



$$(\bar{q}_y)_{i,k} = \frac{D}{\lambda^3} *$$



Rys.4.3. Gwiazdy różnicowe dla sił przekrojowych i zastępczych sił poprzecznych

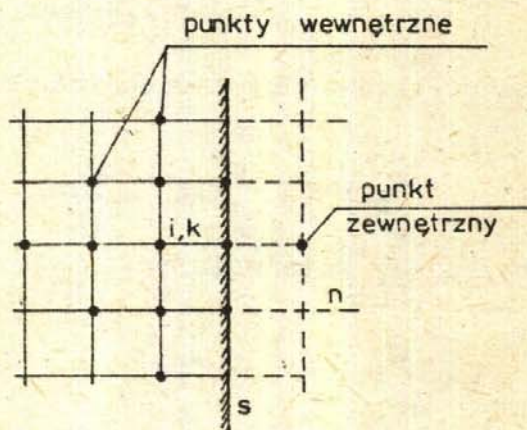
Na rys.4.3 pokazano gwiazdy różnicowe dla wzorów (4.3) w odniesieniu do punktu centralnego i, k .

4.3. Warunki brzegowe

Stosowanie MES wymaga sformułowania warunków brzegowych jako zależności między ugięciami węzłów siatki w obszarze płyty i węzłów fikcyjnych leżących poza płytą. Takie fikcyjne zewnętrzne węzły pojawiają się przy działaniu gwiazdy różnicowej operatora $\nabla^2 \nabla^2$ na węzły płyty /węzły wewnętrzne/ sąsiadujące z brzegiem - rys. 4.4.

Omówimy kolejno różne warunki podparcia brzegu, przyjmując dla ustalenia uwagi, że linia brzegu jest równoległa do osi y , tzn. $n = x, s = y$.

Dla krawędzi zamocowanej w każdym jej punkcie i, k mają być spełnione warunki:



Rys.4.4. Węzły wewnętrzne i zewnętrzne siatki różnicowej

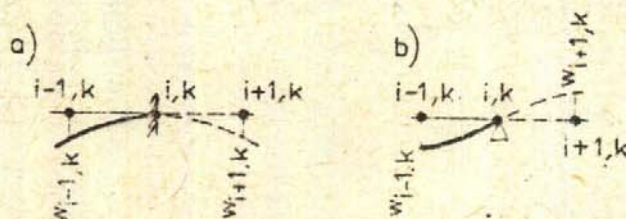
$$w_{i,k} = 0, \quad (\varphi_n)_{i,k} = 0.$$

Kąt obrotu normalnej φ_n obliczamy wzorem różnicowym:

$$(\varphi_n)_{i,k} = - \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{i,k} \approx - \frac{w_{i+1,k} - w_{i-1,k}}{2\lambda},$$

skąd wynika zależność między ugięciami punktów $i+1,k$ oraz $i-1,k$ /rys. 4.5a/:

$$w_{i+1,k} = w_{i-1,k}. \quad (4.4)$$



Rys.4.5. Zależność między ugięciami punktów zewnętrznych i wewnętrznych dla krawędzi utwierdzonej i przegubowo podpartej

Dla krawędzi przegubowo podpartej zamiast zależności (4.4) wycho-
dzimy z warunku:

$$\begin{aligned} (m_n)_{i,k} &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{i,k} \approx \\ &\approx -\frac{D}{\lambda^2} \left[(w_{i+1,k} - 2w_{i,k} + w_{i-1,k}) + \right. \\ &\quad \left. + \nu (w_{i,k+1} - 2w_{i,k} + w_{i,k-1}) \right] = 0, \end{aligned}$$

a po uwzględnieniu niepodatnego podparcia:

$$w_{i,k+1} = w_{i,k} = w_{i,k-1} = 0$$

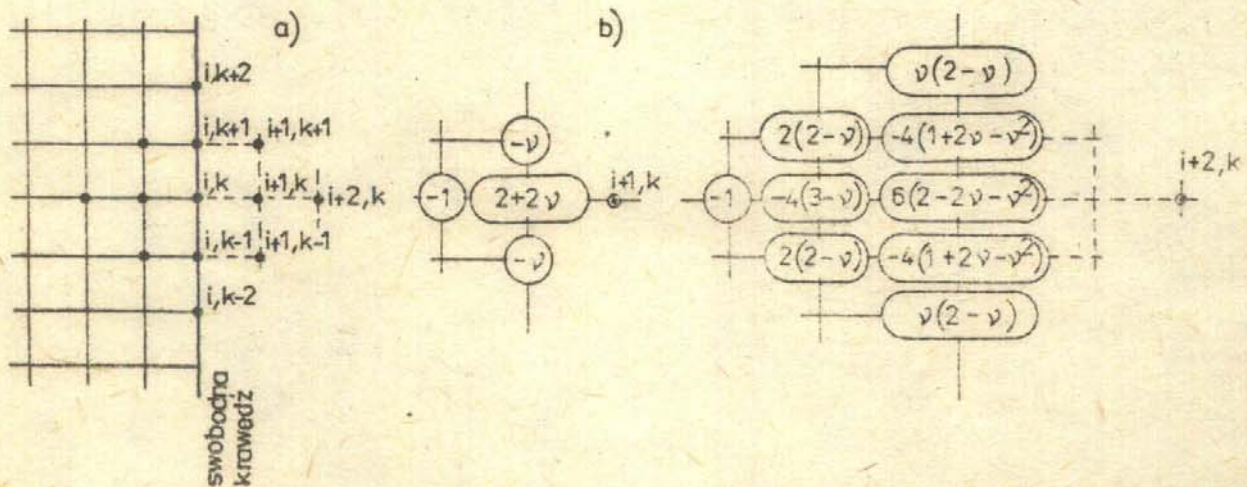
otrzymujemy zależność /rys. 4.5b/:

$$w_{i+1,k} = -w_{i-1,k} \quad (4.5)$$

Bardziej złożone związki otrzymujemy dla krawędzi swobodnej o warun-
kach brzegowych:

$$(m_n)_{i,k} = 0, \quad (\bar{q}_n)_{i,k} = 0.$$

W tym przypadku gwiazdę różnicową budujemy dla równania płyty rów-
nież w węźle brzegowym i,k . Obejmuje ona 4 punkty zewnętrzne/rys.4.6a/.
Oprócz dwóch wyżej napisanych warunków brzegowych korzystamy z warunków
zerowania się momentów w punktach $i,k+1$ oraz $i,k-1$



Rys.4.6. Zależności między ugięciami wę-
złów zewnętrznych i wewnętrznych

$$(m_x)_{i,k+1} = (m_x)_{i,k-1} = 0.$$

Korzystając z podanych zależności ugięcia punktów $i+1,k$ oraz $i+2,k$ wyrażamy przez ugięcia węzłów wewnętrznych i brzegowych /rys.4.6b,c/:

$$\begin{aligned} w_{i+1,k} &= -w_{i-1,k} + 2(1+\nu)w_{i,k} - \nu(w_{i,k+1} + w_{i,k-1}), \\ w_{i+2,k} &= -w_{i-2,k} - 4(3-\nu)w_{i-1,k} + 6(2+2\nu-\nu^2)w_{i,k} \\ &\quad + 2(2-\nu)(w_{i-1,k-1} + w_{i-1,k+1}) - \\ &\quad - 4(1+2\nu-\nu^2)(w_{i,k-1} + w_{i,k+1}) + \\ &\quad + \nu(2-\nu)(w_{i,k-2} + w_{i,k+2}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

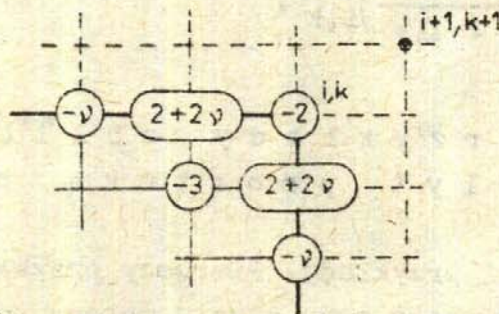
W przypadku naroża, w którym schodzą się dwie wzajemnie prostopadłe krawędzie swobodne, należy dodatkowo spełnić warunek zerowania się siły narożnej. Ze wzoru (2.48) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} R &= 2 m_{xy} \approx \\ &\approx \frac{D(1-\nu)}{2\lambda^2} (w_{i-1,k+1} - w_{i+1,k+1} + w_{i+1,k-1} - w_{i-1,k-1}) = 0. \end{aligned}$$

Po dołączeniu związków wynikających z zerowania się momentów zginających:

$$(m_x)_{i,k-1} = (m_y)_{i-1,k} = 0$$

wyrażamy ugięcie $w_{i+1,k+1}$ przez ugięcia węzłów płyty /rys. 4.7/:

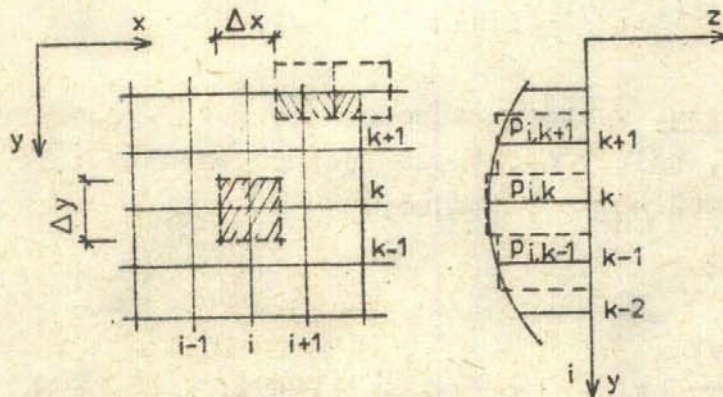


Rys.4.7. Zależność dla naroża swobodnego

$$w_{i+1,k+1} = -2w_{i,k} + 2(1+\nu)(w_{i-1,k} + w_{i,k-1}) - 3w_{i-1,k-1} - \nu(w_{i-2,k} + w_{i,k-2}). \quad (4,7)$$

4.4. Obciążenie w równaniu różnicowym

W równaniu (4.1) po prawej stronie podstawiamy wartość intensywności obciążenia w węźle i,k . Jeśli obciążenie nie jest równomierne, to za $P_{i,k}$ podstawiamy wartość średnią dla odpowiedniego prostokąta o wymiarach $\Delta x \Delta y$, którego środek stanowi węzeł i,k /rys. 4.8/.



Rys.4.8. Uśrednianie dla naroża swobodnego

W przypadku węzłów brzegowych należy przyjąć wartość intensywności $p/2$ lub $p/4$, jak wynika z "rozmazania" obciążenia na polu $\Delta x \cdot \Delta y$. W przypadku obciążenia siłą skupioną P zamieniamy ją też na obciążenie równomiernie rozłożone, związane z węzłem i,k :

$$P_{i,k} = \left(\frac{P}{\Delta x \cdot \Delta y} \right)_{i,k}. \quad (4.8)$$

4.5. Przykłady obliczania płyt prostokątnych

Przytaczamy tylko 2 przykłady. Pierwszy przykład ma na celu porównanie rozwiązania otrzymanego przy użyciu metody różnic skończonych z rozwiązaniem uzyskanym podwójnymi szeregami trygonometrycznymi. Drugi przykład ma wskazać możliwości analizy numerycznej, gdy warunki brzegowe stwarzają duże trudności w stosowaniu metod analitycznych.

Przykład 4.1. Płyta kwadratowa przegubowo podparta, obciążona równomiernie.

Ze względu na symetrię pokazano na rys. 4.9 odpowiednią numerację punktów przy rzadszej i gęstszej siatce różnicowej. Dla skrócenia zapisu przyjęliśmy jednoindeksowe oznaczenie węzłów. Węzły zewnętrzne oznaczono indeksami ujemnymi, aby łatwo uwzględnić warunek (4.5) podparcia przegubowego. Zgodnie z (4.1a) piszemy równania dla kolejnych węzłów przy podziale boku a na 4 odcinki /rys. 4.9a/:

$$20 w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_3) = \frac{p_0 \lambda^4}{D},$$

$$20 w_2 - 8(2w_3 + w_1) + 2(2w_2) + (w_2 - w_2) = \frac{p_0 \lambda^4}{D},$$

$$20 w_3 - 8(2w_2) + 2(w_1) + (w_3 - w_3 + w_3 - w_3) = \frac{p_0 \lambda^4}{D}.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy układ równań:

$$20 w_1 - 32 w_2 + 8 w_3 = A,$$

$$-8 w_1 + 24 w_2 - 16 w_3 = A,$$

$$2 w_1 - 16 w_2 + 20 w_3 = A, \quad \text{gdzie } A = \frac{p_0 a^4}{265 D},$$

którego rozwiązaniem są ugięcia:

$$w_1 = 1,03125 A, \quad w_2 = 0,75 A, \quad w_3 = 0,546875 A.$$

Po podstawieniu za $A = p_0 a^4 / (265 D)$ otrzymujemy:

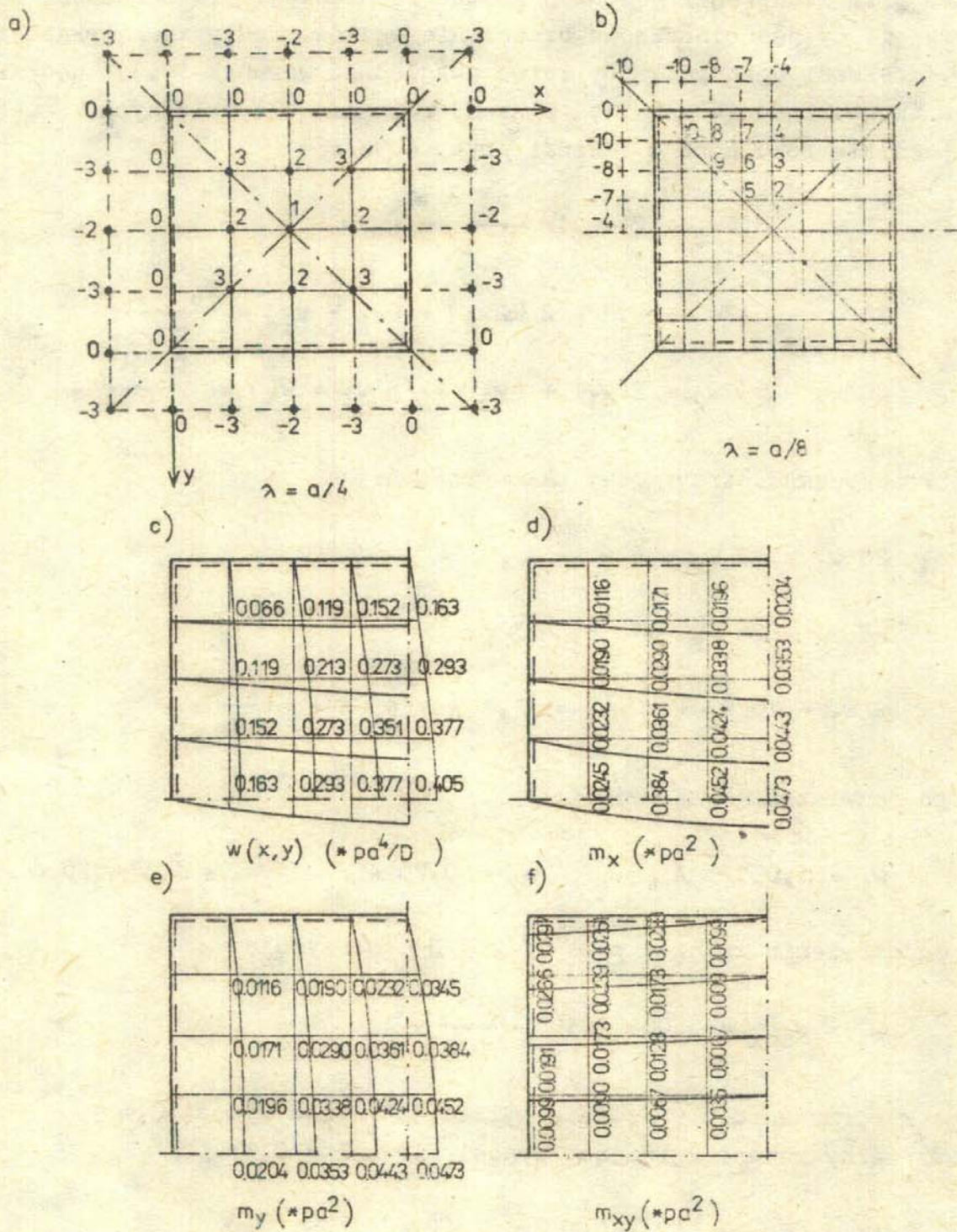
$$w_1 = w_{\max} = 0,0040283 \frac{p_0 a^4}{D},$$

a więc w porównaniu z wartością z tabl.3.1 błąd wynosi 0,6 %.

Maksymalny moment zginający wynosi dla $\nu = 0,3$:

$$\begin{aligned} (m_x)_1 &= \frac{D}{\lambda^2} [(2 + 2\nu) w_1 - (2 + 2\nu) w_2] = \\ &= 0,73125 A \frac{D}{\lambda^2} = 0,045703 p_0 a^2, \end{aligned}$$

co w porównaniu z wartością $0,0479 p_0 a^2$ daje błąd ok. 5,6 %.



Rys.4.9. Siatki różnicowe dla płyty kwadratowej przegubowo podpartej oraz wyniki obliczeń

Dla siatki różnicowej o $\lambda = a/8$ otrzymano układ dziesięciu równań:

$$\begin{bmatrix} 20 & -32 & 4 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 25 & -8 & -1 & -16 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 4 & -16 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 19 & 0 & 4 & -16 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -16 & 4 & 0 & 22 & -16 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 2 & -8 & 23 & -8 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & 20 & -8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -8 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -16 & 4 & -16 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -16 & 2 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0625 \text{ A} \\ 0,0625 \text{ A} \\ 0,0625 \text{ A} \\ 0,0625 \text{ A} \\ 0,0625 \text{ A} \\ 0,0625 \text{ A} \\ 0,0625 \text{ A} \\ 0,0625 \text{ A} \\ 0,0625 \text{ A} \\ 0,0625 \text{ A} \end{bmatrix}$$

a ugięcia w węzłach siatki wynoszą:

$$w_1 = 1,038018 \text{ A}, \quad w_2 = 0,965236 \text{ A}, \quad w_3 = 0,751953 \text{ A},$$

$$w_4 = 0,416468 \text{ A}, \quad w_5 = 0,897733 \text{ A}, \quad w_6 = 0,699773 \text{ A},$$

$$w_7 = 0,387912 \text{ A}, \quad w_8 = 0,303741 \text{ A}, \quad w_9 = 0,546421 \text{ A},$$

$$w_{10} = 0,169650 \text{ A}.$$

Błąd, z jakim określono przy tej siatce $w_{\max} = w_1 = 1,038018 \text{ A} = 0,0040547 p_0 a^4/D$ wynosi 0,13 %, natomiast moment $(m_x)_1$ określono z dokładności 0,987 %.

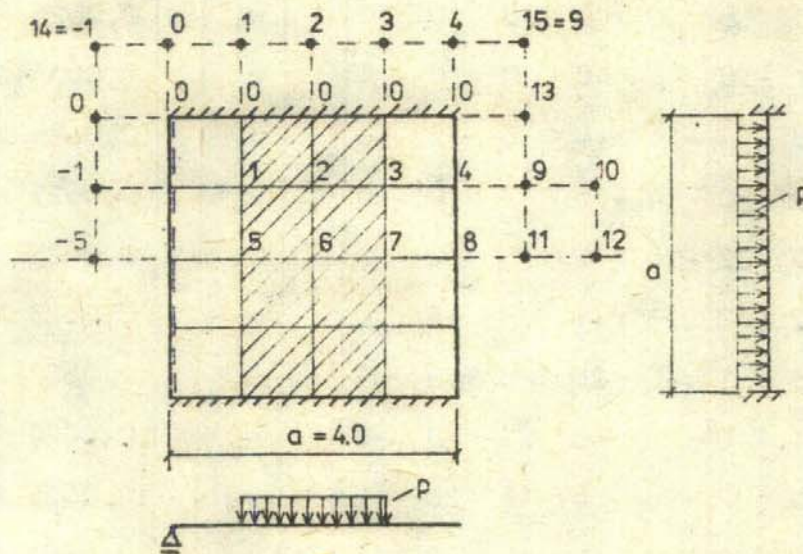
Przykład 4.2. Płyta kwadratowa o zróżnicowanych warunkach brzegowych, częściowo obciążona.

Na rys. 4.10 pokazano podparcia krawędzi. Przyjęto obciążenie o intensywności $p = 10 \text{ kN/m}^2$, równomiernie rozłożone na części środkowej. Przy stałych materiałowych $E = 1,5 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ i $\nu = 0,1$ oraz grubości płyty $h = 0,1 \text{ m}$ sztywność płytowa wynosi:

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{1,5 \times 10^7 \times 0,1^3}{12(1 - 0,1^2)} = 1262,6 \text{ kNm}.$$

Ze względu na symetrię dla kroku siatki $\lambda = a/4$ otrzymujemy 8 węzłów, w których obliczamy ugięcia. Dla tych punktów piszemy równanie różnicowe płyty. Węzły zewnętrzne sąsiadujące z krawędziami zaznaczone

na rysunku będą powiązane z punktami wewnętrznymi poprzez warunki brzegowe.



Rys.4.10. Siatka różnicowa i numeracja węzłów

Korzystając z równań (4.6) wyrażamy ugięcia węzłów 9 - 13 przez ugięcia węzłów wewnętrznych:

$$w_9 = -w_3 + 2(1 + 0,1)w_4 - 0,1(0 + w_8),$$

$$w_{10} = w_2 - 4(3 - 0,1)w_3 + 6(2 + 2 \cdot 0,1 - 0,1^2)w_4 + \\ + 2(2 - 0,1)(0 + w_7) - 4(1 + 2 \cdot 0,1 - 0,1^2)(0 + w_8) + \\ + 0,1(2 - 0,1)(w_4 + w_4),$$

$$w_{11} = -w_7 + 2(1 + 0,1)w_8 - 0,1(w_4 + w_4),$$

$$w_{12} = w_6 - 4(3 - 0,1)w_7 + 6(2 + 2 \cdot 0,1 - 0,1^2)w_8 + \\ + 2(2 - 0,1)2 \cdot w_3 - 4(1 + 2 \cdot 0,1 - 0,1^2)2 \cdot w_4 + \\ + 0,1(2 - 0,1) \cdot 0,$$

$$w_{13} = -0 + 2(1 + 0,1) \cdot 0 - 0,1(w_4 + w_4).$$

Powyższe równania dołączamy do ośmiu równań wynikających z równań płyty napisanych dla węzłów wewnętrznych w postaci różnicowej. Przykładowo dla węzła 1 otrzymujemy:

$$20 w_1 - 8(0 + w_2 + 0 + w_5) + 2(0 + 0 + 0 + w_6) + (-w_1 + w_3 + w_1 + w_1) = \frac{p \lambda^4}{2 D} = 0,00396 .$$

W równaniu tym uwzględniono warunki brzegowe krawędzi utwierdzonej i przegubowo podparte.

Pełny układ równań ma postać:

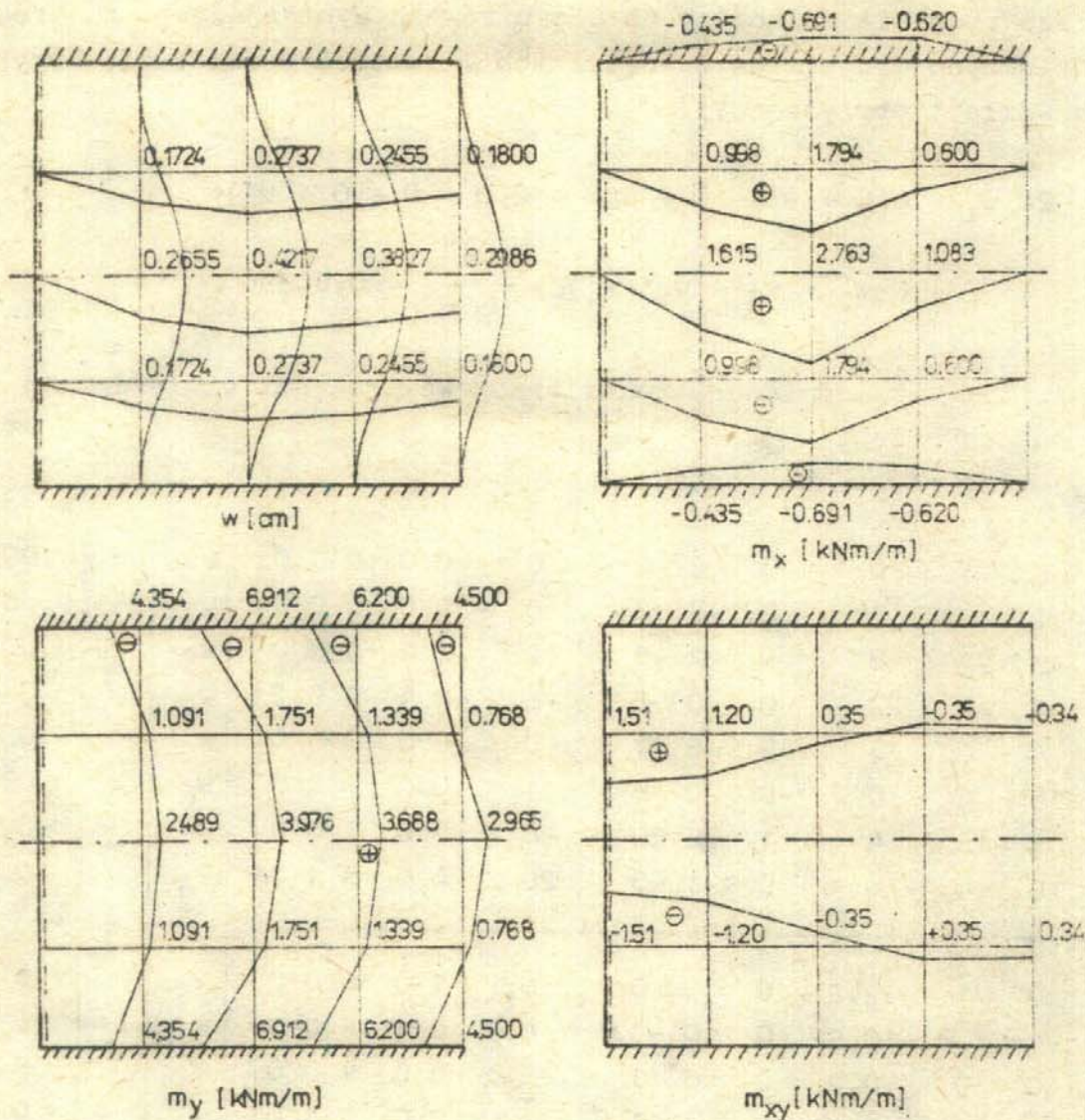
$$\begin{bmatrix} 21 & -8 & 1 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 22 & -8 & 1 & 2 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 22 & -8 & 0 & 2 & -8 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 22 & 0 & 0 & 2 & -8 & -8 & 1 & 2 & 0 \\ -16 & 4 & 0 & 0 & 19 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -16 & 4 & 0 & -8 & 20 & -8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -16 & 4 & 1 & -8 & 20 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -16 & 0 & 1 & -8 & 20 & 4 & 0 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \\ w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00396 \\ 0,00792 \\ 0,00396 \\ 0 \\ 0,00396 \\ 0,00792 \\ 0,00396 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem tego układu są ugięcia węzłów:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0,001724 \text{ m}, & w_2 &= 0,002737 \text{ m}, & w_3 &= 0,002455 \text{ m}, \\ w_4 &= 0,001800 \text{ m}, & w_5 &= 0,002655 \text{ m}, & w_6 &= 0,004217 \text{ m}, \\ w_7 &= 0,003887 \text{ m}, & w_8 &= 0,002986 \text{ m}, & w_9 &= 0,001205 \text{ m}, \\ w_{10} &= -0,000854 \text{ m}, & w_{11} &= +0,002322 \text{ m}, & w_{12} &= -0,000112 \text{ m}, \\ w_{13} &= -0,000365 \text{ m}. \end{aligned}$$

Na rys.4.11 pokazano wykresy ugięć oraz momentów. Wykresy momentów zginających m_x , m_y są symetryczne, a momentu m_{xy} - antysymetryczny względem płaszczyzny symetrii płyty zaznaczonej na rysunku.





Rys.4.11. Wykresy ugięć i momentów

4.6. Wariacyjne ujęcie MRS dla płyt prostokątnych niepodatnie podpartych

Różnice skończone można wykorzystać również w funkcjonale energii potencjalnej i poszukiwać rozwiązania na podstawie zasady minimum energii potencjalnej, tak jak czyni się w metodzie Ritz'a. Takie podejście nazywamy ujęciem globalnym ze względu na posługiwanie się funkcjonalem energii odnoszącej się do całej płyty. Odróżniamy je w ten sposób od ujęcia lokalnego, gdy MRS odnosi się do równania różniczkowego dla punktu płaszczyzny środkowej.

Istotę ujęcia wariacyjnego wytłumaczymy na przykładzie płyty prostokątnej podpartej niepodatnie, tzn. gdy dla brzegu $w(s) = 0$. W takim przypadku energia sprężysta płyty ma postać (2.64) i całkowity funkcjonal energii potencjalnej wynosi:

$$\pi = \frac{D}{2} \iint_A (\nabla^2 w)^2 dx dy - \iint_A p w dx dy. \quad (4.9)$$

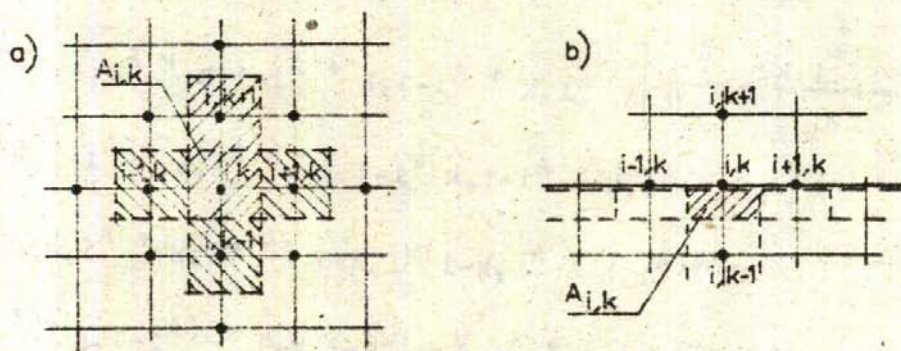
Korzystamy ze wzoru różnicowego dla laplasjanu:

$$(\nabla^2 w)_{i,k} \approx \frac{1}{\lambda^2} (w_{i-1,k} + w_{i+1,k} + w_{i,k-1} + w_{i,k+1} - 4w_{i,k})$$

i zamieniamy całkę sumą:

$$\begin{aligned} \pi &\approx \sum_j \tilde{\pi}_j = \sum_j (\tilde{U}_j + \tilde{W}_j) = \\ &= \sum_j \left\{ \frac{D}{2\lambda^4} (w_{i-1,k} + w_{i+1,k} + w_{i,k-1} + w_{i,k+1} - 4w_{i,k})^2 A_{i,k} - \right. \\ &\quad \left. - p_{i,k} w_{i,k} A_{i,k} \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

We wzorze (4.10) indeks j odpowiada węzłowi $/i,k/$. Zaznaczono ponadto wężykiem przybliżoną wartość energii $\tilde{\pi}_j$, odpowiadającą powierzchni $A_j = A_{i,k}$. Przybliżenie wynika z posługiwania się wzorami różnicowymi przy liczeniu energii sprężystej \tilde{U}_j i uśrednionych wartości intensywności obciążenia $p_{i,k}$ i ugięcia $w_{i,k}$ w pracy obciążeń zewnętrznych \tilde{W}_j .



Rys.4.12. Pola odpowiadające węzłom wewnętrznym i brzegowym

Na rys. 4.12a zaznaczono 5 pól, dla których energia potencjalna zawiera ugięcie $w_{i,k}$:

$$\begin{aligned}
 \overset{+}{\pi}_{i,k} &= \tilde{\pi}_{i,k} + \tilde{\pi}_{i-1,k} + \tilde{\pi}_{i+1,k} + \tilde{\pi}_{i,k-1} + \tilde{\pi}_{i,k+1} = \\
 &= \frac{D}{\lambda} \left[A_{i,k} (4w_{i,k} - w_{i-1,k} - w_{i+1,k} - w_{i,k-1} - w_{i,k+1})^2 + \right. \\
 &+ A_{i-1,k} (4w_{i-1,k} - w_{i-2,k} - w_{i,k} - w_{i-1,k-1} - w_{i-1,k+1})^2 + \\
 &+ A_{i+1,k} (4w_{i+1,k} - w_{i,k} - w_{i+2,k} - w_{i+1,k-1} - w_{i+1,k+1})^2 + \\
 &+ A_{i,k-1} (4w_{i,k-1} - w_{i-1,k-1} - w_{i+1,k-1} - w_{i,k-2} - w_{i,k})^2 + \\
 &+ A_{i,k+1} (4w_{i,k+1} - w_{i-1,k+1} - w_{i+1,k+1} - w_{i,k} - w_{i,k+2})^2 \left. \right] - \\
 &- P_i w_i A_{i,k} - P_{i-1,k} w_{i-1,k} A_{i-1,k} - \\
 &- P_{i+1,k} w_{i+1,k} A_{i+1,k} - P_{i,k-1} w_{i,k-1} A_{i,k-1} - \\
 &- P_{i,k+1} w_{i,k+1} A_{i,k+1} .
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dalej postępujemy tak jak w metodzie Ritza. Przemieszczenia $w_{i,k}$ przyjmujemy jako niezależne i obliczamy je z układu równań:

$$\frac{\partial \overset{+}{\pi}}{\partial w_{i,k}} = 0, \tag{4.12}$$

Ponieważ przemieszczenie $w_{i,k}$ występuje tylko w części energii $\overset{+}{\pi}_{i,k}$ otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overset{+}{\pi}_{i,k}}{\partial w_{i,k}} &= \frac{D}{\lambda} \left[(16A_{i,k} + A_{i-1,k} + A_{i+1,k} + A_{i,k-1} + A_{i,k+1}) w_{i,k} - \right. \\
 &- 4(A_{i,k} + A_{i-1,k}) w_{i-1,k} - 4(A_{i,k} + A_{i+1,k}) w_{i+1,k} - \\
 &- 4(A_{i,k} + A_{i,k-1}) w_{i,k-1} - 4(A_{i,k} + A_{i,k+1}) w_{i,k+1} + \\
 &+ (A_{i,k-1} + A_{i-1,k}) w_{i-1,k-1} + (A_{i-1,k} + \\
 &+ A_{i,k+1}) w_{i-1,k+1} + (A_{i+1,k} + A_{i,k-1}) w_{i+1,k-1} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (A_{i+1,k} + A_{i,k+1}) w_{i+1,k+1} + A_{i-1,k} w_{i-2,k} + \\
& + A_{i+1,k} w_{i+2,k} + A_{i,k-1} w_{i,k-2} + A_{i,k+1} w_{i,k+2} \Big] - \\
& - A_{i,k} p_{i,k} = 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

W przypadku węzłów wewnętrznych, gdy wszystkie pola są jednakowe i o powierzchni λ^2 wzór (4.13) odpowiada wzorowi (4.1a). Dla węzłów $w_{i,k}$ leżących w pobliżu krawędzi lub naroży możemy stosować wzór (4.13), przyjmując pola w zależności od rodzaju węzłów /zerowe powierzchnie dla węzłów zewnętrznych/. Podobnie jak w ujęciu lokalnym należy jeszcze określić związki dla węzłów zewnętrznych.

Przy posługiwaniu się funkcjonalem energii potencjalnej wymagamy spełnienia jedynie kinematycznych warunków brzegowych. Warunki statyczne zerowania się uogólnionych sił brzegowych /w przypadku brzegu przegubowo podpartego chodzi o warunek $m_n = 0$ / są spełnione przez równanie (4.12), napisane dla węzła zewnętrznego. Pokażemy to na przykładzie rysunku 4.12b, gdy krawędź jest równoległa do osi X.

Ugięcie węzła zewnętrznego $w_{i,k+1}$ występuje w energii potencjalnej odpowiadającej polu o powierzchni $A_{i,k} = \lambda^2/2$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_{i,k} = & \frac{D}{4\lambda^2} (w_{i-1,k} + w_{i+1,k} + w_{i,k-1} + w_{i,k+1} - 4w_{i,k})^2 \\
& - \frac{p_{i,k} \cdot \lambda^2}{2} w_{i,k}.
\end{aligned}$$

Po obliczeniu pochodnej:

$$\frac{\partial \tilde{\pi}_{i,k}}{\partial w_{i,k+1}} = \frac{D}{2\lambda^2} (w_{i-1,k} + w_{i+1,k} + w_{i,k-1} + w_{i,k+1} - 4w_{i,k}) = 0$$

i uwzględnieniu warunku niepodatnego podparcia $w_{i-1,k} = w_{i,k} = w_{i+1,k} = 0$ z powyższego równania wynika związek:

$$w_{i,k+1} = -w_{i,k-1}$$

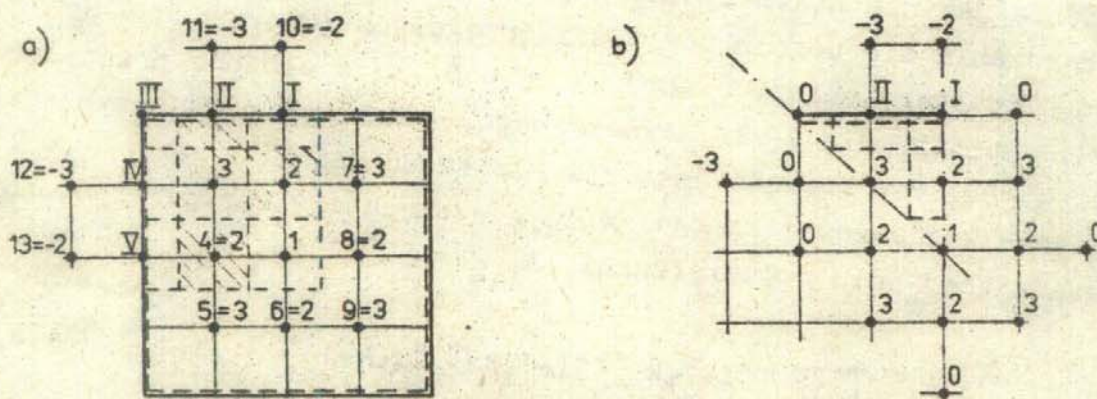
Spełnianie statycznych warunków brzegowych przez zerowanie pochodnej $\partial \tilde{\pi}_{i,k} / \partial w_{i,k+1}$ jest ogólne i będzie wykorzystywane przy dowolnym sposobie podparcia brzegu. Jeśli płyta prostokątna jest podparta niepodatnie, będziemy od razu uwzględniali związki dla węzłów zewnętrznych w zależności od tego czy krawędź jest utwierdzona, czy też podparta przegubowo.

Przykład 4.3. Płyta przegubowo podparta z przykładu 4.1.

Ograniczamy się tylko do rzadszej siatki o podziale $\lambda = a/4$. Równanie (4.13) piszemy dla węzłów 1, 2, 3. Na rys. 4.13a zaznaczono pola przypisywane węzłom wewnętrznym i brzegowym:

$$A_1 = A_2 = A_3 = \lambda^2, \quad A_I = A_{II} = A_{IV} = A_V = \lambda^2/2.$$

Dla węzłów zewnętrznych przyjmujemy $A_2 = 0$.



Rys. 4.13. Oznaczenia węzłów i przypisanie pól dla płyty kwadratowej obciążonej równomiernie

Na rys. 4.13a zakreśkowano pola, które wystąpią w równaniu (4.13), napisanym dla węzła 3:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{\lambda^4} \left[(16A_3 + A_{IV} + A_2 + A_4 + A_{II})w_3 - 4(A_3 + A_{IV})w_{IV} - \right. \\ & - 4(A_3 + A_2)w_2 - 4(A_3 + A_4)w_4 - 4(A_3 + A_{II})w_{II} + \\ & + (A_4 + A_{IV})w_V + (A_{IV} + A_{II})w_{III} + (A_2 + A_4)w_1 + \\ & \left. + (A_2 + A_{II})w_I + A_{IV}w_{12} + A_2w_7 + A_4w_5 + A_{II}w_{11} - A_3p_0 = 0. \right. \end{aligned}$$

Po podstawieniu wartości powierzchni oraz związków między ugięciami /wynikają one z warunków brzegowych i symetrii/ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{\lambda^4} \left[(16\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{2} + \lambda^2 + \lambda^2 + \frac{\lambda^2}{2}) w_3 - 4(\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{2}) \cdot 0 - \right. \\ & - 4(\lambda^2 + \lambda^2) w_2 - 4(\lambda^2 + \lambda^2) w_2 - 4(\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{2}) \cdot 0 + \\ & + (\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{2}) \cdot 0 + (\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2}) \cdot 0 + (\lambda^2 + \lambda^2) w_1 + \\ & + (\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{2}) \cdot 0 + \frac{\lambda^2}{2} (-w_3) + \lambda^2 w_3 + \lambda^2 w_3 + \\ & \left. + \frac{\lambda^2}{2} (-w_3) \right] - \lambda^2 p_0 = 0. \end{aligned}$$

Po uporządkowaniu dochodzimy do równania:

$$2w_1 - 16w_2 + 20w_3 = \frac{p_0 \lambda^4}{D}$$

takiego samego jak w przykładzie 4.1, gdzie zastosowano ujęcie lokalne MRS. Można łatwo sprawdzić /pozostawiamy to czytelnikowi/, że zgadzają się również pozostałe równania, napisane według (4.13) dla węzłów 1 i 2.

Przy pisaniu równań możemy od razu uwzględnić symetrię ugięć. W tym celu obliczamy energię potencjalną nagromadzoną w 1/8 części płyty. Na rys. 4.13b zaznaczono numerację węzłów uwzględniającą symetrię, którą wprowadzamy do wzoru (4.10). Przyjmujemy ponadto pola:

$$A_1 = \frac{\lambda^2}{8}, \quad A_2 = A_3 = A_{II} = \frac{\lambda^2}{2}, \quad A_I = 0.$$

Energia potencjalna płyty wynosi:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} &= \frac{D}{2\lambda^4} \left[(w_2 + w_2 + w_2 + w_2 - 4w_1)^2 \frac{\lambda^2}{8} + \right. \\ & + (w_3 + w_3 + w_1 - 4w_2)^2 \frac{\lambda^2}{2} + (w_2 + w_2 - 4w_3)^2 \frac{\lambda^2}{2} - \\ & - p_0 \left(w_1 \frac{\lambda^2}{8} + w_2 \frac{\lambda^2}{2} + w_3 \frac{\lambda^2}{2} \right) = \\ & = \frac{D}{2\lambda^2} \left[2(w_2 - w_1)^2 + \frac{1}{2} (w_1 - 4w_2 + 2w_3)^2 + \right. \\ & \left. + 2(w_2 - 2w_3)^2 \right] - p_0 \lambda^2 \left(\frac{w_1}{8} + \frac{w_2}{2} + \frac{w_3}{2} \right). \end{aligned}$$

Obliczamy pochodne $\partial\pi / \partial w_j$:

$$\frac{\partial\pi}{\partial w_1} = \frac{D}{\lambda^2} \left(\frac{5}{2} w_1 - 4w_2 + w_3 \right) - \frac{p_0 \lambda^2}{8} = 0,$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial w_2} = \frac{D}{\lambda^2} (-4w_1 + 12w_2 - 8w_3) - \frac{p_0 \lambda^2}{2} = 0,$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial w_3} = \frac{D}{\lambda^2} (w_1 - 8w_2 + 10w_3) - \frac{p_0 \lambda^2}{2} = 0,$$

które po wymnożeniu przez stałe $8\lambda^2/D$ lub $2\lambda^2/D$ odpowiadają równaniom MRS z przykładu 4.1.

4.7. Uogólnienie ujęcia wariacyjnego MRS na dowolne warunki brzegowe

Istotną zaletą ujęcia wariacyjnego MRS w porównaniu z ujęciem lokalnym jest posługiwanie się wzorami różnicowymi na drugie pochodne w funkcjonale energii potencjalnej. Dzięki temu możemy posługiwać się węzłami zewnętrznymi tylko sąsiadującymi z brzegiem.

Dalszą zaletą jest możliwość bezpośredniego spełnienia naturalnych warunków brzegowych /krawędź swobodna/. W odniesieniu do zastępczej siły poprzecznej i momentu warunki takie są spełnione przez równania:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial\pi}{\partial w_b} = 0 \\ \frac{\partial\pi}{\partial w_z} = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\bar{q}_n)_b = 0, \\ (m_n)_b = 0, \end{array} \right. \quad (4.14)$$

gdzie b jest węzłem leżącym na krawędzi swobodnej, a z odpowiadającym mu węzłem zewnętrznym.

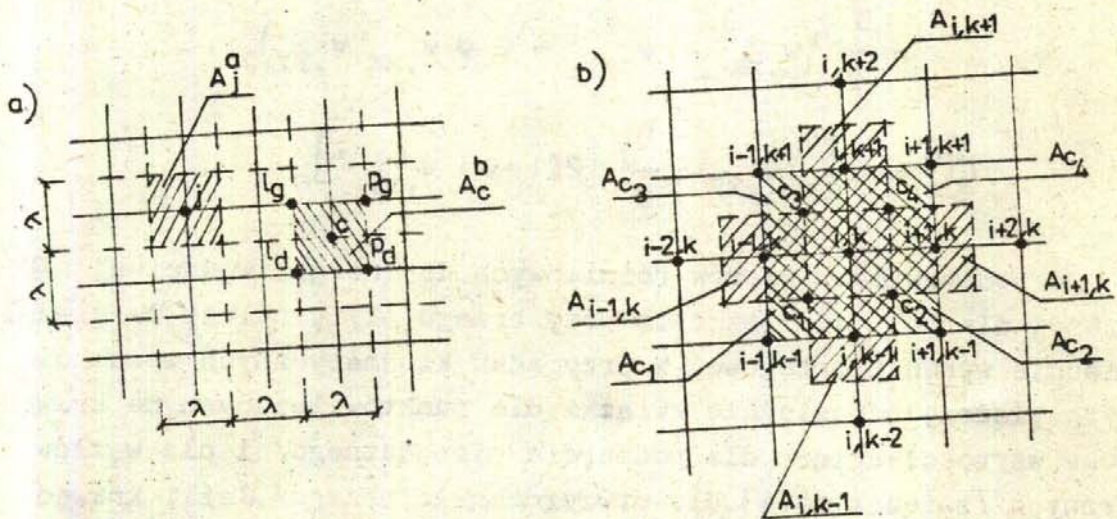
W ogólnym przypadku /tak będzie np. dla płyt prostokątnych z brzegiem swobodnym/ funkcjonal energii potencjalnej należy przyjąć w pełnej postaci (2.60b), gdyż nie ulegną wyzerowaniu całki (2.63). Ze względu na obliczenia numeryczne piszemy funkcjonal energii sprężystej w postaci:

$$U = \frac{D}{2} \iint_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy +$$

$$+ D(1 - \nu) \iint_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = U^a + U^b. \quad (4.15)$$

Rozdziału energii sprężystej dokonano ze względu na występowanie pochodnych różnego rodzaju: w części U^a występują pochodne $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, w części U^b pochodna mieszana $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

Taki podział wynika z dążenia do podwyższenia dokładności wzorów numerycznych. Z tego względu dokonujemy innego podziału pola płaszczyzny środkowej przy liczeniu energii U^a , a innego dla obliczenia energii U^b . W przypadku U^a dokonujemy podziału na pola A_j^a otaczające węzeł j ; dla obliczenia U^b brzegi pola A_c^b leżą na liniach siatki różnicowej /rys. 4.14a/.



Rys.4.14. Podziały płaszczyzny środkowej i pola związane z węzłem centralnym przy liczeniu energii potencjalnej

Podział b/ umożliwia napisanie wzoru różnicowego za pomocą węzłów otaczających środek pola c :

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_c \approx \frac{1}{\lambda^2} (w_{pg} + w_{ld} - w_{lg} - w_{pd}). \quad (4.16)$$

Łącznie energię potencjalną płyty piszemy w postaci przybliżonej:

$$\begin{aligned}\tilde{\pi} &= \sum_j \tilde{U}_j^a + \sum_c \tilde{U}_c^b - \sum_j \tilde{W}_j = \\ &= \sum_j \Phi_j^a A_j^a + \sum_c \Phi_c^b A_c^b - \sum_j p_j w_j A_j,\end{aligned}\quad (4.17)$$

gdzie Φ_j^a , Φ_c^b są odpowiednimi częściami energii sprężystej właściwej, zależnymi od pochodnych $w_{,xx}$, $w_{,yy}$ lub $w_{,xy}$, liczonymi w punktach j lub c :

$$\begin{aligned}\Phi_j^a &= \Phi_j(w_{,xx}, w_{,yy}) = \\ &= \frac{D_j}{2} (w_{,xx}^2 + w_{,yy}^2 + 2\nu w_{,xx} w_{,yy})_j,\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$\Phi_c^b = \Phi_c(w_{,xy}) = \frac{D_c}{2} [2(1-\nu) w_{,xy}^2]_c.$$

Po podstawieniu wzorów różnicowych do energii właściwej Φ_j^a obliczanej dla pól A_j^a leżących przy brzegu płyty należy uwzględnić odpowiednie warunki brzegowe. W przypadku kinematycznych warunków brzegowych piszemy odpowiednie związki dla punktów leżących na krawędzi /zerowe wartości ugięć dla podparcia niepoodatnego/ i dla węzłów zewnętrznych /związek (4.4) dla utwierdzonego brzegu/. Jeśli krawędź jest swobodna /naturalne warunki brzegowe/, to korzystamy z równań (4.14).

Przy posługiwaniu się wariacyjną wersją MRS mogą powstać rozbieżności w porównaniu z ujęciem lokalnym. Taka sytuacja może mieć miejsce, gdy środek ciężkości pola A_j nie pokrywa się z węzłem, w którym liczymy krzywiznę wzorem różnicowym. Powstałe stąd błędy zmniejszają się przy zagęszczeniu siatki różnicowej.

Tak samo jak w poprzednim punkcie 4.6 możemy obliczyć energię $\tilde{\pi}_{1,k}^+$, w której wystąpi ugięcie $w_{1,k}$. W pochodnej tej części energii potencjalnej wystąpią powierzchnie pól zaznaczonych na rys. 4.14b:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\pi}_{1,k}^+}{\partial w_{1,k}} &= \frac{D}{\lambda^4} \left\{ [8(1+\nu) A_{1,k} + A_{1-1,k} + A_{1+1,k} + \right. \\ &\quad \left. + A_{1,k-1} + A_{1,k+1} + 2(1-\nu)(A_{c1} + A_{c2} + A_{c3} + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_{c4}] w_{i,k} - 2 [(1+\nu)(A_{i-1,k} + A_{i,k}) + (1-\nu) \cdot \\
& \cdot (A_{c1} + A_{c3})] w_{i-1,k} - 2 [(1+\nu)(A_{i+1,k} + A_{i,k}) + \\
& + (1-\nu)(A_{c2} + A_{c4})] w_{i+1,k} - 2 [(1+\nu)(A_{i,k-1} + A_{i,k}) + \\
& + (1-\nu)(A_{c1} + A_{c2})] w_{i,k-1} - 2 [(1+\nu)(A_{i,k+1} + A_{i,k}) + \\
& + (1-\nu)(A_{c3} + A_{c4})] w_{i,k+1} + [\nu(A_{i-1,k} + \\
& + A_{i,k-1}) + 2(1-\nu)A_{c1}] w_{i-1,k-1} + [\nu(A_{i+1,k} + \\
& + A_{i,k-1}) + 2(1-\nu)A_{c2}] w_{i+1,k-1} + [\nu(A_{i-1,k} + \\
& + A_{i,k+1}) + 2(1-\nu)A_{c3}] w_{i-1,k+1} + [\nu(A_{i+1,k} + \\
& + A_{i,k+1}) + 2(1-\nu)A_{c4}] w_{i+1,k+1} + A_{i-1,k} w_{i-2,k} + \\
& + A_{i+1,k} w_{i+2,k} + A_{i,k-1} w_{i,k-2} + A_{i,k+1} w_{i,k+2} - \\
& + A_{i,k} p_{i,k} = 0. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Jeśli węzeł i, k leży wewnątrz obszaru tak, że wszystkie pola są niezerowe o powierzchni λ^2 , to wzór (4.19) przechodzi w (4.1a).

Przykład.4.4. Płyta z przykładu 4.2.

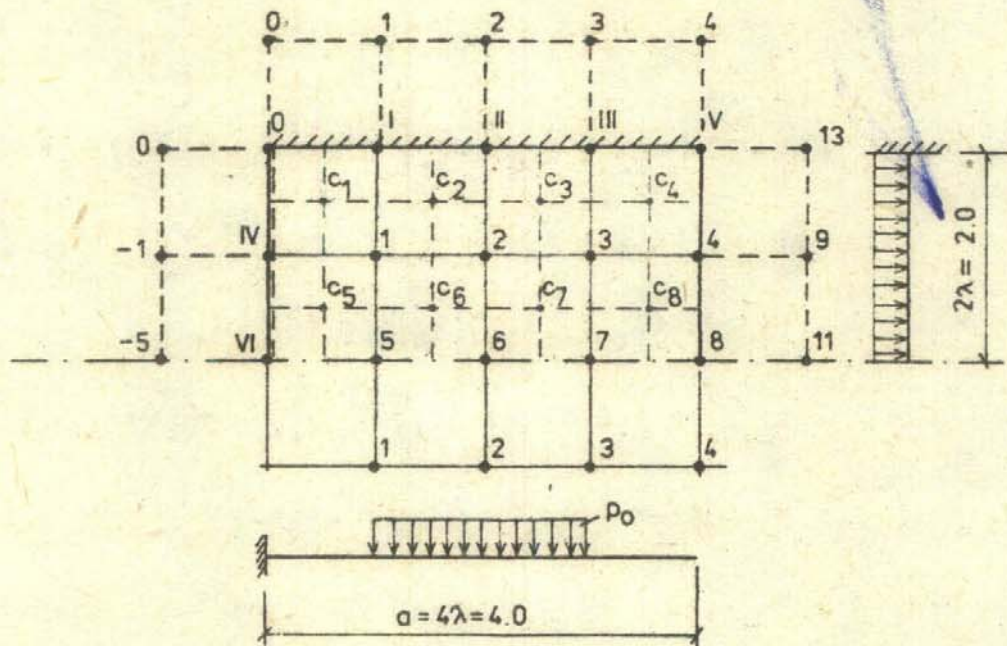
Ze względu na symetrię rozpatrujemy tylko połowę płyty. Na rys.4.15 pokazano numerację węzłów j oraz c .

Powierzchnia pól wynosi:

$$A_j = \begin{cases} \lambda^2 & \text{dla } j = 1, 2, 3 \\ \lambda^2/2 & \text{dla } j = 4, \dots, 7; I, \dots, IV \\ \lambda^2/4 & \text{dla } j = 8, V, VI \end{cases}$$

$$A_{ci} = \lambda^2 \quad \text{dla } i = 1, \dots, 8.$$

Piszemy oddzielnie energie $\tilde{U}^a, \tilde{U}^b, \tilde{W}$, pomijając od razu zerowe wartości ugięć węzłów brzegowych w_b dla $b = 0, I, \dots, VI$:



Rys.4.15. Oznaczenie węzłów do wariacyjnej wersji MRS

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}^a = \sum_j \tilde{U}_j^a = \frac{D}{2\lambda^4} & \left\{ [(-2w_1 + w_2)^2 + (-2w_1 + w_5)^2 + 2\psi(-2w_1 + w_2) \cdot \right. \\
 & \cdot (-2w_1 + w_5)] \lambda^2 + [(w_1 - 2w_2 + w_3)^2 + (-2w_2 + w_6)^2 + \\
 & + 2\psi(w_1 - 2w_2 + w_3)(-2w_2 + w_6)] \lambda^2 + [(w_2 - 2w_3 + w_4)^2 + \\
 & + (-2w_3 + w_7)^2 + 2\psi(w_2 - 2w_3 + w_4)(-2w_3 + w_7)] \lambda^2 + \\
 & + [(w_3 - 2w_4 + w_9)^2 + (-2w_4 + w_8)^2 + 2\psi(w_3 - 2w_4 + w_9) \cdot \\
 & \cdot (-2w_4 + w_8)] \frac{\lambda^2}{2} + [(-2w_5 + w_6)^2 + (2w_1 - 2w_5)^2 + \\
 & + 2\psi(-2w_5 + w_6)(2w_1 - 2w_5)] \frac{\lambda^2}{2} + [(w_5 - 2w_6 + w_7)^2 + \\
 & + (2w_2 - 2w_6)^2 + 2\psi(w_5 - 2w_6 + w_7)(2w_2 - 2w_6)] \frac{\lambda^2}{2} + \\
 & + [(w_6 - 2w_7 + w_8)^2 + (2w_3 - 2w_7)^2 + 2\psi(w_6 - 2w_7 + w_8) \cdot \\
 & \cdot (2w_3 - 2w_7)] \frac{\lambda^2}{2} + [(w_7 - 2w_8 + w_{11})^2 + (2w_4 - 2w_8)^2 +
 \end{aligned}$$

$$+ 2\nu(w_7 - 2w_8 + w_{11})(2w_4 - 2w_8)] \frac{\lambda^2}{4} + (2w_1)^2 \frac{\lambda^2}{2} +$$

$$+ (2w_2)^2 \frac{\lambda^2}{2} + (2w_3)^2 \frac{\lambda^2}{2} + [(2w_4)^2 + w_{13}^2 + 2\nu \cdot 2w_4 \cdot w_{13}] \frac{\lambda^2}{2} \}$$

$$\tilde{u}^b = \sum_j \tilde{u}_j^b =$$

$$= \frac{D}{2\lambda^4} 2(1-\nu) \left\{ (-w_1)^2 + (w_1 - w_2)^2 + (w_2 - w_3)^2 + (w_3 - w_4)^2 + \right.$$

$$+ (w_1 - w_5)^2 + (w_2 + w_5 - w_1 - w_6)^2 + (w_3 + w_6 - w_2 - w_7)^2 +$$

$$\left. + (w_4 + w_7 - w_3 - w_8)^2 \right\} \lambda^2,$$

$$\tilde{w} = \sum_j \tilde{w}_j^b = p_0 \left\{ w_1 \frac{\lambda^2}{2} + w_2 \lambda^2 + w_3 \frac{\lambda^2}{2} + w_5 \frac{\lambda^2}{4} + w_6 \frac{\lambda^2}{2} + w_7 \frac{\lambda^2}{4} \right\}.$$

Po przyrównaniu do zera pochodnych $\partial \tilde{\pi} / \partial w_i$, gdzie $i = 1, \dots, 9, 11, 13$, otrzymujemy układ równań, który niżej napisaliśmy w postaci macierzowej:

21	-8	1,0	0	-8	2	0	0	0	0	0	0	w_1	0,00396
-8	22	-8	1,0	2	-8	2	0	0	0	0	0	w_2	0,00792
1	-8	21,5	-6,9	0	2	-8	1,95	0,5	0	0	0	w_3	0,00396
0	1	-6,9	11	0	0	1,95	-4	-1,1	0,05	0,05	0	w_4	0,0
-8	2	0	0	9,5	-4	0,5	0	0	0	0	0	w_5	0,00198
2	-8	2	0	-4	10	-4	0,5	0	0	0	0	w_6	0,00396
0	2	-8	1,95	0,5	-4	9,75	-3,45	0	0,25	0	0	w_7	0,00198
0	0	1,95	-4	0	0,5	-3,45	5	0,05	-0,55	0	0	w_8	0,0
0	0	0,5	-1,1	0	0	0	0,05	0,5	0	0	0	w_9	0,0
0	0	0	0,05	0	0	0,25	-0,55	0	0,25	0	0	w_{11}	0,0
0	0	0	0,05	0	0	0	0	0	0	0	0,25	w_{13}	0,0

Pierwiastki tego układu równań wynoszą:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0,001719 \text{ m}, & w_2 &= 0,002728 \text{ m}, & w_3 &= 0,002445 \text{ m}, \\ w_4 &= 0,001792 \text{ m}, & w_5 &= 0,002647 \text{ m}, & w_6 &= 0,004203 \text{ m}, \\ w_7 &= 0,003870 \text{ m}, & w_8 &= 0,002972 \text{ m}, & w_9 &= 0,001199 \text{ m}, \\ w_{11} &= 0,002314 \text{ m}, & w_{13} &= 0,003584 \text{ m}. \end{aligned}$$

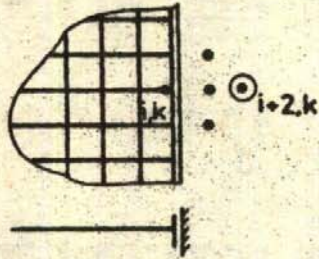
Jak zaznaczyliśmy na początku tego przykładu ugięcia w węzłach siatki będą wyznaczone przy stosowaniu metody różnic skończonych w ujęciu wariacyjnym i porównane z rozwiązaniem uzyskanym za pomocą ujęcia lokalnego MRS /przykład 4.2/.

Należy podkreślić, że w ujęciu wariacyjnym nie były angażowane pkt. 10, 12, a tym samym układ równań algebraicznych zawierał o dwie niewiadome mniej. Przeanalizujemy także odpowiedniość poszczególnych równań z wersji lokalnej MRS /L/ i wariacyjnej MRS /W/.

Układ równań z ujęcia wariacyjnego jest zawsze symetryczny. Można założyć, że równania 1, 2 oraz 5, 6 po przemnożeniu przez 2 z wersji MRS /W/ zgadzają się z odpowiednimi równaniami MRS /L/. Równanie $\partial \tilde{\pi} / \partial w_1 = 0$ dla $i = 9, 11, 13$ z wersji wariacyjnej i 9, 11, 13 z wersji lokalnej odpowiadają tym samym warunkom brzegowym - zerowania się momentu zginającego m_x na swobodnej krawędzi. Równanie $\partial \tilde{\pi} / \partial w_3 = 0$ jest kombinacją liniową równania trzeciego ($\nabla^2 \nabla^2 \tilde{w} = p/D, i = 3$) i dziewiątego ($m_y = 0, i = 3$), podobnie jak analogiczne równanie dla punktu $i = 7$. Pochodna energii względem ugięć w węzłach na swobodnej krawędzi / $i = 4, 8$ / jest kombinacją liniową równania płyty zapisanego w danym punkcie brzegowym i warunków brzegowych na swobodnym konturze. Jeśli układ 13 równań z wersji MRS /L/ i 11 równań z ujęcia MRS /W/ przekształcimy, rugując niewiadome ugięcie w węzłach zewnętrznych, to w obu przypadkach otrzymamy ten sam układ algebraicznych 8 równań, odpowiadających 8 węzłom w obszarze płyty.

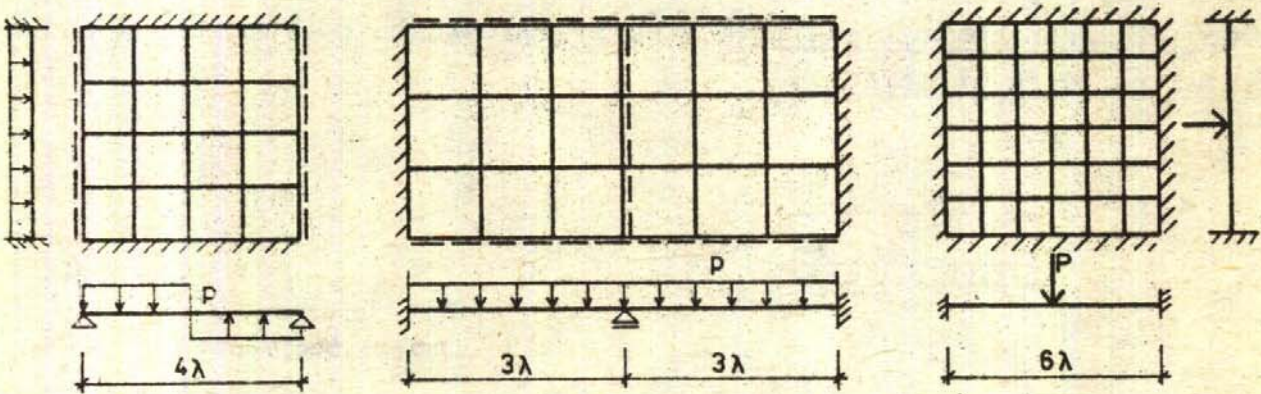
4.8. Przykłady do rozwiązania

1. Wyprowadzić algebraiczny związek łączący ugięcie w punkcie $i+2, k$ z punktami wewnętrznymi i brzegowymi, w przypadku krawędzi zamocowanej, z możliwością pionowego przesuwu /rys. 4.16/.



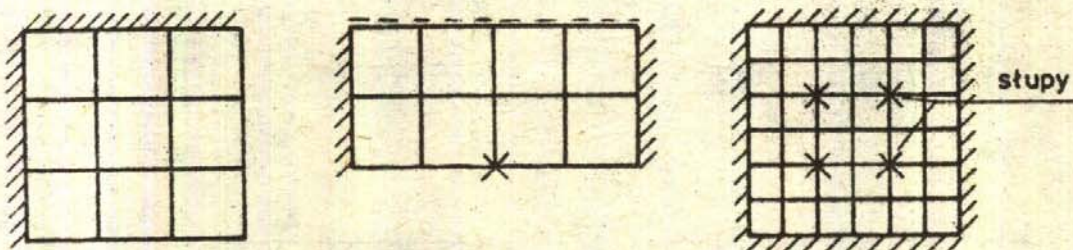
Rys.4.16. Rysunek do zadań

2. Znaleźć ugięcia w węzłach siatki płyt przedstawionych na rys.4.17.



Rys.4.17. Rysunki do zadań

3. Sporządzić bilans równań algebraicznych otrzymanych po zastosowaniu MRS /L/ i MRS /W/ do płyt z rys. 4.18.

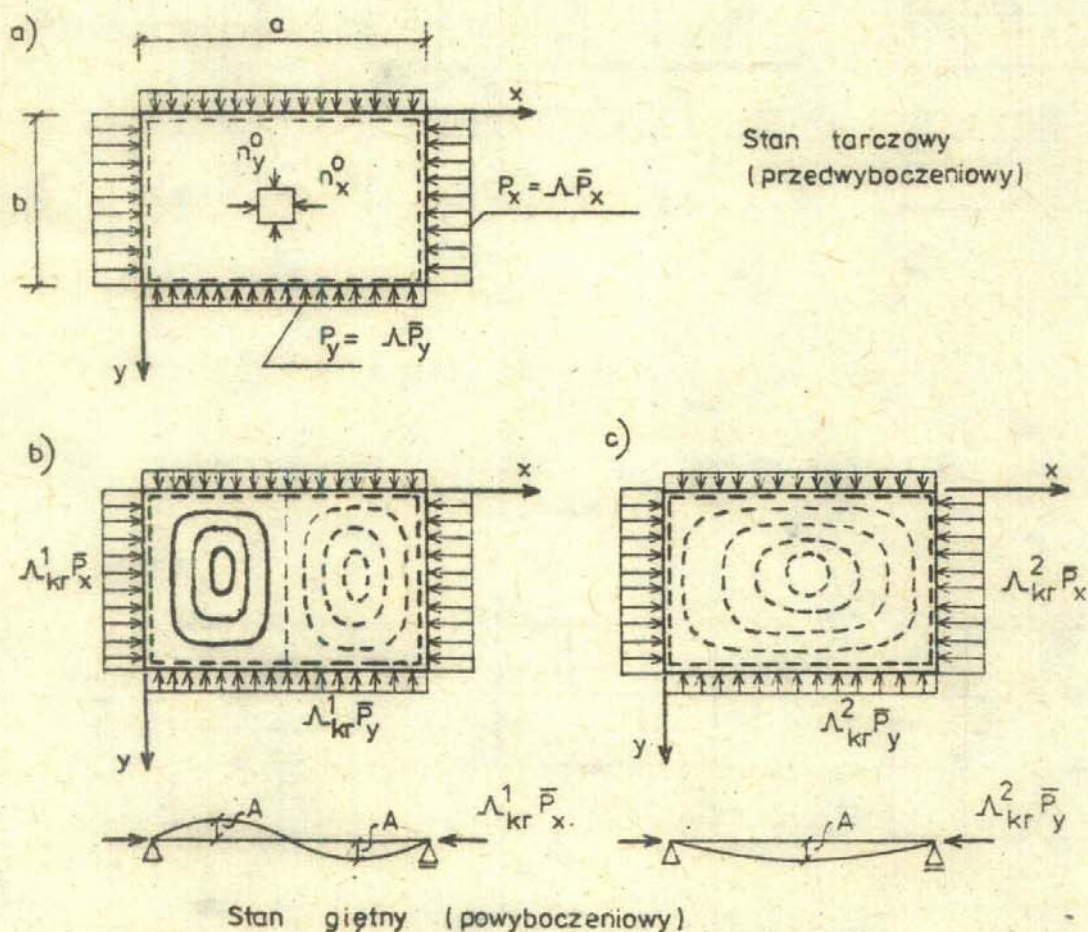


Rys.4.18. Rysunki do zadań

5. WYBOCZENIE PŁYT

5.1. Zjawisko utraty stateczności płyt i jego analiza

Na wykładach wytrzymałości materiałów i mechaniki budowli objaśniano zjawisko wyboczenia prętów ściskanych i ram, traktowanych jako układy prętów. Przez wyboczenie /bifurkację stanów równowagi/ rozumiemy przejście z jednego stanu równowagi w jakościowo inny stan równowagi. W prętach lub ich układach takimi stanami będą: stan bezmomentowy, gdy występują tylko siły podłużne i stan giętny, gdy pojawiają się momenty zginające i siły poprzeczne. Obciążenie, przy którym następuje wyboczenie nazywamy obciążeniem krytycznym, a stan przemieszczeń powyboczeniowych łączymy z postacią wyboczenia.



Rys.5.1. Wyboczenie płyty prostokątnej

Wyboczenie występuje również w płytach, a ściślej mówiąc w tarczach z naprężeniami ściskającymi. Po osiągnięciu krytycznej wartości obciążenia tarcza ulega wygięciu - staje się płytą zginaną. Zjawisko utraty stateczności płyty przez wyboczenie jest jakościowo takie same jak w układach prętowych, tylko jego analiza może być bardziej złożona ze względu na dwuwymiarowość zagadnienia.

Na rys. 5.1 pokazujemy przykład płyty dwukierunkowo ściskanej. Rys. 5.1b ilustruje pojawienie się ugięć pozakrytycznych, odpowiadających postaci wyboczenia dla obciążenia krytycznego o parametrze Λ_{kr}^1 , a na rys. 5.1c dla Λ_{kr}^2 . W płytach niższa wartość obciążenia krytycznego może być związana z większą liczbą półfal wyboczenia w jednym z kierunków.

Tak samo jak przy ściskaniu prętów /układów prętowych/ stany równowagi można pokazać na płaszczyźnie (Λ, A) ,

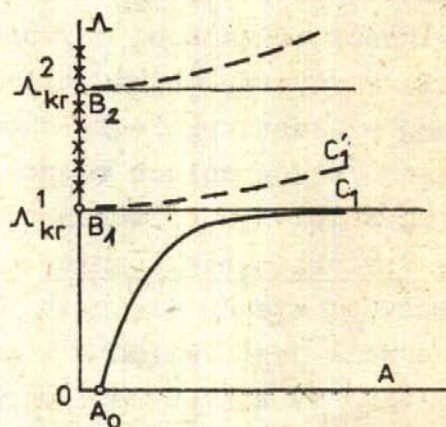
gdzie Λ jest parametrem obciążenia, a A amplitudą półfali wyboczenia. Zależność $\Lambda(A)$ nazywamy ścieżką obciążenia; punkty tej ścieżki odpowiadają stanom równowagi. Na rys. 5.2 pokazujemy ścieżki obciążenia dla rozpatrywanej powyższej płyty prostokątnej. Część O-B ścieżki odpowiada stanom tarczowym, część B-C lub B-C' stanom giętnym. Po przekroczeniu punktu bifurkacji /rozdwojenia/ stanów równowagi stan tarczowy jest niestateczny, co zaznaczono krzyżykami.

Ze względu na zastosowania inżynierskie interesuje nas najniższa wartość krytyczna parametru obciążenia:

$$\Lambda_{kr} = \inf_j (\Lambda_{kr}^j). \quad (5.1)$$

Obciążenie związane z Λ_{kr} będziemy dalej nazywali pierwszym obciążeniem krytycznym.

Na rys. 5.2. narysowaliśmy też ścieżkę obciążenia dla płyty wygiętej zgodnie z pierwszą postacią wyboczenia, o amplitudzie A_0 . Jest to przykład płyty z tzw. imperfekcjami /wstępne niedokładności/, które powodują, że płyta jest zginana od początku obciążenia. Ścieżka obciążenia dla płyty idealnej stanowi obwiednię dla ścieżek płyt z różnymi imperfekcjami. Analiza płyt idealnych jest prostsza, należy jednak podkreślić, że wartość obciążenia krytycznego dla takich płyt jest zawyżona w porównaniu z obciążeniem, jakie może przenieść płyta nieidealna.



Rys. 5.2. Ścieżki obciążenia na płaszczyźnie (Λ, A)

Stan giętny będziemy analizowali za pomocą równań liniowych. Otrzymujemy w ten sposób ścieżkę pozakrytyczną B_1-C_1 , równoległą do osi A. Wynika stąd, że analiza liniowa nie pozwala jednoznacznie określić zależności $\Lambda(A)$ po wyboczeniu płyty. Dopiero analiza nieliniowa umożliwia wyznaczenie ścisłej ścieżki powyboczeniowej B_1-C_1' .

Łącznie opieramy się na następujących założeniach:

1. Obciążenie jest zachowawcze, tzn. nie zmienia kierunku podczas odkształcania się płyty i jednoparametrowe, tj. zmieniające się proporcjonalnie do parametru obciążenia Λ .

2. Płyta jest idealna, bez imperfekcji, obciążona jednak tak, że znajduje się w stanie tarczowym przed wyboczeniem.

3. Obowiązują liniowe równania. W stanie tarczowym obliczamy siły podłużne n_x^o , n_y^o , n_{xy}^o lub odpowiadające im odkształcenia ϵ_x^o , ϵ_y^o , γ_{xy}^o . Wielkości te zachowują swoje wartości podczas wyboczenia tak, że obciążenie krytyczne można obliczyć z liniowych równań płyty zginanej, obciążonej w płaszczyźnie środkowej pomimo nieobowiązania zasady zeszywnienia /w równaniach równowagi występują krzywizny/.

Ograniczenie rozważań do obciążeń zachowawczych pozwala posługiwać się kryterium statycznym utraty stateczności, które polega na badaniu równowagi stanów giętnych, bliskich stanowi przedwyboczeniowemu. Takie podejście jest związane z nazwiskiem Eulera. W podejściu eulerowskim posługujemy się równaniem różniczkowym płyty w postaci (2.67).

W przypadku obciążeń zachowawczych równoważnie możemy posługiwać się kryterium energetycznym, gdy korzystamy z funkcjonału energii potencjalnej.

Jeśli płyta jest idealna, to obciążenie krytyczne wyznaczamy z równań jednorodnych. Obciążenie krytyczne będziemy obliczali z warunku istnienia nietrywialnego rozwiązania odpowiedniego układu liniowych, jednorodnych równań algebraicznych.

Z merytorycznego punktu widzenia nie ma znaczenia czy płyta jest prostokątna czy też kołowa. Jednak w przypadku układu współrzędnych biegunowych rozwiązanie ściśle wyraża się poprzez funkcje specjalne Bessela, których użycie pokażemy na przykładzie analizy wyboczenia płyty kołowo symetrycznej.

5.2. Wykorzystanie równania różniczkowego płyty do obliczania obciążenia krytycznego

Do analizy wyboczenia płyty posługujemy się równaniami różniczkowymi, wyprowadzonymi w p. 2.8. Zgodnie z założeniem (2) przyjmujemy obciążenie poprzeczne $p = 0$. W przypadku współrzędnych kartezjańskich z równania (2.67) otrzymujemy podstawowe równanie różniczkowe stateczności płyty:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - (n_x^0 w_{,xx} + 2n_{xy}^0 w_{,xy} + n_y^0 w_{,yy}) = 0. \quad (5.2)$$

Siły podłużne obliczamy z odpowiednich równań tarczy, spełniając warunki brzegowe stanu bezmomentowego. Rozwiązania poszukujemy dla $\Lambda = 1$ w postaci sił podłużnych:

$$\bar{n}_x^0 = f_1(x, y), \quad \bar{n}_{xy}^0 = f_2(x, y), \quad \bar{n}_y^0 = f_3(x, y),$$

dzięki czemu do równania (5.2) możemy podstawić znane funkcje:

$$n_x^0 = \Lambda \bar{n}_x^0, \quad n_{xy}^0 = \Lambda \bar{n}_{xy}^0, \quad n_y^0 = \Lambda \bar{n}_y^0. \quad (5.3)$$

Tak więc równanie (5.2) przyjmuje postać:

$$L(w) - \Lambda \cdot G(w) = 0 \quad (5.4)$$

gdzie liniowe operatory różniczkowe mają postać:

$$L = \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad (5.5a)$$

$$G = \frac{1}{D} \left(\bar{n}_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\bar{n}_{xy}^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \bar{n}_y^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

W przypadku współrzędnych biegunowych mamy:

$$L = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad (5.5b)$$

$$G = \frac{1}{D} \left[\bar{n}_r^0 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\bar{n}_{r\theta}^0 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \right) + \bar{n}_\theta^0 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right],$$

Ścisłe rozwiązanie udaje się uzyskać tylko w nielicznych przypadkach. Jeśli potrafimy obliczyć całkę ogólną równania (5.4), to wartość obciążenia krytycznego wyznaczamy tak, aby były spełnione warunki brzegowe. Jeśli natomiast dobieramy rozwiązanie spełniające warunki brzegowe, to analizujemy równanie /lub układ równań/, wynikające z (5.4).

Ostatnia uwaga odnosi się do metody ortogonalizacyjnej. Przyjęcie rozwiązania w postaci przybliżonej:

$$\tilde{w}(x, y) = \sum_{i=1}^n w_i \psi_i(x, y), \quad (5.6)$$

proceedzi do równania:

$$(K_{ij} - \Lambda N_{ij}) w_j = 0, \quad (5.7)$$

gdzie występują macierze liczbowe o składowych:

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} L(\psi_i) \psi_j d\Omega, \quad (5.8)$$

$$N_{ij} = \iint_{\Omega} G(\psi_i) \psi_j d\Omega.$$

Ponieważ układ równań (5.7) jest jednorodny, to warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania niezerowego jest zerowanie się głównego wyznacznika:

$$\det |K_{ij} - \Lambda N_{ij}| = 0. \quad (5.9)$$

Dochodzimy w ten sposób do równania, z którego obliczamy wartość krytyczną parametru obciążenia Λ_{kr} .

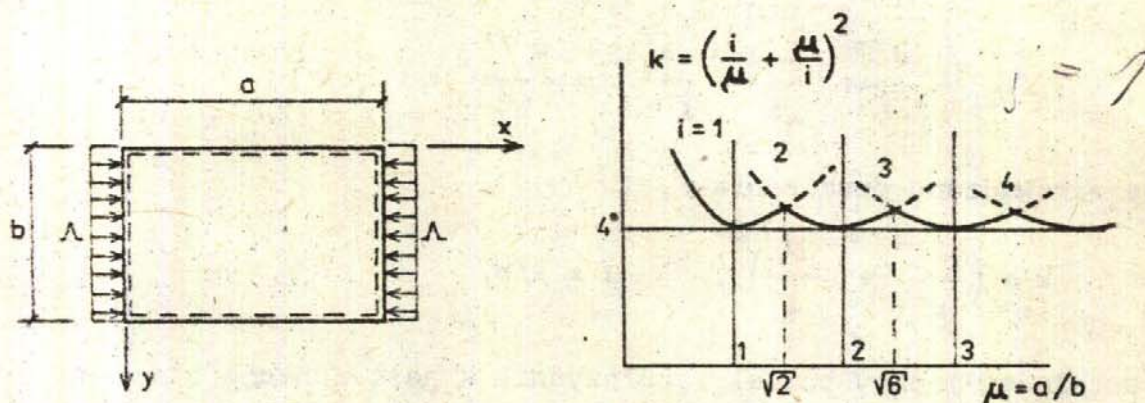
Układ równań (5.7) opisuje znany nam z algebry liniowej problem obliczania wartości i wektorów własnych. Macierze K i N są symetryczne i dodatnio określone. Najniższa wartość własna jest poszukiwanym Λ_{kr} , a odpowiadający jej wektor własny określa postać wyboczenia.

Do analizy wyboczenia możemy też stosować metody czysto numeryczne. Po podstawieniu wzorów różnicowych do (5.4) dochodzimy do algebraicznego układu równań o postaci analogicznej do (5.7).

Przykład 5.1. Wyboczenie płyty prostokątnej, przegubowo podpartej, ściskanej jednokierunkowo /rys. 5.3/.

Rozwiązanie stanu tarczowego stanowią siły podłużne:

$$\bar{n}_x^o = -1, \quad \bar{n}_{xy}^o = \bar{n}_y^o = 0.$$



Rys.5.3. Płyta ściskana jednokierunkowa i zależność współczynnika $k(\alpha; i)$

Ze względu na przegubowe podparcie przyjmujemy rozwiązanie stanu giętnego w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego (3.11):

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} W_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y.$$

Po podstawieniu tych wielkości do (5.4) otrzymujemy

$$\sum_i \sum_j \left[D(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2 - \Lambda \alpha_i^2 \right] W_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y = 0.$$

Powyższe równanie może być spełnione w dwóch przypadkach:

1. $W_{ij} = 0$,
2. $\left[D(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2 - \Lambda \alpha_i^2 \right] = 0$.

Pierwsze rozwiązanie, nazywane też rozwiązaniem trywialnym, odpowiada płycie niewyboconej. Drugie równanie pozwala obliczyć wartość obciążenia Λ :

$$\Lambda = \frac{(\alpha_i^2 + \beta_j^2)^2}{\alpha_i^2} D = \frac{D \pi^2 a^2}{i^2} \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2.$$

Widać, że obciążenie Λ zależy od sztywności płyty D , długości boków a , b oraz liczby półfal i , j .

Dla określonego stosunku długości boków a/b obliczymy najniższą wartość Λ_{kr} przy założeniu $j = 1$, a więc jednej półfali w kierunku y :

$$\Lambda_{kr} = \frac{D \pi^2}{b^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{1}{b} \right)^2 = \frac{D \pi^2}{b^2} k(i, \mu),$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$k = \left(\frac{1}{\mu} + \frac{\mu}{1} \right)^2, \quad \mu = a/b.$$

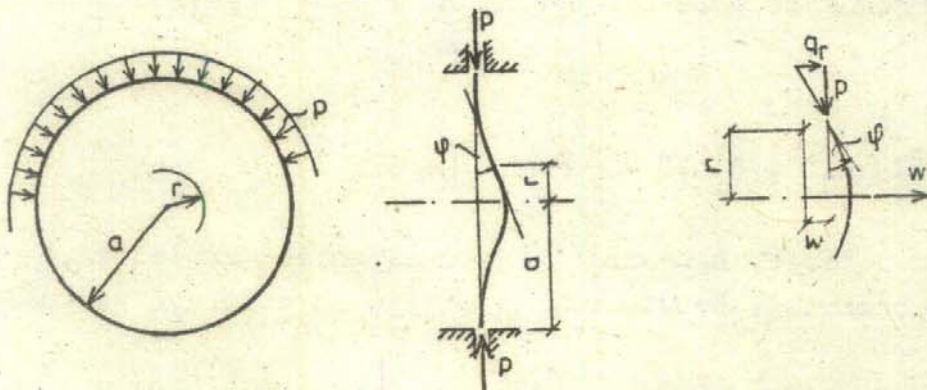
Dla ustalonej liczby półfal współczynnik k jest funkcją stosunku długości boków płyty μ , jak pokazano na rys. 5.3. Funkcja $k(\mu; i)$ osiąga minimum dla $i = \mu$. Minimalna wartość jest niezależna od liczby półfal, tj. $k_{\min} = 4$. Porównanie wartości współczynnika:

$$k(\mu; i) = k(\mu; i + 1)$$

daje wartość stosunku $\mu_m = \sqrt{i(i+1)}$, przy której kolejne gałęzie $k(\mu; i)$ przecinają się.

Na rys. 5.3 linią ciągłą zaznaczono wykres krytycznej wartości współczynnika $k(\mu; i)$. Otrzymujemy "girlandę", charakterystyczną dla ustrojów powierzchniowych.

Przykład 5.2. Płyta kołowa, radialnie ściskana /rys. 5.4/.



Rys.5.4. Utwierdzona płyta kołowa, ściskana radialnie

W stanie tarczowym występuje jednorodny stan naprężenia:

$$n_r^0 = n_\theta^0 = -p.$$

Siła poprzeczna po wyboczeniu wynosi:

$$q_r = p \operatorname{tg} \varphi \approx p \varphi.$$

Po podstawieniu do (2,5) otrzymujemy równanie płyty wyrażone przez kąt ugięcia:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \varphi) \right] = \frac{P}{D} \varphi.$$

Równanie to łatwo przekształcimy do postaci:

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \left(\frac{P}{D} - \frac{1}{r^2} \right) \varphi = 0. \quad (5.10)$$

Wprowadzamy bezwymiarową zmienną niezależną:

$$\xi = k r \quad \text{gdzie } k^2 = \frac{P}{D}, \quad (5.11)$$

dzięki której (5.10) piszemy w postaci równania Bessela pierwszego rzędu:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\varphi}{d\xi} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right) \varphi = 0. \quad (5.12)$$

Całkę tego równania jednorodnego stanowi kombinacja liniowa funkcji specjalnych $J_1(\xi)$ oraz $Y_1(\xi)$:

$$\varphi(\xi) = C_1 J_1(\xi) + C_2 Y_1(\xi). \quad (5.13)$$

Funkcje te nazywamy funkcjami Bessela rzędu pierwszego, gdzie: $J_1(\xi)$ - funkcja pierwszego rodzaju, a $Y_1(\xi)$ - funkcja drugiego rodzaju. Nie będziemy tutaj zajmowali się analizą własności tych funkcji, odsyłając słuchacza do odpowiedniej literatury, np. do [20]. Nadmienimy tylko, że są one określone szeregami potęgowymi, są przestępne i stabelaryzowane.

Ponieważ dla $\xi \rightarrow 0$ funkcja $Y_1(\xi) \rightarrow -\infty$, to w (5.13) przyjmujemy $C_2 = 0$. W ten sposób dochodzimy do rozwiązania, które opisuje kąt ugięcia płyty w chwili wyboczenia:

$$\varphi(\xi) = C_1 J_1(\xi).$$

Ponieważ brzeg płyty jest utwierdzony, z warunku brzegowego otrzymujemy równanie:

$$\varphi(k a) = 0 \rightarrow J_1(k a) = 0.$$

Najniższym pierwiastkiem tego równania jest [20]:

$$k a = 3,85 \rightarrow k^2 = \frac{14,68}{a^2},$$

a wracając do (5.11):

$$P_{kr} = k^2 D = 14,68 \frac{D}{a^2}. \quad (5.14)$$

Przykład 5.3. Przybliżone obliczenia obciążenia krytycznego dla płyty z przykładu 5.2.

Posługiwanie się funkcjami specjalnymi staje się uciążliwe przy bardziej złożonych warunkach brzegowych. Z tego względu często posługujemy się metodą Bubnowa-Galerkina. W tym celu przyjmujemy rozwiązanie z przykładu 3.2, gdzie obliczyliśmy kąt ugięcia dla płyty zginanej:

$$\tilde{\varphi}(\varrho) = c \varrho (1 - \varrho)^2.$$

Ta funkcja spełnia warunek brzegowy utwierdzenia konturu $\tilde{\varphi}(1) = 0$. Nawiązując do równania (5.4) równanie (5.10) piszemy w postaci:

$$\frac{d^2 \varphi}{d \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d \varphi}{d \varrho} - \frac{\varphi}{\varrho^2} + p \frac{a^2}{D} \varphi = 0.$$

Odpowiednikami współczynników (5.8) będą całki:

$$K = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{d^2 \tilde{\varphi}}{d \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d \tilde{\varphi}}{d \varrho} - \frac{\tilde{\varphi}}{\varrho^2} \right] \varrho^2 (1 - \varrho^2) d \varrho d \vartheta = -c \pi \frac{4}{3},$$

$$N = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{a^2}{D} \tilde{\varphi} \right) \varrho^2 (1 - \varrho)^2 d \varrho d \vartheta = -c \frac{a^2}{D} \frac{1}{12},$$

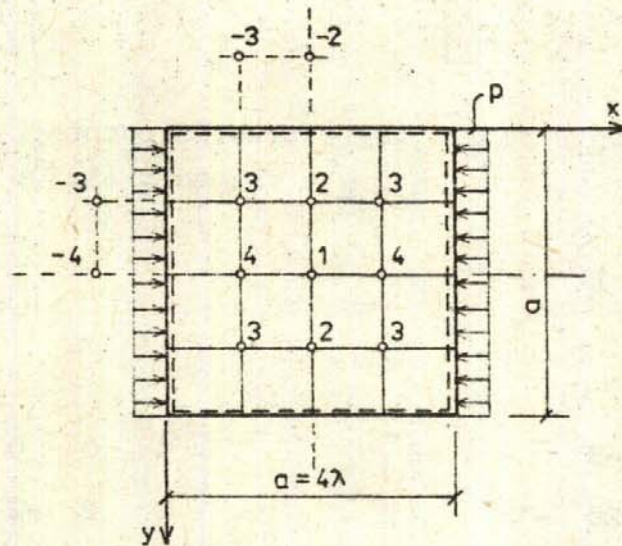
skąd otrzymujemy:

$$P_{kr} = \frac{K}{N} = 16 \frac{D}{a^2} = 1,089 P_{kr}^{śc}.$$

Rozwiązanie przybliżone metodą Bubnowa-Galerkina daje oszacowanie od góry dla rozwiązania ścisłego (5.14).

Przykład 5.4. Zastosowanie MRS do obliczenia obciążenia krytycznego dla płyty z przykładu 5.1.

Obliczenia wykonamy dla płyty kwadratowej podpartej przegubowo. Jak wynika z wykresu na rys. 5.3. wyniki będą ważne dla płyt prostokątnych o $a/b = 1, 2, \dots$. Przyjmujemy podział na $\lambda = b/4$, jak pokazano na rys. 5.5.



Rys.5.5. Podział płyty kwadratowej do analizy wyboczenia za pomocą MRS

W stanie tarczowym naprężenia wynoszą:

$$n_x^o = -P, \quad n_y^o = n_{xy}^o = 0.$$

Po zastosowaniu wzorów różnicowych do równania (5.2) otrzymujemy układ równań:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\lambda^4} [20 w_1 - 8(2 w_2 + 2 w_4) + 2 \cdot 4 w_3] + \frac{P}{\lambda^2} (2 w_4 - 2 w_1) &= 0, \\ \frac{D}{\lambda^4} [20 w_2 - 8(w_1 + 2 w_3) + 2 \cdot 2 w_4] + \frac{P}{\lambda^2} (2 w_3 - 2 w_2) &= 0, \\ \frac{D}{\lambda^4} [20 w_3 - 8(w_2 + w_4) + 2 w_1] + \frac{P}{\lambda^2} (w_2 - 2 w_3) &= 0, \\ \frac{D}{\lambda^4} [20 w_4 - 8(w_1 + 2 w_3) + 2 \cdot 2 w_2] + \frac{P}{\lambda^2} (w_1 - 2 w_4) &= 0. \end{aligned}$$

Równania te nieco przekształcimy. Po ich wymnożeniu przez stałą λ^4/D wprowadzamy dla obciążenia zewnętrznego oznaczenie:

$$\Lambda = \frac{P \lambda^2}{D} \quad (5.15)$$

i piszemy układ w postaci macierzowej:

$$\left(\begin{bmatrix} 20 & -16 & 8 & -16 \\ -8 & 20 & -16 & 4 \\ 2 & -8 & 20 & -8 \\ -8 & 4 & -16 & 20 \end{bmatrix} - \Lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jeśli pierwsze równanie podzielimy a trzecie pomnożymy przez 2, to otrzymujemy symetryczne macierze \underline{K} i \underline{N} w równaniu (5.7):

$$(\underline{K} - \Lambda \underline{N}) \underline{w} = \underline{0}, \quad (5.16)$$

gdzie:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 4 & -8 \\ -8 & 20 & -16 & 4 \\ 4 & -16 & 40 & -16 \\ -8 & 4 & -16 & 20 \end{bmatrix}, \quad \underline{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nie omawiamy dalej postępowania znanego dobrze z algebry liniowej i z mechaniki budowli. Najniższa wartość własna i odpowiadająca jej postać wybożenia wynoszą:

$$\Lambda_{kr} = 2,3432, \quad \underline{w}_{kr} = \{0,9237 \quad 0,6532 \quad 0,4620 \quad 0,6534\}.$$

Ze wzoru (5.15) wynika:

$$P_{kr} = \frac{\Lambda_{kr} D}{\lambda^2} = \frac{D \pi^2}{a^2} \frac{4^2 \cdot 2,3432}{\pi^2} = \frac{D \pi^2}{a^2} \cdot 3,7985.$$

Porównując wartość współczynnika $k = 3,7985$ ze ścisłą wartością $k = 4$ obliczoną w przykładzie (5.1) widzimy, że otrzymaliśmy:

$$P_{kr} = 0,958 P_{kr}^{śc}.$$

Przy siatce różnicowej o $\lambda = a/8$ otrzymujemy:

$$P_{kr} = 0,987 P_{kr}^{śc}.$$

5.3. Analiza wyboczenia metodą energetyczną

Obciążenie krytyczne możemy obliczyć również na podstawie kryterium minimum energii potencjalnej. Rozważamy w tym celu dwa stany:

1. Tarczowy stan przedwyboczeniowy, w którym obciążeniu zewnętrznemu o parametrze Λ_0 odpowiadają pola przemieszczeń, uogólnionych odkształceń i naprężeń:

$$\Lambda = \Lambda_0 \rightarrow \begin{cases} u_0, v_0 \rightarrow \varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0; n_x^0, n_y^0, n_{xy}^0, \\ w_0 = 0 \rightarrow \kappa_x = \kappa_y = \kappa_{xy} = 0; m_x = m_y = m_{xy} = 0. \end{cases}$$

2. Giętny stan powyboczeniowy, bliski stanowi przedwyboczeniowemu, charakteryzujący się przyrostami przemieszczeń Δu , Δv , Δw bez wzrostu obciążenia zewnętrznego $\Delta \Lambda = 0$. W ten sposób całkowite wartości przemieszczeń, odkształceń i naprężeń wynoszą:

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Delta \Lambda = \Lambda_0 \rightarrow u = u_0 + \Delta u, \quad v = v_0 + \Delta v, \quad w = \Delta w$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \Delta \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \varepsilon'_x = \varepsilon_x^0 + \frac{1}{2} w_{,x}^2, \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + \Delta \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + \varepsilon'_y = \varepsilon_y^0 + \frac{1}{2} w_{,y}^2, \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + \Delta \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + \gamma'_{xy} = \gamma_{xy}^0 + w_{,x} w_{,y}, \\ \kappa_x = \Delta \kappa_x = -w_{,xx}, \\ \kappa_y = \Delta \kappa_y = -w_{,yy}, \\ \kappa_{xy} = \Delta \kappa_{xy} = -2w_{,xy}, \\ n_x = n_x^0, \quad n_y = n_y^0, \quad n_{xy} = n_{xy}^0, \\ m_x = \Delta m_x, \quad m_y = \Delta m_y, \quad m_{xy} = \Delta m_{xy}. \end{cases}$$

Przejściu do stanu powyboczeniowego towarzyszy przyrost energii sprężystej wynikający ze zginania płyty:

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_m + U'_m = \\ &= \frac{D}{2} \iint_A \left\{ (w_{,xx} + w_{,yy})^2 - 2(1-\nu) [w_{,xx} w_{,yy} + w_{,xy}^2] \right\} dx dy + \\ &+ \frac{1}{2} \iint_A (n_x^0 w_{,x}^2 + 2 n_{xy}^0 w_{,x} w_{,y} + n_y^0 w_{,y}^2) dx dy. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Po wyboczeniu płyta ma być w stanie równowagi, czemu odpowiada zerowanie się wariacji przyrostu energii potencjalnej:

$$\delta(\Delta U) = 0. \quad (5.18)$$

Kryterium (5.18) nosi nazwę kryterium energetycznego i jest związane z nazwiskiem G.H. Bryana.

Kryterium energetyczne łączymy z metodą Ritza. Najpierw przyjmujemy kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczeń:

$$\tilde{w} = \sum_{i=1}^n w_i \psi_i(x, y)$$

i dla liniowo niezależnych funkcji $\psi_i(x, y)$ warunek (5.18) zastępujemy układem równań:

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial w_i} = 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, n. \quad (5.19)$$

Po podstawieniu przyrostu energii (5.17) do (5.19) dochodzimy do układu równań jak w (5.7):

$$(K_{ij} - \Lambda N_{ij}) w_j = 0 \quad \text{dla } i, j = 1, \dots, n, \quad (5.20)$$

w którym składowe macierzy \underline{K} i \underline{N} wynoszą:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= D \iint_A [(\psi_{i,xx} + \psi_{i,yy})(\psi_{j,xx} + \psi_{j,yy}) - \\ &- (1-\nu)(\psi_{i,xx} \psi_{j,yy} + \psi_{j,xx} \psi_{i,yy} + 2\psi_{i,xy} \psi_{j,xy})] dx dy, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$N_{ij} = - \iint_A \left[\bar{n}_x^0 \psi_{i,x} \psi_{j,y} + \bar{n}_{xy}^0 (\psi_{i,x} \psi_{j,y} + \psi_{j,x} \psi_{i,y}) + \bar{n}_y^0 \psi_{i,y} \psi_{j,y} \right] dx dy .$$

Tak samo jak przy stosowaniu równania różniczkowego płyty musimy znać rozkład sił podłużnych stanu tarczowego $\bar{n}_x^0(x, y)$, $\bar{n}_{xy}^0(x, y)$, $\bar{n}_y^0(x, y)$ dla mnożnika obciążenia $\Lambda = 1$ - por. (5.3).

Dalszy tok postępowania jest analogiczny do opisanego w p.5.2. Z warunku zerowania się głównego wyznacznika układu równań (5.20):

$$\det |K_{ij} - \Lambda N_{ij}| = 0$$

obliczamy Λ_{kr} , a następnie składowe wektora $w_j(\Lambda_{kr})$, określające podstawową postać wyboczenia.

Stosowanie kryterium energetycznego daje oszacowanie od góry, tzn. że niezależnie od doboru funkcji kinematycznie dopuszczalnych $\psi_i(x, y)$ obliczamy mnożnik obciążenia krytycznego $\Lambda_{kr} \geq \Lambda_{kr}^{śc}$.

Niezależnie od tego czy korzystamy z równania różniczkowego (5.2) czy też z funkcjonału przyrostu energii potencjalnej (5.17) pozostajemy w ramach analizy statycznej wyboczenia płyty. Gdyby obciążenie było niezachowawcze /założenia 1 w p. 5.1/, to należałoby stosować ogólniejsze kryterium dynamiczne. Polega ono na analizie drgań swobodnych płyty ściskanej, wokół stanu równowagi tarczowej.

Przykład 5.5. Płyta kwadratowa, ściskana jednokierunkowo /rys.5.3/.

Do obliczeń przyjmujemy funkcje dopuszczalne z przykładu 3.7. Dla układu współrzędnych o początku w rogu płyty i długości boków $b = a$ przyjmujemy najpierw:

$$\tilde{w} = w_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} . \quad (5.22)$$

Po podstawieniu funkcji $\psi_1 = \sin \alpha x \sin \alpha y$ do (5.21) obliczamy:

$$K_1 = D a^2 \alpha^4, \quad N_1 = \frac{a^2 \alpha^2}{4} \quad \text{gdzie } \alpha = \frac{\pi}{a} .$$

Otrzymujemy stąd obciążenie krytyczne:

$$\Lambda_{kr} = \frac{K_1}{N_1} = 4 \frac{D \pi^2}{a^2} = \Lambda_{kr}^{śc} .$$

Przyjęta funkcja ugięcia (5.22) odpowiada, jak wykazaliśmy w przykładzie 5.1, ściśnemu rozwiązaniu.

Obliczenia powtórzymy dla funkcji:

$$\tilde{w} = w_1 \left(1 - \frac{6}{5}\xi^2 + \frac{1}{5}\xi^4\right) \left(1 - \frac{6}{5}\eta^2 + \frac{1}{5}\eta^4\right), \quad \xi, \eta \in [-1, 1], \quad (5.23)$$

którą w przykładzie 3.7 obliczyliśmy z linii ugięcia belki swobodnie podpartej, obciążonej równomiernie. Dla tej funkcji otrzymujemy:

$$\Lambda_{kr} = 4,0029 \frac{D\pi^2}{a^2} = 1,0007 \Lambda_{kr}^{sc}.$$

6. RÓWNANIA POWŁOK

6.1. Niektóre wiadomości
z teorii powierzchni

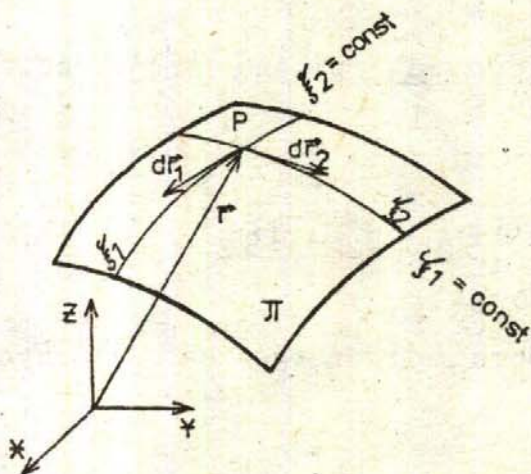
W powłokach cienkich rozważania odnosimy do powierzchni środkowej Π .
Wektor wodzący punktu P na powierzchni środkowej:

$$\vec{r} = X \vec{i}_X + Y \vec{i}_Y + Z \vec{i}_Z, \quad (6.1)$$

ma współrzędne, które są funkcjami dwóch niezależnych parametrów:

$$X = f_1(\xi_1, \xi_2), \quad Y = f_2(\xi_1, \xi_2), \quad Z = f_3(\xi_1, \xi_2).$$

Ustalonym wartościom $\xi_1 = \text{const.}$, $\xi_2 = \text{const.}$ odpowiadają linie na powierzchni /rys.6.1/. Jeśli linie dwóch rodzin nie są równoległe i przecinają się tylko jeden raz, to mogą one służyć do jednoznacznego wyznaczenia położenia punktu P na powierzchni Π . W takim przypadku parametry ξ_1 , ξ_2 możemy nazywać współrzędnymi krzywoliniowymi, a krzywe $\xi_1 = \text{const.}$ i $\xi_2 = \text{const.}$ nazywamy liniami współrzędnymi.



Rys.6.1. Linie współrzędnych na powierzchni

Wektory styczne do linii współrzędnych wynoszą:

$$d\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \cdot d\xi_1, \quad d\vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_2} \cdot d\xi_2.$$

Długości wektorów $\partial \vec{r} / \partial \xi_\alpha$ są nazywane współczynnikami Lamégo:

$$A_\alpha = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_\alpha} \right| \equiv |\vec{r}_{,\alpha}| \equiv |\vec{e}_\alpha|. \quad (6.2)$$

Współczynniki te służą obliczeniu elementarnych długości łuków odnie-
rzanych wzdłuż linii współrzędnych:

$$ds_1 = A_1 d\xi_1, \quad ds_2 = A_2 d\xi_2. \quad (6.3)$$

Kwadrat długości łuku dowolnej krzywej obliczamy wzorem:

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2) \cdot (d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2) = \\ &= \vec{r}_{,1} \cdot \vec{r}_{,1} d\xi_1^2 + 2\vec{r}_{,1} \cdot \vec{r}_{,2} d\xi_1 d\xi_2 + \vec{r}_{,2} \cdot \vec{r}_{,2} d\xi_2^2 \\ &= A_1^2 d\xi_1^2 + 2A_1 A_2 \cos(\vec{r}_{,1}, \vec{r}_{,2}) d\xi_1 d\xi_2 + \\ &\quad + A_2^2 d\xi_2^2, \end{aligned}$$

który nazywamy I formą kwadratową powierzchni, pisaną najczęściej w postaci:

$$ds^2 = g_{11} d\xi_1^2 + 2g_{12} d\xi_1 d\xi_2 + g_{22} d\xi_2^2. \quad (6.4)$$

Współczynniki $g_{\alpha\beta}$ /składowe I tensora metrycznego/ są iloczynami skalarnymi:

$$g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \vec{r}_{,\alpha} \cdot \vec{r}_{,\beta} \quad \text{dla } \alpha, \beta = 1, 2. \quad (6.5)$$

W dalszym ciągu będziemy posługiwali się ortogonalnymi liniami współrzędnych, dla których $g_{12} = 0$, a więc I forma kwadratowa ma postać:

$$ds^2 = A_1^2 d\xi_1^2 + A_2^2 d\xi_2^2. \quad (6.4a)$$

Wprowadzimy dalej lokalny układ wyznaczony w punkcie P przez wektory styczne do linii współrzędnych

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\vec{E}_\alpha}{A_\alpha} = \frac{1}{A_\alpha} \vec{r}_{,\alpha} \quad (6.6)$$

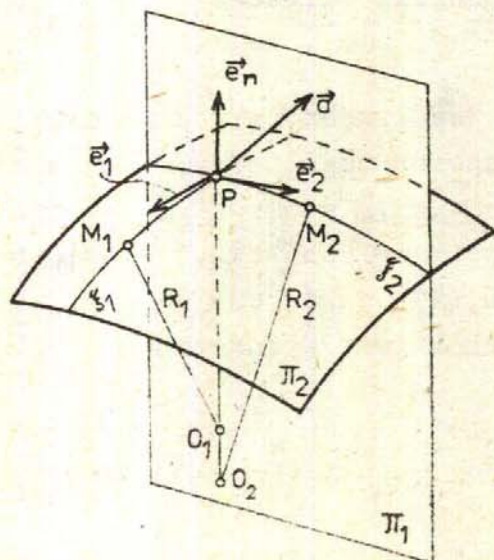
oraz wektor normalny \vec{e}_n o jednostkowej długości /rys.6.2/.

$$\vec{e}_n = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2. \quad (6.7)$$

W układzie lokalnym będziemy rozważali wielkości wektorowe /np. przemieszczenia/ i tensorowe /np. uogólnione siły przekrojowe/, związane z powierzchnią środkową. Na rys.6.2 pokazano wektor \vec{a} przyłożony do punktu P powierzchni Π :

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_n \vec{e}_n. \quad (6.8)$$

Płaszczyznę, w której leży wektor \vec{e}_α oraz normalna \vec{e}_n nazywamy przekrojem normalnym Π_α . Na rys. 6.2. pokazano taki przekrój Π_1 o normalnej \vec{e}_1 .



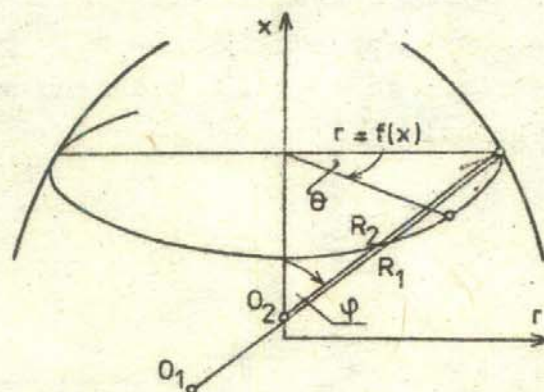
Rozpatrzmy punkt M_1 leżący na linii ξ_1 , bliski do punktu P. Normalne do powierzchni środkowej w tych punktach wyznaczają proste przecinające się w punkcie O_1 . Zbliżając punkt $M_1 \rightarrow P$ odcinek $M_1 O_1$ staje się promieniem krzywizny R_1 w punkcie P. Tak samo otrzymuje się promień krzywizny R_2 dla linii ξ_2 .

Rys.6.2. Lokalny układ bazy wektorów $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n$ i przekrój normalny Π_1

Przyjmijmy lokalny układ ortogonalny, związany z liniami współrzędnych ξ_1, ξ_2 oraz odpowiadające im promienie krzywizn R_1, R_2 . Jeśli będziemy dokonywali obrotu układu wokół normalnej \vec{e}_n , to dojdziemy do położenia, dla którego promienie krzywizn przyjmują maksymalną i minimalną wartość /np. $R_1 = R_{\min}, R_2 = R_{\max}$ /. Dochodzimy w ten sposób do linii głównych krzywizn, dla których główne krzywizny:

$$k_\alpha = \frac{1}{R_\alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha = 1, 2, \quad (6.9)$$

przyjmują wartości ekstremalne. W dalszym ciągu będziemy posługiwali się liniami głównych krzywizn, rozumiejąc oznaczenia R_1, R_2 oraz k_1, k_2 jako odnoszące się do głównych promieni krzywizn i głównych krzywizn powierzchni środkowej powłoki.



Hys.6.3. Powierzchnia środkowa powłoki obrotowej

W obliczeniach przyjmujemy różne układy współrzędnych krzywoliniowych, traktując współrzędne ξ_1, ξ_2 w sposób uogólniony. Pokazujemy to na przykładzie układu współrzędnych walcowych, stosowanym w analizie powłok obrotowych. Powłoki mają powierzchnię środkową, która powstaje przez obrót krzywej o równaniu $r = f(x)$ wokół osi x . Położenie dowolnego punktu P na takiej powierzchni jest wyznaczone przez dwie współrzędne /rys.6.3./

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = \varphi, \quad (6.10)$$

skąd wynikają długości łuków:

$$ds_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2} dx, \quad ds_2 = r d\theta,$$

a więc współczynniki Lamégo wynoszą:

$$A_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2}, \quad A_2 = r. \quad (6.11)$$

W powłokach obrotowych zachodzi ponadto zależność /rys.6.3/:

$$R_2 = \frac{r}{\sin\varphi}. \quad (6.12)$$

W układzie współrzędnych kulistych przyjmujemy:

$$\xi_1 = \varphi, \quad \xi_2 = \theta, \quad (6.13)$$

skąd wynikają współrzędne Lamégo:

$$A_1 = R_1(\varphi), \quad A_2 = r(\varphi). \quad (6.14)$$

Iloczyn krzywizn głównych nazywamy krzywizną Gaussa powierzchni:

$$K = k_1 \cdot k_2. \quad (6.15)$$

Krzywizna główna służy do klasyfikacji powierzchni środkowych, a więc też powłok. Do powłok o zerowej krzywiznie Gaussa należą powłoki walcowe i płyty.

Ze współczynników Lamégo /I formy kwadratowej/ i promieni krzywizn korzystamy przy liczeniu pochodnych wersorów i wektorów względem współrzędnych krzywoliniowych ξ_α . Dalej będziemy korzystali ze wzorów /ich wyprowadzenie podajemy w D.2/:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{1,1} &= -\frac{A_{1,2}}{A_2} \vec{e}_2 - \frac{A_1}{R_1} \vec{e}_n, & \vec{e}_{1,2} &= \frac{A_{1,2}}{A_1} \vec{e}_2, \\
\vec{e}_{2,1} &= \frac{A_{1,2}}{A_2} \vec{e}_1, & \vec{e}_{2,2} &= -\frac{A_{2,1}}{A_1} \vec{e}_1 - \frac{A_2}{R_2} \vec{e}_n, \\
\vec{e}_{n,1} &= \frac{A_1}{R_1} \vec{e}_1, & \vec{e}_{n,2} &= \frac{A_2}{R_2} \vec{e}_2.
\end{aligned} \quad (6.16)$$

Dzięki wzorom (6.16) można obliczyć pochodne wektora $\partial \vec{a} / \partial \xi_\alpha$:

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{,1} &= a_{1,1} \vec{e}_1 + a_1 \vec{e}_{1,1} + a_{2,1} \vec{e}_2 + a_2 \vec{e}_{2,1} + a_{n,1} \vec{e}_n + a_1 \vec{e}_{n,1} = \\
&= \left(a_{1,1} + \frac{A_{1,2}}{A_2} a_2 + \frac{A_1}{R_1} a_n \right) \vec{e}_1 + \\
&\quad + \left(a_{2,1} - \frac{A_{1,2}}{A_2} a_1 \right) \vec{e}_2 + \left(a_{n,1} - \frac{A_1}{R_1} a_1 \right) \vec{e}_n, \\
\vec{a}_{,2} &= \left(a_{1,2} - \frac{A_{2,1}}{A_1} a_2 \right) \vec{e}_1 + \\
&\quad + \left(a_{2,2} + \frac{A_{2,1}}{A_1} a_1 + \frac{A_2}{R_2} a_n \right) \vec{e}_2 + \left(a_{n,2} - \frac{A_2}{R_2} a_2 \right) \vec{e}_n.
\end{aligned} \quad (6.17)$$

Oprócz powierzchni środkowej w analizie powłok posługujemy się też powierzchnią równooddaloną $\Pi^{(z)}$ /nazywaną czasami warstwą/ o promieniu wodzącym /rys.6.4a/:

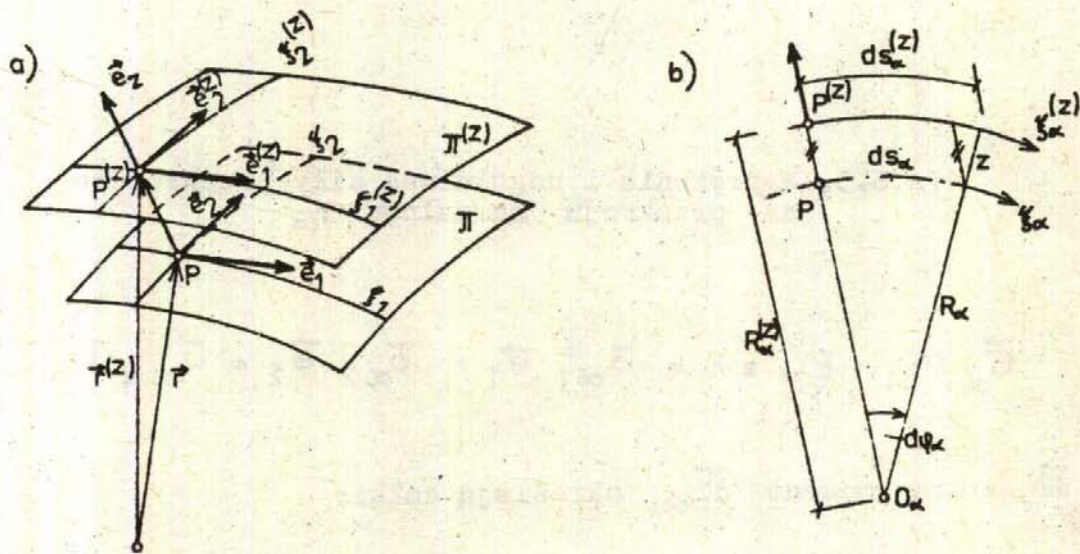
$$\vec{r}^{(z)} = \vec{r} + z \vec{e}_n \quad \text{dla} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}. \quad (6.18)$$

Na rys.6.4b pokazano element łuku odmierzanego wzdłuż linii współrzędnych ξ_α i $\xi_\alpha^{(z)}$. Promienie krzywizn powierzchni równooddalonej wynoszą:

$$R_\alpha^{(z)} = R_\alpha + z = R_\alpha \left(1 + \frac{z}{R_\alpha} \right),$$

skąd wynika elementarna długość łuku:

$$\begin{aligned}
 ds_{\alpha}(z) &= R_{\alpha}(z) d\varphi_{\alpha} = R_{\alpha} \cdot d\varphi_{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{z}{R_{\alpha}}\right) = \\
 &= ds_{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{z}{R_{\alpha}}\right) = A_{\alpha} d\xi_{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{z}{R_{\alpha}}\right) = \\
 &= A_{\alpha}(z) d\xi_{\alpha}.
 \end{aligned} \tag{6.19}$$



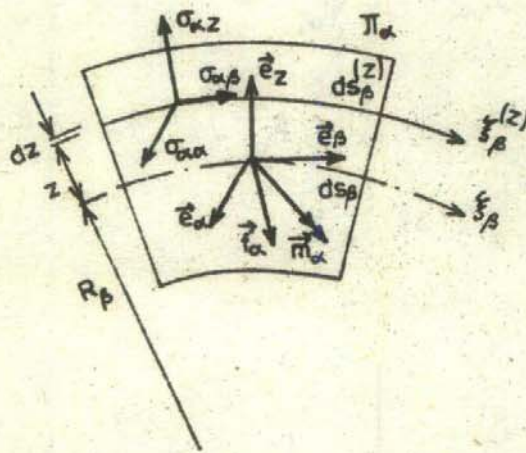
Rys.6.4. Powierzchnia równo oddalona i długość łuku linii krzywizn

Tak więc wzór na współczynniki Lamégo dla powierzchni równo oddalonej wynosi:

$$A_{\alpha}(z) = A_{\alpha} \left(1 + \frac{z}{R_{\alpha}}\right). \tag{6.20}$$

6.2. Uogólnione siły przekrojowe

Wektor naprężenia na przekroju normalnym Π_{α} ma składowe /rys.6.5/:



Rys.6.5. Naprężenia i uogólnione siły przekrojowe na przekroju normalnym Π_α

$$\vec{\sigma}_\alpha(\xi_1, \xi_2, z) = \sigma_{\alpha 1} \vec{e}_1 + \sigma_{\alpha 2} \vec{e}_2 + \sigma_{\alpha n} \vec{e}_n \quad (6.21)$$

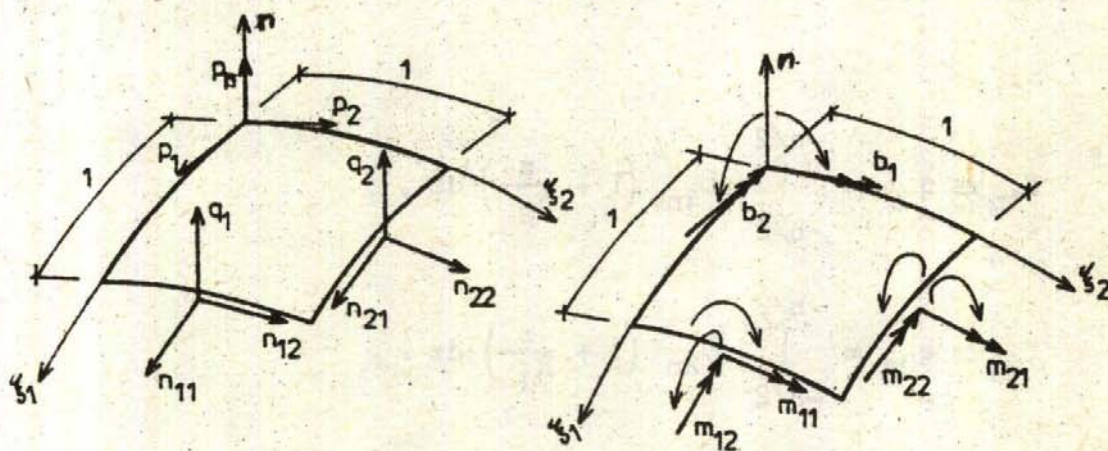
Sumę $d\vec{F}_\alpha$ oraz moment $d\vec{M}_\alpha$ określają całki:

$$\vec{dF}_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{\sigma}_\alpha ds_\beta(z) dz, \quad d\vec{M}_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} [z \vec{e}_n \times \vec{\sigma}_\alpha] ds_\beta(z) dz,$$

gdzie $\alpha \neq \beta$. W teorii powłok posługujemy się intensywnościami tych uogólnionych sił:

$$\begin{aligned} \vec{f}_\alpha &= \frac{d\vec{F}_\alpha}{ds_\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \vec{\sigma}_\alpha \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) dz = \\ &= f_{\alpha\alpha} \vec{e}_\alpha + f_{\alpha\beta} \vec{e}_\beta + f_{\alpha n} \vec{e}_n, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \vec{m}_\alpha &= \frac{d\vec{M}_\alpha}{ds_\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} [z \vec{e}_n \times \vec{\sigma}_\alpha] \left(1 + \frac{z}{R_\beta}\right) dz = \\ &= (-1)^\beta (m_{\alpha\alpha} \vec{e}_\beta - m_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha) \text{ dla } \alpha \neq \beta. \end{aligned}$$



Rys.6.6. Uogólnione siły przekrojowe i obciążenia powierzchniowe

Na rys.6.6 pokazano zwroty poszczególnych składowych na krawędziach powierzchni środkowej o normalnych \vec{e}_α .

Intensywności $f_{\alpha i}$ i $m_{\alpha\beta}$ nazywamy uogólnionymi siłami przekrojowymi. Składowe $f_{\alpha\beta}$ są siłami podłużnymi, które dalej oznaczamy przez $n_{\alpha\beta}$. Spośród tych sił wielkości równoimienne $n_{\alpha\alpha}$ nazywamy siłami normalnymi w odróżnieniu od sił stycznych $n_{\alpha\beta}$, gdy $\alpha \neq \beta$:

$$f_{11} \equiv n_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz,$$

$$f_{22} \equiv n_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz, \quad (6.23a)$$

$$f_{12} \equiv n_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz ,$$

$$f_{21} \equiv n_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz .$$
(6.23a)

Siły $f_{\alpha n}$ są siłami poprzecznymi, które dalej oznaczamy symbolem $q_{\alpha n}$:

$$f_{1n} \equiv q_{1n} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{1n} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz ,$$

$$f_{2n} \equiv q_{2n} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{2n} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz .$$
(6.23b)

Składowe $m_{\alpha\alpha}$ nazywamy momentami zginającymi, a $m_{\alpha\beta}$ dla $\alpha \neq \beta$ momentami skręcającymi:

$$m_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} z \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz ,$$

$$m_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} z \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz ,$$

$$m_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} z \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz ,$$

$$m_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} z \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz .$$
(6.23c)

W odróżnieniu od płyt pomimo równości naprężeń stycznych $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ w powłokach przy $R_1 \neq R_2$ będą występowały nierówności $n_{12} \neq n_{21}$ i $m_{12} \neq m_{21}$.

Tak samo jak w płytach jednostki sił i momentów przekrojowych wynikają z definicji intensywności (6.22):

$$[f_{\alpha i}] = N/m, \quad [m_{\alpha\beta}] = Nm/m.$$

Na końcu powiemy o oznaczeniach. Oprócz oznaczeń dwuindeksowych /tenscroych/:

$$\sigma_{\alpha i} \longrightarrow f_{\alpha i}, \quad n_{\alpha\beta}, \quad m_{\alpha\beta}$$

będziemy też posługiwali się oznaczeniami technicznymi

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha} \longrightarrow n_{\alpha}, \quad m_{\alpha}$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta} \longrightarrow n_{\alpha\beta}, \quad m_{\alpha\beta}, \quad q_{\alpha} \text{ dla } \alpha \neq \beta$$

Oznaczenia techniczne będziemy stosowali do uproszczonych wzorów na uogólnione siły przekrojowe, które otrzymujemy przez pominięcie członu z/R_{α} jako wartości małej w porównaniu z 1 /takie uproszczenie jest czynione zgodnie z oszacowaniem (1.2b), przyjmowanym w teorii powłok cienkich/:

$$n_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha} dz, \quad n_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} dz,$$

$$q_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha z} dz, \quad m_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha} z dz, \quad (6.24)$$

$$m_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha\beta} z dz.$$

Oprócz prostej postaci wzory (6.24) prowadzą do symetrycznych tensorów sił podłużnych \underline{n} i momentów \underline{m} , które podlegają transformacji tak jak w płytach /por. p. 2.5/.

6.3. Równania równowagi wewnętrznej

Równania równowagi wewnętrznej ujmują zależność między obciążeniami zewnętrznymi i siłami przekrojowymi. Równania te mają obowiązywać w dowolnym punkcie powierzchni środkowej.

Nawiązując do rys.1.1 obciążenia zewnętrzne można najogólniej podzielić na:

1. Powierzchniowe, tzn. przykładane do powierzchni górnej i dolnej.
2. Masowe, a więc związane z cząstkami powłoki zawartymi między powierzchniami ograniczającymi.
3. Brzegowe, tj. przykładane do powierzchni bocznej.

Jeśli rozważania odnosimy do powierzchni środkowej, to należy dokonać redukcji obciążeń powierzchniowych i masowych do obciążeń powierzchniowych tak, jak dokonano w p. 2.3 - por. wzory (2.18). W dalszym ciągu takie obciążenia będziemy krótko nazywali obciążeniami powierzchniowymi, których składowe zaznaczyliśmy na rys.6.6 jako:

$$\vec{p} = \{p_1, p_2, p_n\}, \quad \vec{b} = \{-b_2, b_1, 0\}. \quad (6.25)$$

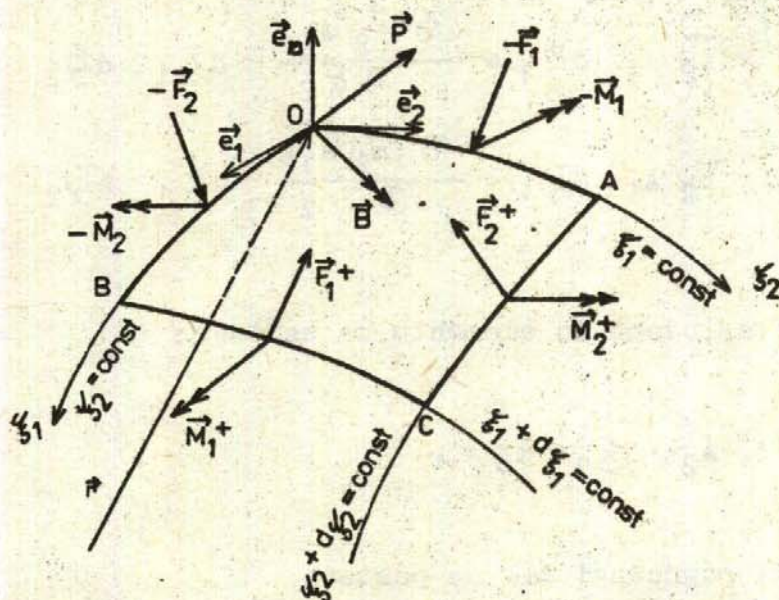
Równania równowagi wewnętrznej można wprowadzić w różny sposób. Równania te wyprowadzimy rozpatrując równowagę elementarnego płata powierzchni środkowej. Taki sposób jest poglądowy i nie wymaga dodatkowych objaśnień natury matematycznej.

Rozważamy równowagę elementu powierzchni środkowej ograniczonego liniami głównych krzywizn. Na rys.6.7 pokazano wektory sił i momentów działających na element.

Do boków elementu są przyłożone siły wynikające z przemnożenia ich intensywności przez długości odpowiednich boków. Pokazujemy to na przykładzie sił \vec{F}_1 i \vec{F}_1^+ :

$$\vec{F}_1 = \vec{f}_1 \Delta_2 d \xi_2$$

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1^+ &= \left(\vec{f}_1 + \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right) \left(A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right) d\xi_2 = \\
 &= \vec{f}_1 A_2 d\xi_2 + \left(\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial \xi_1} A_2 + \vec{f}_1 \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \right) d\xi_1 d\xi_2 + \\
 &\quad + \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} d\xi_1^2 d\xi_2 = \\
 &= \vec{f}_1 A_2 d\xi_2 + \frac{\partial (\vec{f}_1 A_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2 .
 \end{aligned}$$



Rys.6.7. Siły działające na element powierzchni środkowej

Przy obliczaniu siły z przyrostem \vec{F}_1^+ pomijamy wielkość małego rzędu $d\xi_1^2 d\xi_2$ w porównaniu z wielkością $d\xi_1 d\xi_2$, gdyż rozważania odnoszą się do punktu O, a więc chodzi o granicę przy $d\xi_\alpha \rightarrow 0$.

Łącznie do poszczególnych boków są przyłożone następujące wektory sił uogólnionych:

bok	siły uogólnione
OA	$-\vec{f}_1 A_2 d\xi_2, -\vec{m}_1 A_2 d\xi_2$
BC	$\vec{f}_1 A_2 d\xi_2 + \frac{\partial(\vec{f}_1 A_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2$ $\vec{m}_1 A_2 d\xi_2 + \frac{\partial(\vec{m}_1 A_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2$
OB	$-\vec{f}_2 A_1 d\xi_1, -\vec{m}_2 A_1 d\xi_1$
AC	$\vec{f}_2 A_1 d\xi_1 + \frac{\partial(\vec{f}_2 A_1)}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2$ $\vec{m}_2 A_1 d\xi_1 + \frac{\partial(\vec{m}_2 A_1)}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2$

Obciążenie przyłożone do elementu ma wartość:

$$\vec{P} = \vec{p} A_1 A_2 d\xi_1 d\xi_2,$$

tak, że warunek równowagi sił ma postać:

$$\left[\frac{\partial(\vec{f}_1 A_2)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(\vec{f}_2 A_1)}{\partial \xi_2} + \vec{p} A_1 A_2 \right] d\xi_1 d\xi_2 = \vec{0}.$$

Równowaga ma być spełniona dla dowolnej powierzchni, skąd wynika wektorowe równanie równowagi sił:

$$\frac{\partial(\vec{f}_1 A_2)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(\vec{f}_2 A_1)}{\partial \xi_2} + \vec{p} A_1 A_2 = 0. \quad (6.26)$$

Równanie (6.26) możemy rozpisać dla składowych równoległych do wektorów lokalnego układu $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n)$, korzystając z wzorów różniczkowania (6.17) dla wektorów $\vec{a}^{(1)} = \vec{f}_1 A_2$ i $\vec{a}^{(2)} = \vec{f}_2 A_1$:

$$\vec{a}_1^{(1)} \equiv \vec{f}_{1A_2} = (n_{11}A_2) \vec{e}_1 + (n_{12}A_2) \vec{e}_2 + (q_{1n}A_2) \vec{e}_n,$$

$$\vec{a}_2^{(2)} \equiv \vec{f}_{2A_1} = (n_{21}A_1) \vec{e}_1 + (n_{22}A_1) \vec{e}_2 + (q_{2n}A_1) \vec{e}_n,$$

$$\vec{a}_{,1}^{(1)} = \frac{\partial(\vec{f}_{1A_2})}{\partial \xi_1} = \left[(n_{11}A_2)_{,1} + A_{1,2} n_{12} + \frac{A_1 A_2}{R_1} q_{1n} \right] \vec{e}_1 +$$

$$+ \left[(n_{12}A_2)_{,1} - A_{1,2} n_{11} \right] \vec{e}_2 + \left[(q_{1n}A_2)_{,1} - \frac{A_1 A_2}{R_1} n_{11} \right] \vec{e}_n,$$

$$\vec{a}_{,2}^{(2)} = \frac{\partial(\vec{f}_{2A_1})}{\partial \xi_2} = \left[(n_{21}A_1)_{,2} - A_{2,1} n_{22} \right] \vec{e}_1 +$$

$$+ \left[(n_{22}A_1)_{,2} + A_{2,1} n_{21} + \frac{A_1 A_2}{R_2} q_{2n} \right] \vec{e}_2 + \left[(q_{2n}A_1)_{,1} - \frac{A_1 A_2}{R_2} n_{22} \right] \vec{e}_n.$$

Przyrównując do zera składowe przy wersorach dochodzimy do następujących trzech równań równowagi sił:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial(A_2 n_{11})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 n_{21})}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} n_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} n_{22} + A_1 A_2 \left(\frac{q_{1n}}{R_1} + p_1 \right) = 0, \\ \frac{\partial(A_1 n_{22})}{\partial \xi_2} + \frac{\partial(A_2 n_{21})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} n_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} n_{11} + A_1 A_2 \left(\frac{q_{2n}}{R_2} + p_2 \right) = 0, \\ \frac{\partial(A_2 q_{1n})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 q_{2n})}{\partial \xi_2} + A_1 A_2 \left(-\frac{n_{11}}{R_1} - \frac{n_{22}}{R_2} + p_n \right) = 0. \end{array} \right.$$

Równania równowagi momentów muszą uwzględniać nie tylko momenty wymienione w tablicy i obciążenia:

$$\vec{B} = \vec{b} A_1 A_2 d\xi_1 d\xi_2,$$

ale też momenty od sił przykładanych do boków elementu i obciążenia powierzchniowego:

$$OA : -[\vec{r} \times \vec{f}_1] A_2 d\xi_2,$$

$$\begin{aligned} BC : & \left[(\vec{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} d\xi_1) \times (\vec{f}_1 A_2 d\xi_2 + \frac{\partial(\vec{f}_1 A_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2) \right] = \\ & = [\vec{r} \times \vec{f}_1] A_2 d\xi_2 + \frac{\partial[\vec{r} \times (\vec{f}_1 A_2)]}{\partial \xi_1} d\xi_1 d\xi_2 + \\ & + \cancel{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial(\vec{f}_1 A_2)}{\partial \xi_1} d\xi_1^2 d\xi_2}, \end{aligned}$$

$$OB : -[\vec{r} \times \vec{f}_2] A_1 d\xi_1,$$

$$AC : [\vec{r} \times \vec{f}_2] A_1 d\xi_1 + \frac{\partial[\vec{r} \times (\vec{f}_2 A_1)]}{\partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2,$$

$$O : [\vec{r} \times \vec{p}] A_1 A_2 d\xi_1 d\xi_2.$$

Łącznie po dodaniu wszystkich członów otrzymujemy następujące równanie:

$$\left\{ \frac{\partial(\vec{m}_1 A_2)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(\vec{m}_2 A_1)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial[\vec{r} \times (\vec{f}_1 A_2)]}{\partial \xi_1} + \frac{\partial[\vec{r} \times (\vec{f}_2 A_1)]}{\partial \xi_2} + ([\vec{r} \times \vec{p}] + \vec{b}) A_1 A_2 \right\} d\xi_1 d\xi_2 = \vec{0},$$

skąd wynika następujące wektorowe równanie równowagi momentów:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\vec{m}_1 A_2)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(\vec{m}_2 A_1)}{\partial \xi_2} + [\vec{r}_{,1} \times (\vec{f}_1 A_2)] + [\vec{r}_{,2} \times (\vec{f}_2 A_1)] + \vec{b}_{A_1 A_2} + \\ & + \left\{ \vec{r} \times \left(\frac{\partial(\vec{f}_1 A_2)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(\vec{f}_2 A_1)}{\partial \xi_2} + \vec{p}_{A_1 A_2} \right) \right\} = \vec{0}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Spełnienie równania równowagi sił (6.26) powoduje zerowanie się iloczynu wektorowego w kłammerach.

Jeśli wektory występujące po prawej stronie równania (6.28) rozłożymy na składowe /rys.6.6/:

$$\vec{m}_1 = m_{11} \vec{e}_2 - m_{12} \vec{e}_1, \quad \vec{m}_2 = -m_{22} \vec{e}_1 + m_{21} \vec{e}_2,$$

$$[\vec{r}_{,1} \times (\vec{f}_{1A_2})] = A_1 A_2 [\vec{e}_1 \times \vec{f}_1] = -A_1 A_2 (q_{1n} \vec{e}_2 - n_{12} \vec{e}_n),$$

$$[\vec{r}_{,2} \times (\vec{f}_{2A_1})] = A_1 A_2 [\vec{e}_2 \times \vec{f}_2] = A_1 A_2 (q_{2n} \vec{e}_1 - n_{21} \vec{e}_n),$$

oraz wykorzystamy wzory (6.17) różniczkowania wektorów względem zmiennych ξ_α to z (6.28) otrzymujemy następujące równania równowagi momentów:

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial(A_2 m_{11})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 m_{21})}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} m_{12} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_1} m_{22} - A_1 A_2 (q_{1n} - b_1) &= 0, \\ \frac{\partial(A_1 m_{22})}{\partial \xi_2} + \frac{\partial(A_2 m_{12})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} m_{21} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} m_{11} - A_1 A_2 (q_{2n} - b_2) &= 0, \\ \frac{m_{12}}{R_1} - \frac{m_{21}}{R_2} + n_{12} - n_{21} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (6.29)$$

Szóste równanie równowagi jest równaniem algebraicznym. Po podstawieniu wzorów (6.23) na uogólnione siły przekrojowe okazuje się, że równanie to jest spełnione tożsamościowo. Wykazują to proste przekształcenia:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_1} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} z \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz - \frac{1}{R_2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} z \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz + \\ & + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) dz - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) dz = \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{12} - \sigma_{21}) \left[1 + z \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2}\right)\right] dz \end{aligned}$$

$$+ z^2 \left(\frac{1}{R_1 R_2} - \frac{1}{R_2 R_1} \right) dz = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{12} - \sigma_{21}) dz \equiv 0.$$

W przypadku posługiwania się wzorami uproszczonymi (6.24) szóste równanie równowagi jest spełnione tożsamościowo tylko w szczególnych przypadkach. Będzie to przejście do płyty, gdy $R_\alpha \rightarrow \infty$ i przypadek powłoki kulistej, gdy $R_1 = R_2 = R$.

6.4. R ó w n a n i a k i n e m a t y c z n e

Pod wpływem czynników zewnętrznych /obciążenia, temperatura, przemieszczenia podpór/ konfiguracja początkowa przechodzi w konfigurację odkształconą. Wszystkie wielkości związane z konfiguracją odkształconą dalej oznaczamy przez dodanie znaku * do odpowiednich symboli z konfiguracji początkowej.

Promień wodzący punktu P na powierzchni środkowej wynosi:

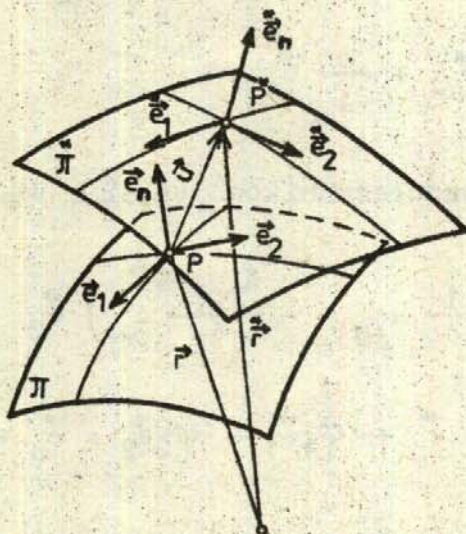
$$\vec{r}^* = \vec{r} + \vec{u}, \quad (6.30)$$

gdzie $\vec{u} = \vec{PP}^*$ jest wektorem przemieszczenia /rys.6.8/:

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + w \vec{e}_n. \quad (6.31)$$

Aby obliczyć wartości odkształceń należy obliczyć współczynniki Lamégo i wersory powierzchni odkształconej. Najpierw różniczkujemy wektor wodzący \vec{r} :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{,\alpha}^* &= \vec{r}_{,\alpha} + \vec{u}_{,\alpha} = A \vec{e}_\alpha + \overbrace{\left(u_{\alpha,\alpha} + \frac{A_{\alpha,\beta}}{A\beta} u_\beta + \frac{A_\alpha}{R_\alpha} w \right)}^a \vec{e}_\alpha + \\ &+ \underbrace{\left(u_{\beta,\alpha} - \frac{A_{\alpha,\beta}}{A\beta} u_\alpha \right)}_b \vec{e}_\beta + \underbrace{\left(w_{,\alpha} - \frac{A_\alpha}{R_\alpha} u_\alpha \right)}_c \vec{e}_n \quad \text{dla } \alpha \neq \beta. \end{aligned} \quad (6.32)$$



Kys.6.8. Powierzchnia środkowa przed i po odkształceniu

Współczynniki Lamégo obliczamy wzorem:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} A_{\alpha} &= \sqrt{\frac{\mathbb{R}}{\Gamma_{,\alpha\alpha}} \frac{\mathbb{R}}{\Gamma_{,\alpha\alpha}}} = [(A_{\alpha} + a)^2 + b^2 + c^2]^{1/2} = \\ &= (A_{\alpha} + a) \left[1 + \frac{b^2}{(A_{\alpha} + a)^2} + \frac{c^2}{(A_{\alpha} + a)^2} \right]^{1/2} = \\ &= (A_{\alpha} + a) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{b^2}{(A_{\alpha} + a)^2} + \frac{1}{2} \frac{c^2}{(A_{\alpha} + a)^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

W teorii liniowej posługujemy się wzorami przybliżonymi, zachowując w szeregu potęgowym tylko człony liniowe względem przemieszczeń:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} A_{\alpha} &= A_{\alpha} + a = A_{\alpha} + \vec{u}_{,\alpha} \vec{e}_{\alpha} = \\ &= A_{\alpha} \left(1 + \frac{1}{A_{\alpha}} u_{\alpha,\alpha} + \frac{A_{\alpha,\beta}}{A_1 A_2} u_{\beta} + \frac{W}{R_{\alpha}} \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

Tak samo obliczamy wiersory układu lokalnego powierzchni odkształconej:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\alpha &= \frac{1}{A_\alpha} \vec{r}_{,\alpha} = \vec{e}_\alpha + \frac{b}{A_\alpha} \vec{e}_\beta + \frac{c}{A_\alpha} \vec{e}_n \approx \\ &\approx \vec{e}_\alpha + \frac{b}{A_\alpha} \vec{e}_\beta + \frac{c}{A_\alpha} \vec{e}_n, \end{aligned}$$

które po podstawieniu współczynników (6.32) są określone wzorami:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\alpha &= \vec{e}_\alpha + \left(\frac{1}{A_\alpha} u_{\beta,\alpha} - \frac{A_{\alpha\beta}}{A_1 A_2} u_\alpha \right) \vec{e}_\beta + \left(\frac{1}{A_\alpha} w_{,\alpha} - \frac{u_\alpha}{R_\alpha} \right) \vec{e}_n, \\ \vec{e}_n &= \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_n + \varphi_1 \vec{e}_1 + \varphi_2 \vec{e}_2 = \vec{e}_n + \delta \vec{e}_n, \end{aligned} \quad (6.34)$$

gdzie współrzędne φ_α wynoszą:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + \frac{u_1}{R_1}, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \frac{u_2}{R_2}. \quad (6.35)$$

Odształcenia ε_α powierzchni środkowej obliczamy jako względne wydłużenia:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{ds_\alpha - ds_\alpha}{ds_\alpha} = \frac{A_\alpha}{A_\alpha} - 1 = \frac{1}{A_\alpha} \vec{u}_{,\alpha} \vec{e}_\alpha, \quad (6.36)$$

a odkształcenie postaciowe interpretujemy jako zmianę kąta prostego między wektorami:

$$\delta_{12} = \vec{e}_1 \vec{e}_2 \approx \vec{e}_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \vec{e}_2. \quad (6.37)$$

Po podstawieniu wzorów (6.32) i (6.34) otrzymujemy następujące wzory na odkształcenia powierzchni środkowej:

$$\left[\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{w}{R_1}, \right. \quad (6.38)$$

$$\left[\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + \frac{w}{H_2} , \\ \gamma_{12} &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) \dots \end{aligned} \right. \quad (6.38)$$

Odształcenia powierzchni równo oddalonej obliczamy wykorzystując hipotezę kinematyczną Kirchhoffa-Love'a, w myśl której przy przejściu $\Pi \rightarrow \Pi^*$ wektor normalny $z \vec{e}_n \rightarrow z \vec{e}_n^*$. Dzięki temu wektor wodzący odształconej powierzchni równo oddalonej $\Pi^*(z)$ wynosi:

$$\vec{r}^*(z) = \vec{r} + z \vec{e} = \underbrace{(\vec{r} + z \vec{e}_n)}_{\vec{r}(z)} + \underbrace{(\vec{u} + z \delta \vec{e}_n)}_{\vec{u}(z)} \quad (6.39)$$

$$= \vec{r}(z) + u_1(z) \vec{e}_1 + u_2(z) \vec{e}_2 + w(z) \vec{e}_n ,$$

gdzie występują składowe wektora przemieszczeń $\vec{u}(z)$:

$$\left[\begin{aligned} u_1(z) &= u_1 + \varphi_1 z , \\ u_2(z) &= u_2 + \varphi_2 z , \\ w(z) &= w . \end{aligned} \right. \quad (6.40)$$

Odształcenia $\varepsilon_\alpha(z)$ powierzchni równo oddalonej przez analogię do (6.36) wynosi:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha(z) &= \frac{A_\alpha^*(z)}{A_\alpha(z)} - 1 = \frac{1}{A_\alpha(z)} \vec{u}_{,\alpha}^*(z) \cdot \vec{e}_\alpha = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{z}{A_\alpha}} \left(\frac{1}{A_\alpha} \vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{e}_\alpha + \frac{z}{A_\alpha} \delta \vec{e}_{n,\alpha} \cdot \vec{e}_\alpha \right) \approx \varepsilon_\alpha + z \chi_\alpha \quad (6.41) \end{aligned}$$

gdzie wielkości \varkappa_α wynoszą:

$$\varkappa_\alpha = \frac{1}{A_\alpha} \vec{e}_\alpha \cdot \sigma \vec{e}_{n,\alpha} = \frac{1}{A_\alpha} \varphi_{\alpha,\alpha} + \frac{A_{\alpha,\beta}}{A_1 A_2} \varphi_\beta. \quad (6.42)$$

Wielkości \varkappa_α możemy interpretować jako przyrosty krzywizn odkształceniowej powierzchni środkowej. Pokażemy to przez nieco inne rozpisanie wzoru (6.41), korzystając z (6.20):

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha(z) &= \frac{A_\alpha^* \left(1 + \frac{z}{R_\alpha^*}\right)}{A_\alpha \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)} - 1 = \\ &= \frac{1}{A_\alpha \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right)} \left[A_\alpha^* \left(1 + \frac{z}{R_\alpha^*}\right) - A_\alpha \left(1 + \frac{z}{R_\alpha}\right) \right] = \\ &= \frac{A_\alpha^* - A_\alpha}{A_\alpha} + \left(\frac{A_\alpha^*}{A_\alpha} \frac{1}{R_\alpha^*} - \frac{1}{R_\alpha} \right) z = \\ &= \varepsilon_\alpha + \left(\frac{1}{R_\alpha^*} - \frac{1}{R_\alpha} \right) z, \end{aligned}$$

a więc otrzymujemy:

$$\varkappa_\alpha \approx \frac{1}{R_\alpha^*} - \frac{1}{R_\alpha} = k_\alpha^* - k_\alpha. \quad (6.43)$$

Bardziej złożone jest obliczenie odkształcenia postaciowego powierzchni równo oddalonej. Po przekształceniach i przybliżeniach, jak pokazano powyżej, otrzymujemy:

$$\gamma_{12}(z) = \gamma_{12} + 2 \varkappa_{12} z, \quad (6.44)$$

gdzie α_{12} może być interpretowane jako funkcja spaczenia powierzchni środkowej:

$$\chi_{12} \equiv \alpha_{12} = \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{\varphi_2}{A_2} \right)_{,1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{\varphi_1}{A_1} \right)_{,2} . \quad (6.45)$$

Łącznie odkształcenia powierzchni równo oddalonej ujmujemy związkami:

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_1(z) = \varepsilon_1 + \alpha_1 z , \\ \varepsilon_2(z) = \varepsilon_2 + \alpha_2 z , \\ \gamma_{12}(z) = \gamma_{12} + \chi_{12} z , \end{array} \right. \quad (6.46)$$

gdzie występują uogólnione odkształcenia powierzchni środkowej. Obok odkształceń powierzchni środkowej ε_1 , ε_2 , γ_{12} określonej wzorami (6.38) występują uogólnione odkształcenia α_1 , α_2 , χ_{12} związane ze zmianą zakrzywienia powierzchni środkowej. Te odkształcenia możemy wyrazić też przez przemieszczenia u_1 , u_2 , w po podstawieniu wzorów (6.35) do (6.42) i (6.45):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= - \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} , \\ \alpha_2 &= - \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} , \\ \chi_{12} &= - \left\{ \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\frac{1}{A_2^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_2} - \frac{u_2}{R_2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left[\frac{1}{A_1^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{u_1}{R_1} \right) \right] \right\} . \end{aligned} \quad (6.47)$$

6.5. R ó w n a n i a f i z y c z n e

Hipotezy K-L powodują, że tak samo jak w teorii płyt, również w powłokach siły poprzeczne będą siłami biernymi. Do aktywnych sił

przekrojowych należą siły podłużne i momenty i dla nich formułujemy równania fizyczne. Jeśli posłużymy się wzorami uproszczonymi (6.24), to równania fizyczne są takie same jak w płytach. Równania (2.19) przepisujemy poniżej, stosując tylko oznaczenia związane z głównymi liniami krzywizn:

$$\begin{aligned} n_1 &= B (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), & n_2 &= B (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \\ n_{12} &= n_{21} = \frac{1 - \nu}{2} B \gamma_{12}, \end{aligned} \quad (6.48a)$$

$$\begin{aligned} m_1 &= D (\kappa_1 + \nu \kappa_2), & m_2 &= D (\kappa_2 + \nu \kappa_1), \\ m_{12} &= m_{21} = \frac{1 - \nu}{2} D \gamma_{12}, \end{aligned} \quad (6.48b)$$

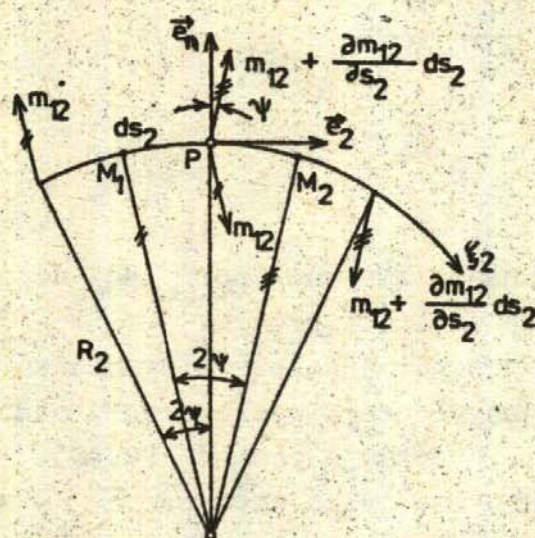
gdzie sztywność stanu bezmomentowego B i giętnego D wynoszą:

$$B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (6.49)$$

Uproszczone wzory (6.24) na siły przekrojowe prowadzą w przypadku materiału sprężystego i izotropowego do rozprężenia stanu bezmomentowego i giętnego w równaniach fizycznych - tak samo jak w płytach.

6.6. Zastępcze siły brzegowe i warunki brzegowe

Tak samo jak w płytach moment skręcający, występujący przy brzegu, zamieniamy na statycznie równoważne siły brzegowe. Dla uproszczenia rozważań przyjmijmy, że linia brzegowa pokrywa się z linią współrzędnych $\xi_2 = \text{const.}$ /rys.6.9/.



Rys.6.9. Siły równoważące moment skręcający

Rozpatrzmy dwie sąsiednie elementarne części linii $\xi_1 = \text{const.}$ o długości ds_2 . Momenty skręcające, przyłożone w środku łuków w punktach M_1 i M_2 , równoważymy parami sił:

$$(m_{12} ds_2) \frac{1}{ds_2}, \quad \left(m_{12} + \frac{\partial m_{12}}{\partial s_2} ds_2\right) ds_2 \frac{1}{ds_2}.$$

Siły występujące w punkcie P rzutujemy na kierunek normalnej i stycznej do linii ξ_2 . Ze względu na mały kąt ψ :

$$2\psi = \frac{ds_2}{R_2}$$

przyjmujemy $\cos \psi \approx 1$, $\sin \psi \approx \psi = ds_2/(2R_2)$, tak że rzuty wynoszą:

$$\tilde{q}_2 ds_2 = \left(m_{12} + \frac{\partial m_{12}}{\partial s_2} ds_2 - m_{12}\right),$$

$$\tilde{n}_{12} ds_2 = \left(2 m_{12} + \frac{\partial m_{12}}{\partial s_2} ds_2\right) \frac{ds_2}{2R_2}.$$

Siły te dodajemy do odpowiednich sił otrzymując w ten sposób zastępczą siłę poprzeczną /tak jak w płytach/ i zastępczą siłę styczną:

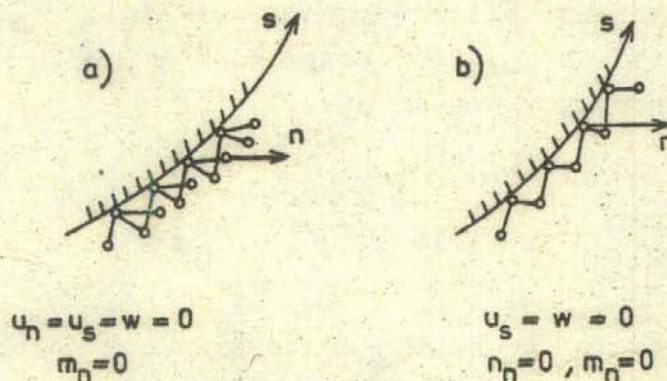
$$\bar{q}_n = q_n + \frac{1}{A_s} \frac{\partial m_{ns}}{\partial \xi_s},$$

$$\bar{n}_{ns} = n_{ns} + \frac{m_{ns}}{R_s},$$
(6.50)

gdzie indeks n oznacza kierunek normalnej do powierzchni bocznej, a s kierunek stycznej do linii brzegu.

Na każdej linii brzegowej należy sformułować po 4 warunki brzegowe, tak jak w płytach przy łącznym występowaniu stanu tarczowego i giętnego. Warunki kinematyczne przyjmują postać (2.40), a w warunkach statycznych (2.44) zmienia się tylko wzór na \bar{n}_{ns} - zgodnie z (6.50)₁.

Ze względu na 4 warunki w powłokach może wystąpić duża różnorodność mieszanych warunków brzegowych. Na rys.6.10 pokazano przegubowe podparcia: nieprzesuwne i przesuwne /nieodkształcalna przepona/.



Rys.6.10. Przegubowe podparcie brzegu powłoki

6.7. Z e s t a w i e n i e p o d s t a w o w y c h r ó w n a ń

Przy posługiwaniu się uproszczonymi wzorami na uogólnione siły przekrojowe mamy łącznie 17 niewiadomych:

u_1, u_2, w - 3 przemieszczenia

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_{12} \\ \alpha_1, \alpha_2, \chi_{12} \end{array} \right\} - 6 \text{ uogólnionych odkształceń}$$

$$\left. \begin{array}{l} n_1, n_2, n_{12} \\ m_1, m_2, m_{12}, q_1, q_2 \end{array} \right\} - 8 \text{ uogólnionych sił przekrojowych}$$

Podstawowe równania napiszemy jeszcze raz łącznie

I. Równania równowagi^x:

$$\frac{\partial(A_2 n_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 n_{12})}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} n_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} n_2 + A_1 A_2 \left(\frac{q_1}{R_1} + p_1 \right) = 0,$$

$$\frac{\partial(A_1 n_2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial(A_2 n_{12})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} n_{12} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} n_1 + A_1 A_2 \left(\frac{q_2}{R_2} + p_2 \right) = 0,$$

$$\frac{\partial(A_2 q_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 q_2)}{\partial \xi_2} + A_1 A_2 \left(-\frac{n_1}{R_1} - \frac{n_2}{R_2} + p_n \right) = 0,$$

$$\frac{\partial(A_2 m_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 m_{12})}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} m_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} m_2 + A_1 A_2 (-q_1 + b_1) = 0,$$

$$\frac{\partial(A_1 m_2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial(A_2 m_{12})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} m_{12} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} m_1 + A_1 A_2 (-q_2 + b_2) = 0.$$

^x

Pomijamy 6 równanie zakładając, że jest ono spełnione w przybliżeniu. W [18] pokazano zmodyfikowany układ równań równowagi ze spełnionym tożsamościowo szóstym równaniem.

II. Równania kinematyczne:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{w}{R_1},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + \frac{w}{R_2},$$

$$\gamma_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right),$$

$$\varkappa_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\varphi_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2},$$

$$\varkappa_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} + \frac{\varphi_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1},$$

$$\gamma_{12} = \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{\varphi_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{\varphi_1}{A_1} \right).$$

III. Równania fizyczne:

$$n_1 = B (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2),$$

$$n_2 = B (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1),$$

$$n_{12} = B \frac{1-\nu}{2} \gamma_{12},$$

$$m_1 = D (\varkappa_1 + \nu \varkappa_2),$$

$$m_2 = D (\varkappa_2 + \nu \varkappa_1),$$

$$m_{12} = D \frac{1-\nu}{2} \gamma_{12}.$$

W równaniach kinematycznych występują kąty obrotu normalnej do powierzchni środkowej:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + \frac{u_1}{R_1}, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \frac{u_2}{R_2},$$

a w równaniach fizycznych sztywności:

$$B = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Wzory na kąty φ_α służą też do formułowania warunków brzegowych podobnie jak zastępcze siły brzegowe:

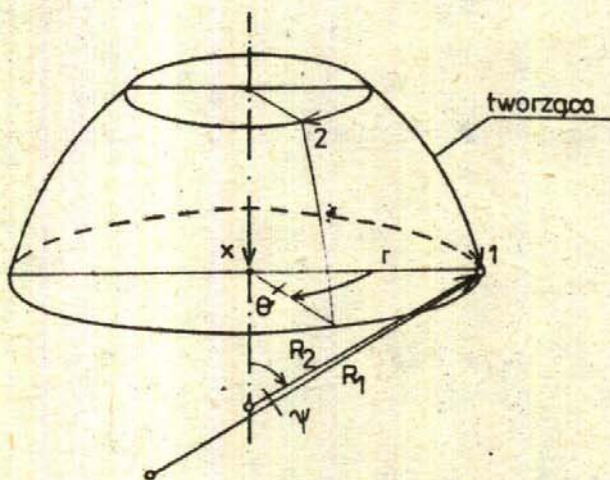
$$\bar{n}_{ns} = n_{ns} + \frac{m_{ns}}{R_s},$$

$$\bar{q}_n = q_n + \frac{1}{A_s} \frac{\partial m_{ns}}{\partial \xi_s}.$$

6.8. Równania powłok obrotowych

Powłoki obrotowe są często stosowane ze względu na łatwość ich wykonania. W budownictwie są one używane w zbiornikach, kopułach i sklepieniach przekryć, chłodniach kominowych i kominach przemysłowych. Ten typ powłok można stosunkowo łatwo analizować ze względu na kształt powierzchni środkowej.

Powierzchnia obrotowo symetryczna powstaje przez obrót tworzącej wokół osi symetrii /rys.6.11/. W dalszym ciągu indeksy 1 i 2 będziemy stosowali odpowiednio dla kierunku południkowego /wzdłuż tworzącej/ i obwodowego, wzdłuż linii głównych krzywizn.



Rys.6.11. Powierzchnia obrotowa

W powłokach obrotowych będziemy stosowali następujące skrócone oznaczenia:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi, & \xi_2 &= \theta, & d(\)/d\xi &= (\prime \\ \underline{u} &= \{u, v, w\}, \\ \underline{\varepsilon} &= \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, \alpha_1, \alpha_2, \gamma \}, \\ \underline{\sigma} &= \{n_1, n_2, n_{12}, m_1, m_2, m_{12}\}. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Specyfikacja uogólnionej współrzędnej ξ prowadzi do różnych układów współrzędnych, np. w układzie współrzędnych walcowych $\xi = \mathbf{x}$, a we współrzędnych sferycznych $\xi = \psi$.

W powłokach obrotowych obowiązują zależności:

$$A_1 = A(\xi), \quad A_2 = r(\xi), \quad R_2 = \frac{r}{\sin \psi}. \tag{6.52a}$$

Współczynniki Lamégo nie zależą od zmiennej θ , a więc:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial \theta} \equiv 0. \tag{6.52b}$$

Dzięki zależnościom (6.52) podstawowe równania z p.6.7 przyjmują prostszą postać.

I. Równania równowagi:

$$\frac{\partial(rn_1)}{\partial \xi} + A \frac{\partial n_{12}}{\partial \theta} - r' n_2 + \frac{rA}{R_1} q_1 + rAp_1 = 0,$$

$$\frac{\partial(rn_{12})}{\partial \xi} + A \frac{\partial n_2}{\partial \theta} + r' n_{12} + \frac{rA}{R_2} q_2 + rAp_2 = 0,$$

$$\frac{\partial(rq_1)}{\partial \xi} + A \frac{\partial q_2}{\partial \theta} - rA \left(\frac{n_1}{R_1} + \frac{n_2}{R_2} \right) + rAp_n = 0,$$

$$\frac{\partial(rm_1)}{\partial \xi} + A \frac{\partial m_{12}}{\partial \theta} - r'm_2 - rAq_1 + rAb_1 = 0,$$

$$\frac{\partial(rm_{12})}{\partial \xi} + A \frac{\partial m_2}{\partial \theta} + r'm_{12} - rAq_2 + rAb_2 = 0.$$

II. Równania kinematyczne:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{w}{R_1},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{r'}{rA} u + \frac{w}{R_2},$$

$$\gamma = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{r'}{rA} \varphi_1,$$

$$\gamma = \frac{r}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi_2}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta},$$

gdzie kąty obrotu normalnej wynoszą:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{u}{R_1}, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{R_2}. \quad (6.53)$$

Równania fizyczne nie ulegają zmianie w porównaniu z równaniami III z p.6.7.

Zastępcze siły brzegowe piszemy najpierw dla linii $\xi = \text{const.}$:

$$\bar{n}_{12} = n_{12} + \frac{m_{12}}{R_2}, \quad (6.54a)$$

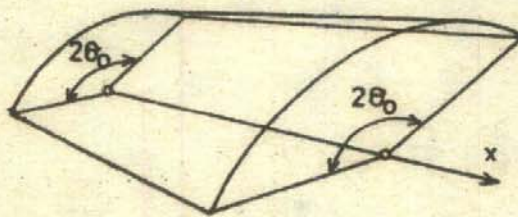
$$\bar{q}_1 = q_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial m_{12}}{\partial \theta} . \quad (6.54a)$$

Dla linii $\theta = \text{const.}$ siły zastępcze wynoszą

$$\bar{n}_{21} = n_{21} + \frac{m_{21}}{R_1} ,$$

$$\bar{q}_2 = q_2 + \frac{1}{A} \frac{\partial m_{21}}{\partial \xi} . \quad (6.54b)$$

Podane siły zastępcze służą do formowania warunków brzegowych dla powłok obrotowych otwartych i zamkniętych. Powłoki otwarte powstają przez niepełny obrót tworzącej /rys.6.12/, zamknięte, gdy kąt rozwarcia $\theta_0 = \pi$.



Rys.6.12. Powłoka obrotowa otwarta

6.9. Rozdzielenie zmiennych w zamkniętych powłokach obrotowych

Tak samo jak w płytach kołowych /można je traktować jako szczególny przypadek powłok obrotowych/ można rozdzielić zmienne według wzoru (3.1). Zajmiemy się bardziej szczegółowo przypadkiem, gdy istnieje płaszczyzna symetrii obciążeń, od której odmierzamy kąt θ . W takiej sytuacji niżej wymienione wielkości rozwijamy w szereg cos lub sin:

$$\cos: p_1, p_n, b_1, u, w,$$

$$n_1, n_2, m_1, m_2, q_1; \quad (6.55)$$

$$\sin: p_2, b_2, v, n_{12}, m_{12}, q_2.$$

Posługując się takim samym rozumowaniem jak w p.3.2, dochodzimy do następujących równań różniczkowych zwyczajnych:

I. Równania równowagi:

$$(rn_1)' + jAn_{12} - r'n_2 + \frac{rA}{R_1} q_1 + rAp_1 = 0,$$

$$(rn_{12})' - jAn_2 + r'n_{12} + \frac{rA}{R_2} q_2 + rAp_2 = 0,$$

$$(rq_1)' + jAq_2 - rA \left(\frac{n_1}{R_1} + \frac{n_2}{R_2} \right) + rAp_n = 0, \quad (6.56)$$

$$(rm_1)' + jAm_{12} - r'm_2 - rAq_1 + rAb_1 = 0,$$

$$(rm_{12})' - jAm_2 + r'm_{12} - rAq_2 + rAb_2 = 0.$$

II + III. Równania kinematyczne i fizyczne:

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{1}{A} u' + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} (n_1 - \nu n_2), \right.$$

$$\varepsilon_2 = \left| \frac{j}{r} v + \frac{r'}{rA} u + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} (n_2 - \nu n_1), \right.$$

$$\gamma = \left| \frac{r}{A} \left(\frac{v}{r} \right)' - \frac{j}{r} u = \frac{2(1+\nu)}{Eh} n_{12}, \right. \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left| -\frac{1}{A} \left(\frac{w'}{A} - \frac{u}{R_1} \right) \right|' = \frac{12}{Eh^3} (m_1 - \nu m_2), & (6.57) \\ \alpha_2 &= \left| \frac{j}{r} \left(\frac{j}{r} w + \frac{v}{R_2} \right) - \frac{r'}{rA} \left(\frac{w'}{A} - \frac{u}{R_1} \right) \right| = \frac{12}{Eh^3} (m_2 - \nu m_1) \\ \gamma &= \left| \frac{r}{A} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{j}{r} w + \frac{v}{R_2} \right) \right] \right|' + \frac{j}{r} \left[\frac{w'}{A} - \frac{u}{R_1} \right] = \\ &= \frac{2 + (1 + \nu)}{Eh^3} m_{12}. \end{aligned}$$

Wzory służące do formowania warunków brzegowych na linii $\xi = \text{const.}$ przyjmują postać:

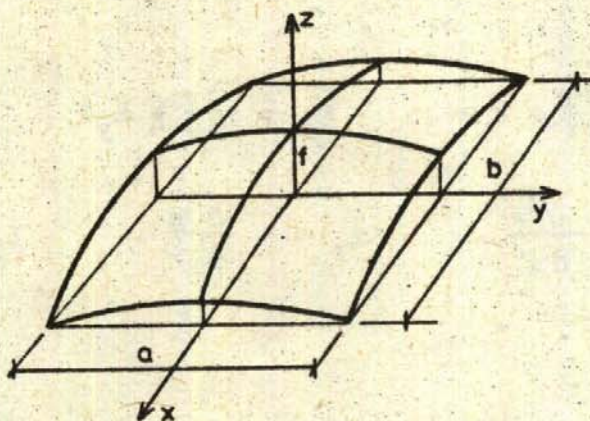
$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{1}{A} w' + \frac{u}{R_1}, \\ \bar{n}_{12} &= n_{12} + \frac{m_{12}}{R_2}, & (6.58) \\ \bar{q}_1 &= q_1 + \frac{j}{r} m_{12}. \end{aligned}$$

W podanych zależnościach pominięto indeks j przy przemieszczeniach, odkształceniach i siłach przekrojowych /są to współczynniki odpowiednich wyrazów szeregów trygonometrycznych/.

6.10. Równania powłok mało wyniosłych

Powłoki, w których normalna do powierzchni środkowej jest niewielką odchylną od osi z układu kartezjańskiego /rys.6.13/ nazywamy powłokami mało wyniosłymi. W przypadku rzutu prostokątnego powłoka będzie mało wyniosła, jeśli będzie spełnione oszacowanie:

$$\frac{f}{l} < \frac{1}{5} \quad \text{gdzie } l = \min(a, b).$$



Rys.6.13. Powłoka mało wyniosła na rzucie prostokątnym

W powłokach mało wyniosłych zakładamy, że linie ξ_1, ξ_2 pokrywają się z liniami x, y na płaszczyźnie rzutu powierzchni środkowej, skąd wynika:

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = y \rightarrow A_1 = A_2 = 1. \quad (6.59)$$

Dalsze uproszczenie polega na pominięciu członów z krzywiznami $k_\alpha = 1/R_\alpha$ dla $\alpha = 1, 2$ w podstawowych równaniach, z wyjątkiem równań kinematycznych dla $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ oraz trzeciego równania równowagi. Dochodzimy w ten sposób do równań:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + p_x = 0, \\ & \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + p_y = 0, \\ & -k_x n_x - k_y n_y + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p_z = 0, \\ & \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_x + b_x = 0, \\ & \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y + b_y = 0, \end{aligned} \quad (6.60)$$

II.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_x w, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + k_y w, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \gamma_{\kappa xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (6.61)$$

Równania fizyczne nie ulegają zmianie w porównaniu z równaniami III z p.6.7 toteż nie przytaczamy ich.

Przytoczone równania przekształcimy do postaci mieszanej: przemieszczeniowo-siłowej. Jako podstawowe niewiadome przyjmujemy funkcję ugięcia w oraz funkcję naprężeń F . Przepisujemy zależności (2.30) dla sił stanu bezmomentowego:

$$\begin{aligned}n_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int p_x dx, & n_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int p_y dy, \\ n_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (6.62)$$

Równanie nierozdzielności dla powłoki mało wyniosłej otrzymujemy przez dwukrotne zróźniczkowanie związków (6.61) na ε_x i ε_y oraz ich dodanie:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_x w) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k_y w) \approx \\ &\approx \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (6.63)$$

Po podstawieniu (6.62) do /A/ z p.2.4.2 równanie nierozdzielności przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F - Eh \nabla_k^2 w &= \\ &= \int \frac{\partial^2 p_x}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 p_y}{\partial x^2} dy - \nu \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} \right) . \end{aligned} \quad (6.64)$$

Z czwartego i piątego równania równowagi obliczamy siły poprzeczne:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} + b_x , \\ a_y &= \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + b_y , \end{aligned} \quad (6.65)$$

i podstawiamy je do trzeciego równania równowagi:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - k_x n_x - k_y n_y = - p_z - \frac{\partial b_x}{\partial x} - \frac{\partial b_y}{\partial y} . \quad (6.66)$$

Po uwzględnieniu równań fizycznych, związków (6.61) i (6.62) otrzymujemy:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla_k^2 F = p_z + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_x}{\partial x} + k_x \int p_x dx + k_y \int p_y dy . \quad (6.67)$$

Dochodzimy w ten sposób do dwóch równań (6.64) i (6.67), z których obliczamy funkcje w i F . Równania te są wzajemnie sprzężone poprzez operator:

$$\nabla_k^2 = k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2} . \quad (6.68)$$

W szczególnym przypadku braku obciążeń momentowych i równoległych do osi x, y :

$$b_x = b_y = 0 , \quad p_x = p_y = 0$$

wyprowadzone równania przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F - Eh \nabla_k^2 w &= 0, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla_k^2 F &= p_z. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Przy przejściu do płyty $k_\alpha \rightarrow 0$ skąd wynikają równania tarczy i płyty zginanej:

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0, \quad \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p_z}{D}. \quad (6.70)$$

Rozwiązanie równań powłok mało wyniosłych jest trudne na skutek istniejącego sprzężenia. Z tego względu obok metod przybliżonych stosuje się najczęściej metody numeryczne.

7. POWŁOKI BEZMOMENTOWE

7.1. W p r o w a d z e n i e , z a ł o ż e n i a , r ó w n a n i a

Ze względu na cienkościenność powłok powstają w nich duże naprężenia przy zginaniu. Z drugiej strony powłoki przenoszą znaczne obciążenia, jeśli wywołują one tylko stan bezmomentowy. W takim stanie rozkład naprężeń jest jednorodny wzdłuż grubości, co powoduje powstanie - tylko sił podłużnych n_1, n_2, n_{12} i odpowiadających im odkształceń powierzchni środkowej $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$.

Przykładem powłoki bezmomentowej stworzonej przez przyrodę jest łupina jajka, zdolna przenosić duże ciśnienia rozłożone wzdłuż powierzchni. Jednak lokalne obciążenie, zbliżone do siły skupionej, powoduje powstanie momentów zginających i w efekcie zniszczenie powłoki. Innym przykładem są różne błony, w których realizacją stanu bezmomentowego jest pojawienie się sił rozciągających.

Stan bezmomentowy jest najkorzystniejszy w powłokach, stąd dążenie dawnych budowniczych do jego realizacji w powłokach przekryć /sklepienia, kopuły/ czy też zbiorników. To co dawniej osiągnano przez doświadczenie i intuicję, usiłuje się teraz realizować świadomie przez spełnienie założeń stanu bezmomentowego:

1. Powierzchnia środkowa jest gładka /nie ma "załomów"/.
2. Obciążenie powierzchniowe jest ciągłe i gładkie /nie ma nieciągłości pochodnych obciążenia względem ξ_α /, a siły brzegowe działają stycznie do płaszczyzny środkowej.
3. Warunki brzegowe nie krępują przemieszczenia w normalnego do powierzchni środkowej i kąta obrotu normalnej φ_α .

Jako przykład inżynierskiej próby spełnienia warunków stanu bezmomentowego jest konstrukcja chłodni kominowej /rys.7.1/. Gładka powierzchnia hiperboloidy obrotowej jest poddana działaniu obciążeń rozłożonych /ciężar własny, parcie wiatru/. Warunki brzegowe są w przybliżeniu spełnione przez rząd słupów podporowych, umieszczonych stycznie do powierzchni środkowej.

Równania stanu bezmomentowego otrzymujemy z podstawowych równań zestawionych w p.6.7 przez założenie, że znikają wielkości odpowiadające zginaniu:

$$b_1 = b_2 = 0, \quad \bar{a}_n = 0, \quad \bar{m}_n = 0,$$

$$m_1 = m_2 = m_{12} = 0, \quad q_1 = q_2 = 0 \quad (7.1)$$

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \chi_{12} = 0.$$

Z wymienionych w p.6.7 równań pozostaje tylko 9 równań /równania ponad linią przerywaną/. Jeśli połączymy równania kinematyczne i fizyczne /z równań fizycznych obliczamy odkształcenia i podstawiamy je do równań kinematycznych/, to otrzymujemy następujące równania:

$$\frac{\partial(A_2 n_1)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial(A_1 n_{12})}{\partial \xi_2} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} n_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} n_2 + A_1 A_2 p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial(A_1 n_2)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial(A_2 n_{12})}{\partial \xi_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} n_{12} - \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} n_1 + A_1 A_2 p_2 = 0,$$

(7.2)

$$\frac{n_1}{R_1} + \frac{n_2}{R_2} - p_n = 0,$$

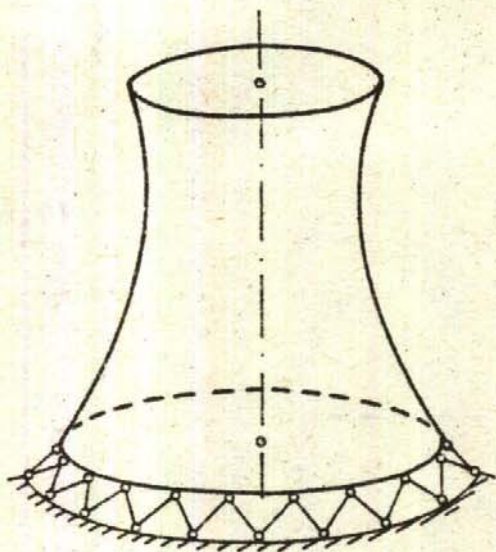
$$\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} (n_1 - \nu n_2),$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} (n_2 - \nu n_1), \quad (7.3)$$

$$\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} n_{12}.$$

Równania są rozdzielone w tym sensie, że w trzech równaniach równowagi (7.2) występują 3 niewiadome: siły podłużne n_1, n_2, n_{12} . Jeśli warunki brzegowe są podane w siłach, to wtedy mamy zadanie

statycznie wyznaczalne. Należy dodać, że w takim przypadku rozwiązania /rozkłady i wartości sił/ nie zależą od własności materiału /stałych sprężystości/.



Po obliczeniu sił podstawiamy je po prawej stronie równań (7.3) i obliczamy przemieszczenia, uwzględniając kinematyczne warunki podparcia /unieruchomienia/ powłoki.

Rys.7.1. Powłoka chłodni kominowej jako przykład dążenia do realizacji stanu bezmomentowego

7.2. Stan bezmomentowy powłok obrotowych

W powłokach obrotowych możemy rozdzielić zmienne tak, jak czyniliśmy w płytach kołowych w p.3.2 czy też w ogólnym przypadku w p.6.8. W stanie bezmomentowym wystąpią następujące wielkości i stosujemy oznaczenia:

$$\xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \theta, \quad a(\)/a \xi = (\)' \quad (7.4)$$

$$\underline{u} = \{u, v, w\}, \quad \underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma\},$$

$$\underline{\delta} = \{n_1, n_2, n_{12}\}.$$

Dalej przyjmujemy, że istnieje płaszczyzna symetrii obciążenia, skąd wynika możliwość rozwinięcia w szeregi trygonometryczne:

$$\begin{aligned} \cos: & \quad p_1, p_n, u, w, n_1, n_2, \\ \sin: & \quad p_2, v, n_{12}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Równania różniczkowe zwyczajne, z których obliczamy funkcje - współczynniki tych szeregów /pomijamy dla przejrzystości w tych wielkościach indeks j / mają postać:

$$\begin{aligned} (rn_1)' + jAn_{12} - r'n_2 + rAp_1 &= 0, \\ (rn_{12})' - jAn_2 + r'n_{12} + rAp_2 &= 0, \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\frac{n_1}{R_1} + \frac{n_2}{R_2} - p_n = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} u' + \frac{w}{R_1} &= \frac{1}{Eh} (n_1 - \nu n_2), \\ \frac{j}{r} v + \frac{r'}{rA} u + \frac{w}{R_2} &= \frac{1}{Eh} (n_2 - \nu n_1), \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\frac{r}{A} \left(\frac{v}{r} \right)' - \frac{j}{r} u = \frac{2(1+\nu)}{Eh} n_{12}.$$

7.3. Całkowanie równań równowagi w stanie obrotowo symetrycznym

Zajmiemy się przypadkami szczególnymi, rozpoczynając od stanu obrotowo symetrycznego. W tym stanie nie tylko parametry powłoki, ale też obciążenia i przemieszczenia, a stąd też pola odkształceń i naprężeń są niezależne od zmiennej obwodowej $\xi_2 = \theta$.

Pomijamy skręcanie powłoki. Z zerowaniem się składowej obciążenia $p_2 = 0$ wynika zerowanie się wielkości związanych w (7.5) z szeregiem \sin . Na razie przyjmijmy układ współrzędnych kulistych $\xi = \psi, A = R_1$, dzięki czemu równania równowagi (7.8) skracają się do postaci:

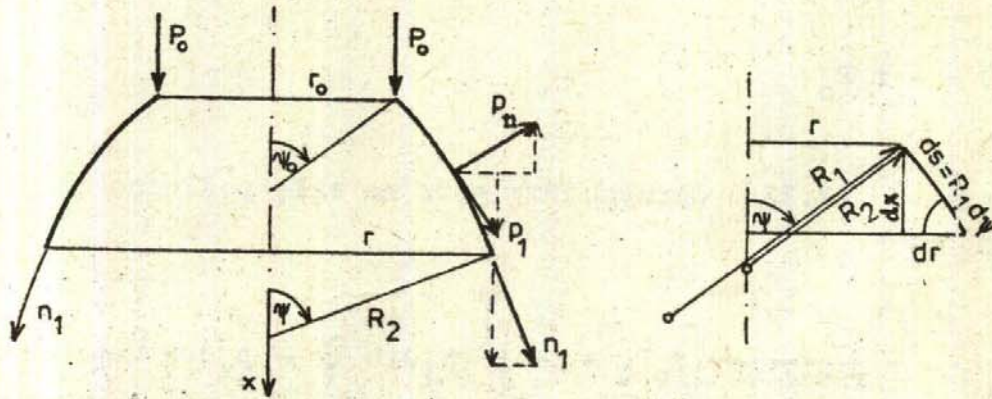
$$\begin{aligned} (rn_1)' - r'n_2 + rR_1p_1 &= 0, \\ \frac{n_1}{R_1} + \frac{n_2}{R_2} - p_n &= 0. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Najpierw obliczamy siłę obwodową n_2 z drugiego równania równowagi:

$$n_2 = -\frac{R_2}{R_1} n_1 + R_2 p_n \quad (7.10)$$

Uwzględniamy również zależności występujące w powłokach obrotowych /rys. 7.2/:

$$R_2 = \frac{r}{\sin \psi}, \quad r' = R_1 \cos \psi \quad (7.11)$$



Rys.7.2. Powłoka obrotowo-symetryczna

Podstawiamy te zależności do pierwszego równania równowagi:

$$(rn_1)' + R_1 \left(\frac{r}{R_1 \sin \psi} n_1 - \frac{r}{\sin \psi} p_n \right) \cos \psi + rR_1 p_1 = 0 \quad .$$

Równania mnożymy przez $\sin \psi$:

$$(rn_1)' \sin \psi + (rn_1) \cos \psi = - rR_1 \underbrace{(p_1 \sin \psi - p_n \cos \psi)}_{p_x} \quad .$$

Równanie to można napisać w postaci:

$$\frac{d}{d\psi} (rn_1 \sin \psi) = -rR_1 p_x, \quad (7.12)$$

łatwej do całkowania:

$$rn_1 \sin \psi = - \int p_x r R_1 d\psi + C. \quad (7.13)$$

Po wymnożeniu przez 2π lewa strona równania (7.13) przedstawia składową sumy sił wewnętrznych, równoległą do osi symetrii. Na podstawie takiej interpretacji możemy łatwo obliczyć stałą całkowania C :

$$C = -r_0 P_0 \quad (7.14)$$

i ostatecznie z (7.13) otrzymujemy wzór na siłę podłużną n_1 , a z (7.10) na n_2 :

$$n_1 = - \frac{1}{r \sin \psi} \left[r_0 P_0 + \int_{\psi_0}^{\psi} (p_1 \sin \tilde{\psi} - p_n \cos \tilde{\psi}) r R_1 d\tilde{\psi} \right],$$

$$n_2 = - \frac{r}{\sin \psi} \left(\frac{n_1}{R_1} - p_n \right). \quad (7.15)$$

Jeśli posługujemy się układem współrzędnych walcowych $/x, r, \theta/$, to można łatwo otrzymać odpowiednią postać wzorów (7.15), uwzględniając następujące związki:

$$d(\)/dx = (\)', \quad ds = A_1 dx = \sqrt{1 + r'^2} dx, \quad (7.16)$$

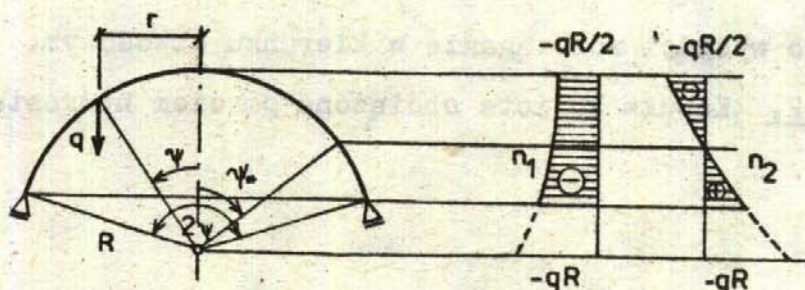
$$\sin \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + r'^2}}, \quad \cos \psi = \frac{r'}{\sqrt{1 + r'^2}}.$$

Po podstawieniu tych zależności do (7.15) otrzymujemy:

$$n_1 = - \frac{\sqrt{1+r'^2}}{r} \left[r_0 P_0 + \int_{x_0}^x (P_1 - P_n r') r dx \right],$$

$$n_2 = - r \sqrt{1+r'^2} \left(\frac{n_1}{R_1} - P_n \right).$$
(7.17)

Przykład 7.1. Kopuła kulista pod ciężarem własnym /rys.7.3/.



Rys.7.3. Siły podłużne w kopule kulistej pod ciężarem własnym

W rozpatrywanym przypadku przyjmujemy:

$$R_1 = R_2 = R, \quad r_0 = 0, \quad r = R \sin \psi,$$

$$P_0 = 0, \quad P_x = q, \quad P_n = -q \cos \psi,$$

co po podstawieniu do wzorów (7.15) daje:

$$n_1 = - \frac{qR}{\sin^2 \psi} \int_0^\psi \sin \tilde{\psi} d\tilde{\psi} = - qR \frac{1 - \cos \psi}{1 - \cos^2 \psi} = - \frac{qR}{1 + \cos \psi},$$

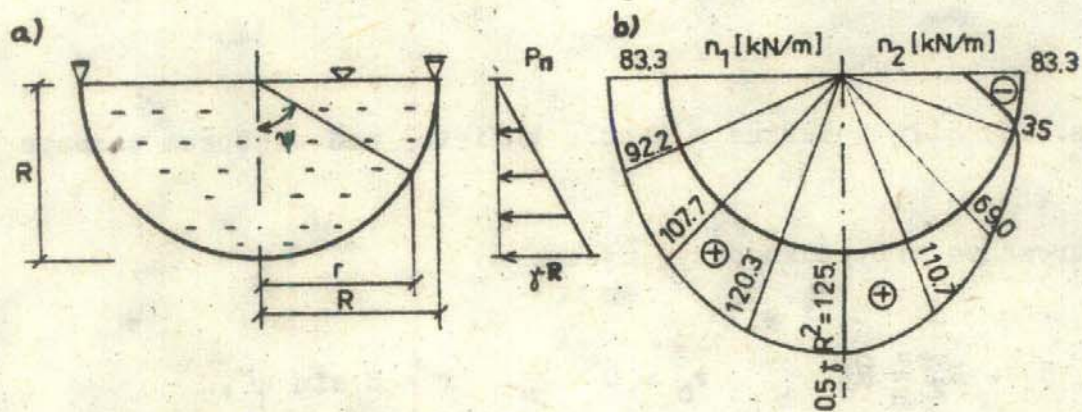
$$n_2 = -qR \left(-\frac{1}{1 + \cos \psi} + \cos \psi \right) = -qR \frac{\cos \psi - \sin^2 \psi}{1 + \cos \psi} .$$

Na rys.7.3 pokazano wykres ściskającej siły południowej n_1 , która monotonicznie maleje /rośnie jej moduł/. Inny jest wykres siły obwodowej n_2 . Z zerowania się licznika obliczamy wartość kąta ψ_* :

$$\cos \psi - \sin^2 \psi = 0 \longrightarrow \psi_* = 51^\circ 49' ,$$

powyżej którego wystąpi rozciąganie w kierunku obwodowym.

Przykład 7.2. Kupa kulista obciążona parciem hydrostatycznym /rys. 7.4/.



Rys.7.4. Siły podłużne w kopule kulistej wypełnionej cieczą

Parcie hydrostatyczne wywołuje obciążenie powierzchniowe:

$$P_n = \gamma R^2 \cos \psi, \quad P_1 = P_2 = 0, \quad P_0 = 0 .$$

Zależności geometryczne potrzebne do wzoru (7.15) wynoszą w przypadku kopuły kulistej odpowiednio:

$$r = R \sin \psi, \quad R_{1i} = R_2 = R, \quad r' = R \cos \psi .$$

Zgodnie ze wzorami (7.15)₁ otrzymujemy następujące wyrażenie na siłę południkową:

$$\begin{aligned} n_1(\psi) &= - \frac{1}{R \sin \psi \sin \psi} \int [- (\gamma R \cos \tilde{\psi}) \cos \tilde{\psi} (R \sin \tilde{\psi})] r d\tilde{\psi} = \\ &= \frac{1}{R \sin^2 \psi} \int [- \gamma R^3 \cos^2 \tilde{\psi} (-\sin \tilde{\psi})] d\psi = \frac{\gamma R^2}{\sin \psi} \left[\frac{\cos^3 \psi}{3} + C \right]. \end{aligned}$$

Z uwagi na występujący w mianowniku $\sin \psi \rightarrow 0$ dla $\psi \rightarrow 0$, przyjmujemy w ten sposób stałą całkowania C , aby $[] = 0$, dla $\psi = 0$:

$$\left[\frac{\cos^3}{3} + C \right] = 0 \rightarrow C = -1/3.$$

Dodatkowe przekształcenia trygonometryczne pozwolą wyrugować $\sin \psi$ z mianownika:

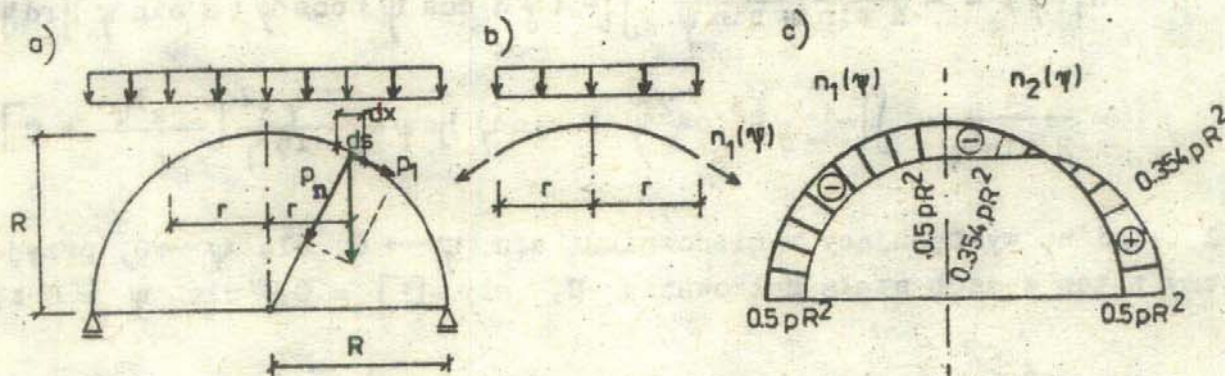
$$\begin{aligned} n_1(\psi) &= - \frac{\gamma R^2}{3 \sin^2 \psi} [\cos^3 \psi - 1] = \\ &= - \frac{\gamma R^2}{3} \left[\frac{1 - \cos^2 \psi + \cos^2 \psi - \cos^3 \psi}{1 - \cos^2 \psi} \right] = \\ &= - \frac{\gamma R^2}{3} \frac{(1 - \cos \psi)(1 + \cos \psi + \cos^2 \psi)}{(1 - \cos \psi)(1 + \cos \psi)} = \\ &= - \frac{\gamma R^2}{3} \left[\frac{1}{1 + \cos \psi} + \cos \psi \right]. \end{aligned}$$

Zgodnie ze wzorem (7.10) siły równoleżnikowe wynoszą:

$$\begin{aligned} n_2(\psi) &= - n_1(\psi) + R \cdot p_n = - \frac{\gamma R^2}{3} \left[\frac{1}{1 + \cos \psi} + \cos \psi \right] + \\ &+ R^2 \gamma \cos \psi = \frac{\gamma R^2}{3} \left[2 \cos \psi - \frac{1}{1 + \cos \psi} \right]. \end{aligned}$$

Rozkład sił południkowych i równoleżnikowych podano na rys. 7.4b, przyjmując $\gamma = 10 \text{ kN/m}^2$, $R = 5 \text{ m}$.

Przykład 7.3. Powłoka kulista obciążona śniegiem /rys.7.5/.



Rys.7.5. Siły podłużne w kopule kulistej obciążonej śniegiem

Ciężar śniegu przyjmowany jest jako obciążenie pionowe, równomiernie rozłożone na jednostkę rzutu powierzchni powłoki, stąd składowe obciążenia powierzchniowe, odpowiednio styczne i normalne do elementu południka ds wynoszą $p_t = p \sin \psi \cos \psi$ i $p_n = -p \cos^2 \psi$.

Siły południkowe zostaną obliczone dwukrotnie, z wykorzystaniem wzoru (7.15) i wprost z warunku równowagi sił działających na fragment powłoki opisany na rys.7.5b:

$$\begin{aligned}
 n_1(\psi) &= -\frac{1}{R \sin^2 \psi} \int_0^{\psi} (p \sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\psi} + \\
 &+ p \cos^2 \tilde{\psi} \cos \tilde{\psi}) R \sin \tilde{\psi} R d\tilde{\psi} = -\frac{Rp}{\sin^2 \psi} \int_0^{\psi} \sin \tilde{\psi} \cos \tilde{\psi} d\tilde{\psi} = \\
 &= -\frac{Rp}{\sin^2 \psi} \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \psi = -0,5 pR .
 \end{aligned}$$

Warunek równowagi sił równoległych do osi symetrii ma postać:

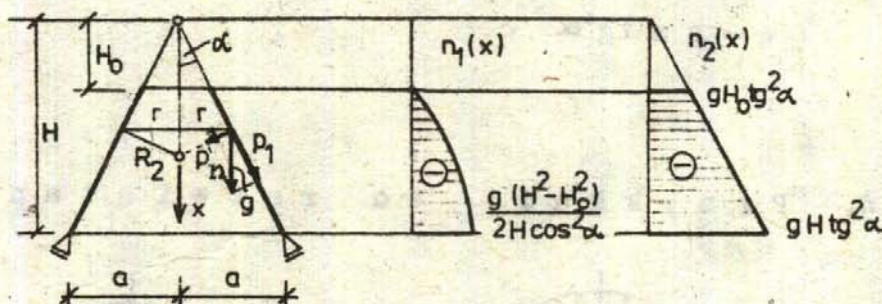
$$\pi r^2 p + 2\pi r n_1(\psi) \cdot \sin \psi = 0 \rightarrow n_1(\psi) = -\frac{p \cdot r}{2 \sin \psi} = -0,5 pR.$$

Siły równoleżnikowe będą się zmieniały wzdłuż południka zgodnie z zależnością:

$$n_2(\psi) = -n_1(\psi) + R \cdot p_n = \frac{pR}{2} - pR \cos^2 \psi$$

w przedziale $[-0,5 pR, 0,5 pR]$ /rys.7.5c/.

Przykład 7.4. Powłoka stożkowa, otwarta, obciążona ciężarem własnym /rys.7.6/.



Rys.7.6. Otwarta powłoka stożkowa pod ciężarem własnym

Aby można było skorzystać z równań (7.17) obowiązujących w układzie współrzędnych walcowych, zapiszemy równanie poboczniczy stożka i inne zależności geometryczne:

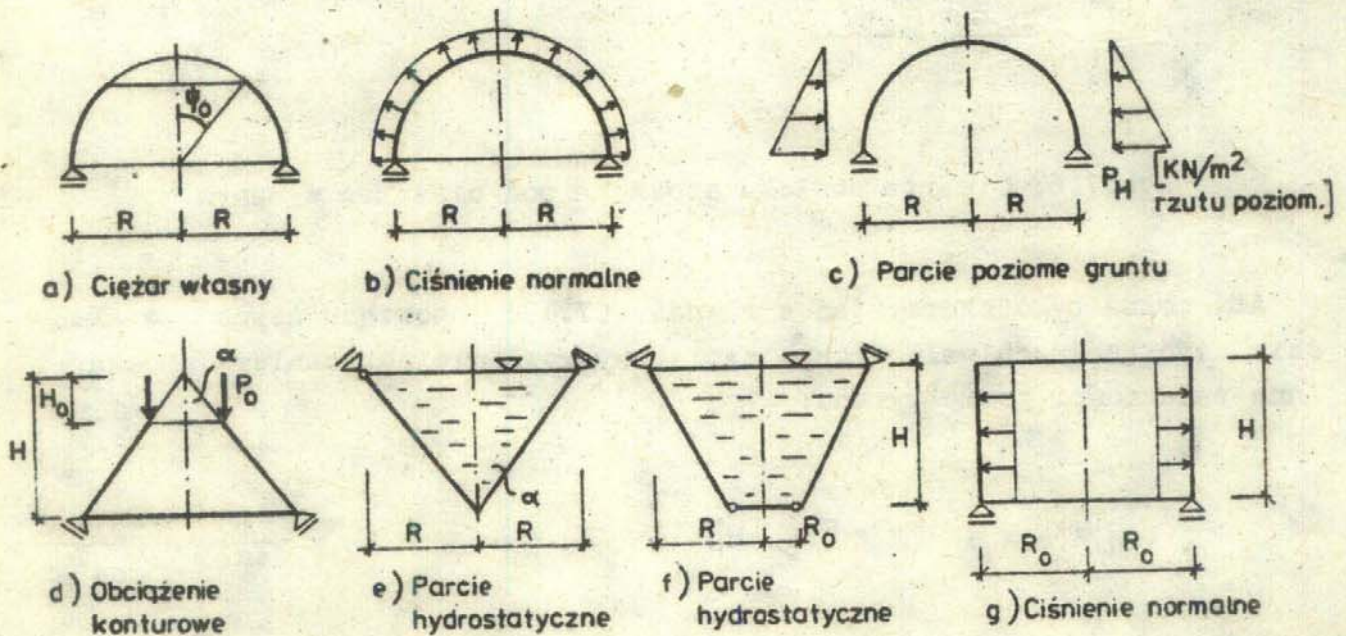
$$r = x \operatorname{tg} \alpha, \quad x \in [H_0, H], \quad R_1 = \infty, \quad R_2 = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{x \sin \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

$$p_1 = g \cos \alpha, \quad p_n = -g \sin \alpha, \quad r' = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{r}{\sqrt{1 + r'^2}} = x \sin \alpha.$$

Siły południkowe i równoleżnikowe wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned}
 n_1(x) &= - \frac{\sqrt{1+r'^2}}{r} \int_{x_0}^x (p_1 - p_n r') r dx = \\
 &= - \frac{1}{x \sin \alpha} \int_{x_0}^x (g \cos \alpha + g \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha) \cdot x \operatorname{tg} \alpha \cdot dx = \\
 &= - \frac{R}{x \cos^2 \alpha} \int_{x_0}^x x dx = - \frac{g(x^2 - H_0^2)}{2 x \cos^2 \alpha} , \\
 n_2(x) &= - r \sqrt{1+r'^2} \left(\frac{n_1}{R_1} - p_n \right) = - \frac{r}{\cos \alpha} (g \sin \alpha) = \\
 &= - g x \operatorname{tg}^2 \alpha .
 \end{aligned}$$

7.4. Przykłady do rozwiązania



Rys.7.7. Rysunki do zadań

1. Znaleźć rozkłady sił południkowych i równoleżnikowych w powłokach jak na rysunkach 7.7.

2. Zapoznać się z kształtowaniem powłok o stałej wytrzymałości [15] - str.399.

7.5. Całkowanie równań równowagi kopuł kulistych

Równania równowagi powłok obrotowych można łatwo całkować tylko w szczególnych przypadkach. Pokażemy to na przykładzie kopuły kulistej.

Po podstawieniu wzoru na siłę n_2 , określonego przez (7.10) oraz wykorzystanie zależności (7.11)₂, dwa pierwsze równania równowagi możemy przekształcić do postaci:

$$n_1' + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) n_1 \operatorname{ctg} \psi + \frac{jR_1}{R_2 \sin \psi} n_{12} = -R_1 (p_1 - p_n \operatorname{ctg} \psi), \quad (7.18)$$

$$n_{12}' + 2 \frac{R_1}{R_2} n_{12} \operatorname{ctg} \psi + \frac{j}{\sin \psi} n_1 = -R_1 \left(p_2 - \frac{j}{\sin \psi} p_n\right),$$

gdzie zmienną niezależną jest $\xi = \psi$, a więc $d(\)/d\psi = (\)'$.

W powłoce kulistej mamy:

$$R_1 = R_2 = R, \quad (7.19)$$

co upraszcza równania (7.18):

$$n_1' + 2 \operatorname{ctg} \psi \cdot n_1 + \frac{j}{\sin \psi} n_{12} = -R (p_1 - \operatorname{ctg} \psi \cdot p_n), \quad (7.20)$$

$$n_{12}' + 2 \operatorname{ctg} \psi \cdot n_{12} + \frac{j}{\sin \psi} n_1 = -R \left(p_2 - \frac{j}{\sin \psi} p_n\right).$$

Po dodaniu, a następnie odjęciu stronami równania (7.20) przekształcamy do postaci rozprężonej:

$$U_j' + \left(2 \operatorname{ctg} \psi + \frac{j}{\sin \psi}\right) U_j = -R \left(p_1 + p_2 - \frac{j + \cos \psi}{\sin \psi} p_n\right), \quad (7.21)$$

$$V_j' + \left(2 \operatorname{ctg} \psi - \frac{j}{\sin \psi}\right) V_j = -R \left(p_1 - p_2 + \frac{j - \cos \psi}{\sin \psi} p_n\right),$$

gdzie nowe zmienne wynoszą:

$$U_j = n_1^j + n_{12}^j, \quad V_j = n_1^j - n_{12}^j. \quad (7.22)$$

Równania (7.21) można określić jako równania liniowe o zmiennych współczynnikach typu:

$$y' + p(\psi) y + q(\psi) = 0.$$

Całką takiego równania jest funkcja /por. [9] / :

$$y = \left[C - \int q \cdot \exp \left(\int p d\psi \right) d\psi \right] \exp \left(- \int p d\psi \right)$$

Po podstawieniu funkcji $p(\psi)$ i $q(\psi)$ z równań (7.21) i odpowiednich przekształceniach otrzymujemy rozwiązanie:

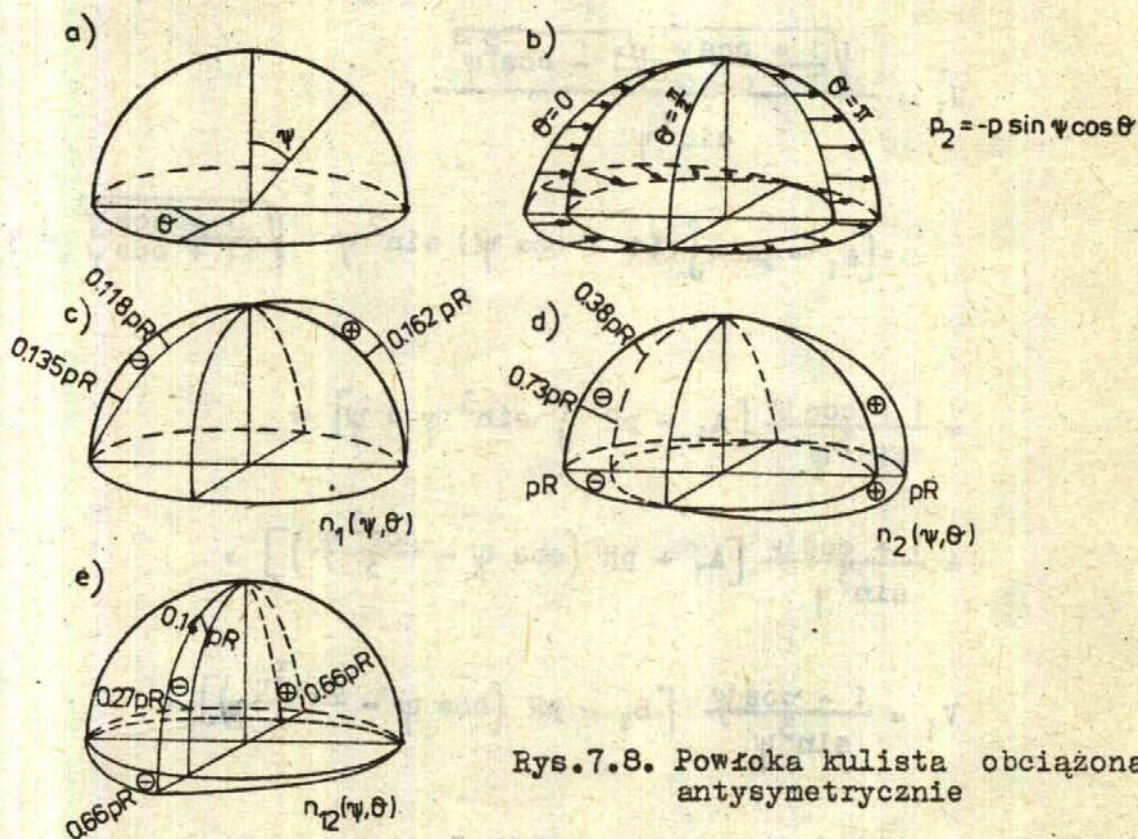
$$U_j = \frac{\operatorname{ctg}^j(\psi/2)}{\sin^2 \psi} \left[A_j - R \int \left(p_1^j + p_2^j - \frac{j + \cos \psi}{\sin \psi} p_n^j \right) \sin^2 \psi \operatorname{tg}^j \frac{\psi}{2} d\psi \right],$$

$$V_j = \frac{\operatorname{tg}^j(\psi/2)}{\sin^2 \psi} \left[B_j - R \int \left(p_1^j - p_2^j + \frac{j - \cos \psi}{\sin \psi} p_n^j \right) \sin^2 \psi \operatorname{ctg}^j \frac{\psi}{2} d\psi \right],$$

gdzie A_j i B_j są stałymi całkowania. Ze wzorów (7.22) obliczamy siły:

$$n_1^j = \frac{1}{2} (U_j + V_j), \quad n_{12}^j = \frac{1}{2} (U_j - V_j). \quad (7.24)$$

Przykład 7.5. Powłoka kulista obciążona antysymetrycznie /rys.7.8/.



Rys.7.8. Powłoka kulista obciążona antysymetrycznie

Przyjmujemy obciążenie, które z grubym przybliżeniem odpowiada działaniu wiatru:

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_n = -p \sin \psi \cos \theta,$$

gdzie $p = \text{const}$. Obciążenie jest ograniczone do jednego wyrazu szeregu cosinusowego o współczynniku:

$$p_n^1 = -p \sin \psi.$$

Po podstawieniu podanych funkcji obciążeń do wzorów (7.23) i uwzględnieniu zależności:

$$\text{tg } \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \psi}{1 + \cos \psi}},$$

dochodzimy do wzorów:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{\sqrt{\frac{1 + \cos \psi}{1 - \cos \psi}} \sqrt{1 - \cos^2 \psi}}{\sin^3 \psi} \cdot \left[A_1 - pR \int (1 + \cos \psi) \sin^2 \psi \sqrt{\frac{1 - \cos \psi}{1 + \cos \psi}} d\psi \right] = \\
 &= \frac{1 + \cos \psi}{\sin^3 \psi} \left[A_1 - pR \int \sin^3 \psi d\psi \right] = \\
 &= \frac{1 + \cos \psi}{\sin^3 \psi} \left[A_1 + pR \left(\cos \psi - \frac{\cos^3 \psi}{3} \right) \right], \\
 V_1 &= \frac{1 - \cos \psi}{\sin^3 \psi} \left[B_1 - pR \left(\cos \psi - \frac{\cos^3 \psi}{3} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Ze wzorów (7.24) obliczamy siły:

$$\begin{aligned}
 n_1^1 &= \frac{1}{2} (U_1 + V_1) = \\
 &= \frac{\cos \theta}{2 \sin^3 \psi} \left[(A_1 + B_1) + (A_1 - B_1) \cos \psi + \right. \\
 &\quad \left. + 2pR \cos \psi \left(\cos \psi - \frac{\cos^3 \psi}{3} \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_{12}^1 &= \frac{1}{2} (U_1 - V_1) = \\
 &= \frac{\sin \theta}{2 \sin^3 \psi} \left[(A_1 - B_1) + (A_1 + B_1) \cos \psi + \right. \\
 &\quad \left. + 2pR \left(\cos \psi - \frac{\cos^3 \psi}{3} \right) \right].
 \end{aligned}$$

W tych zależnościach ze względu na mnożnik $1/\sin^3\psi$ wartości w nawiasach kwadratowych i ich pochodne aż do drugiej włącznie muszą być równe zero dla $\psi = 0$. W takim przypadku siły $n_1^1(0)$, $n_{12}^1(0)$ osiągną wartości ograniczone.

Zajmiemy się obliczaniem stałych A_1 , B_1 na podstawie analizy licznika wzoru na n_1^1 :

$$[] = (A_1 + B_1) + (A_1 - B_1) \cos \psi + 2pR \left(\cos^2 \psi - \frac{\cos^4 \psi}{3} \right),$$

$$\frac{d}{d\psi} [] = -(A_1 - B_1) \sin \psi - 2pR \sin \psi \left(2 \cos \psi - \frac{4}{3} \cos^3 \psi \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\psi^2} [] &= -(A_1 - B_1) \cos \psi - 2pR \cos \psi \left(2 \cos \psi - \frac{4}{3} \cos^3 \psi \right) + \\ &+ 2pR \sin^2 \psi (1 - 4 \cos^2 \psi) . \end{aligned}$$

Po przyrównaniu do zera otrzymujemy:

$$[]_{\psi=0} = 0 \rightarrow A_1 = -\frac{2}{3} pR ,$$

$$\frac{d}{d\psi} []_{\psi=0} = 0 ,$$

$$\frac{d^2}{d\psi^2} []_{\psi=0} = 0 \rightarrow B_1 = \frac{2}{3} pR .$$

Po podstawieniu stałych dochodzimy do następujących wzorów na siły podłużne :

$$n_1 = -\frac{pR}{3\sin^3\psi} [2 \cos \psi - 3 \cos^2 \psi + \cos^4 \psi] \cos \theta ,$$

$$n_{12} = -\frac{pR}{3\sin^3\psi} [2 - 3 \cos \psi + \cos^3 \psi] \sin \theta ,$$

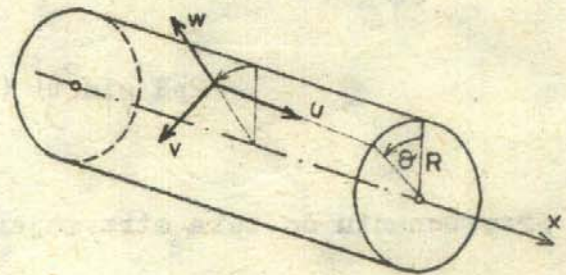
$$n_2 = R p_n - n_1 =$$

$$= - \frac{pR}{3 \sin^3 \psi} [3 \sin^4 \psi - \cos^4 \psi - 2 \cos \psi + 3 \cos^2 \psi] \cos \theta.$$

Na rys.7.8 pokazano wykresy sił dla półkuli.

7.6. Pełne rozwiązanie dla zamkniętej powłoki walcowej

Zajmiemy się powłoką walcową o przekroju kołowym /rys.7.9/. Zmienną niezależną $\xi = x$ odmierzamy wzdłuż /dokładniej równoległe do/ tworzącej. Ponieważ ta linia głównej krzywizny jest prostą, to współczynnik Lamégo $\Lambda = 1$. Równania (7.6 - 7.7) znacznie się upraszczają, gdyż dodatkowo $r = R_2 = R = \text{const.}$, a więc $r' = 0$:



Rys.7.9. Zamknięta powłoka walcowa o przekroju kołowym

$$n_1' + j \frac{n_{12}}{R} + p_1 = 0,$$

$$n_{12}' - j \frac{n_2}{R} + p_2 = 0, \quad (7.25)$$

$$\frac{n_2}{R} - p_n = 0,$$

$$u' = \frac{1}{Eh} (n_1 - \nu n_2),$$

$$jv + w = \frac{R}{Eh} (n_2 - \nu n_1), \quad (7.26)$$

$$v' - j \frac{u}{R} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} n_{12} \quad (7.26)$$

Podobnie jak w poprzednich punktach, obliczamy najpierw siłę obwodową:

$$n_2 = R p_n \quad (7.27)$$

i podstawiamy ją do drugiego równania równowagi:

$$n_{12}' = j p_n - p_2 \quad .$$

Równanie to możemy łatwo całkować:

$$n_{12} = \int (j p_n - p_2) + C_1 \quad (7.28)$$

Po podstawieniu tego rozwiązania do pierwszego równania równowagi otrzymujemy:

$$n_1 = - \int p_1 dx - \frac{1}{R} \int \left[\int (j p_n - p_2) dx \right] dx - \frac{1}{R} C_1 x + C_2 \quad (7.29)$$

Po obliczeniu sił podłużnych podstawiamy je po prawej stronie pierwszego i trzeciego równania kinematycznego:

$$u' = \frac{1}{Eh} (n_1 - \nu n_2),$$

$$v' = j \frac{u}{R} + \frac{2(1+\nu)}{Eh} n_{12} \quad .$$

Po podstawieniu funkcji (7.27-29) otrzymujemy rozwiązanie dla przemieszczeń u i v , a z drugiego równania kinematycznego (7.26)₂ obliczamy ugięcie w :

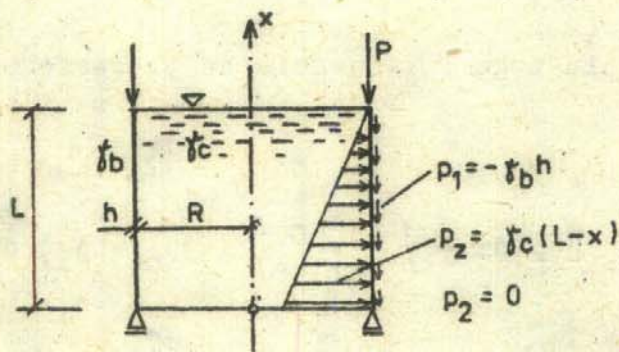
$$u = \frac{1}{Eh} \int (n_1 - \nu n_2) dx + C_3,$$

$$v = \frac{j}{R} \int u dx + \frac{2(1+\nu)}{Eh} \int n_{12} dx + C_4, \quad (7.30)$$

$$w = -jv + \frac{R}{Eh} (n_2 - \nu n_1).$$

Stałe całkowania obliczamy z czterech warunków brzegowych, które można sformułować na dwóch brzegach dla przemieszczeń u , v oraz sił n_1 , n_{12} .

Przykład 7.6 Zbiornik na ciecz o ciężarze objętościowym γ_c wykonany z materiału o ciężarze γ_b , obciążony nadbudową o ciężarze P /rys.7.10/.



Rys.7.10. Zbiornik walcowy

Zakładamy, że spełnione są warunki stanu obrotowo-symetrycznego, tzn. $j = 0$. Jeśli nie ma obciążenia obwodowego to stąd wynika:

$$p_2 = 0 \rightarrow n_{12} = 0, \quad v = 0.$$

Ze wzoru (7.27) obliczamy:

$$n_2 = \gamma_c R (L - x), \quad (7.31)$$

co po podstawieniu do (7.29) daje:

$$n_1 = \gamma_b hx + C_2 .$$

Z warunku brzegowego obliczamy stałą całkowania:

$$n_1 (L) = -P \rightarrow C_2 = -P - \gamma_b hL ,$$

a więc siłę podłużną n_1 określa wzór:

$$n_1 = -P - \gamma_b h (L - x) . \quad (7.32)$$

Przemieszczenie u obliczamy z (7.30)₁ :

$$u = -\frac{1}{Eh} \left[Px + (\gamma_b h + \nu \gamma_c R) \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \right] + C_3 .$$

Z warunku brzegowego wynika:

$$u(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0 .$$

Dochodzimy w ten sposób do wzorów na przemieszczenia u i w :

$$u = -\frac{1}{Eh} \left[Px + (\gamma_b h + \nu \gamma_c R) \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) \right],$$

$$w = \frac{R}{Eh} \left[(\gamma_c R + \nu \gamma_b h) (L - x) + \nu P \right] .$$

(7.33)

Maksymalne wartości tych przemieszczeń wynoszą:

$$u_{\max} = u(L) = -\frac{L}{Eh} \left[P + \frac{L}{2} (\gamma_b h + \nu \gamma_c R) \right],$$

$$w_{\max} = w(0) = \frac{R}{Eh} \left[(\gamma_c R + \nu \gamma_b h) L + \nu P \right].$$

7.7. Analiza powłok bezmomentowych we współrzędnych kartezjańskich

Rozpatrujemy powierzchnię środkową określoną równaniem

$$z = z(x, y) \in C^2, \quad (7.34)$$

zakładając, że jest to funkcja dwukrotnie różniczkowana. Element powierzchni o polu $d\Omega$ powstaje przez przekrój powierzchni środkowej płaszczyznami równoległymi do (z, x) i (z, y) , jak pokazano na rys.7.11. Krawędziami przecięcia powierzchni z tymi płaszczyznami są linie ξ, η , na ogół nieortogonalne. Linie te /dokładniej styczne do tych linii w punkcie 0/ są nachylone do osi x, y pod kątami α i β , dla których możemy obliczyć:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial z}{\partial x} \equiv z_{,x}, \quad \operatorname{tg} \beta = z_{,y}, \quad (7.35)$$

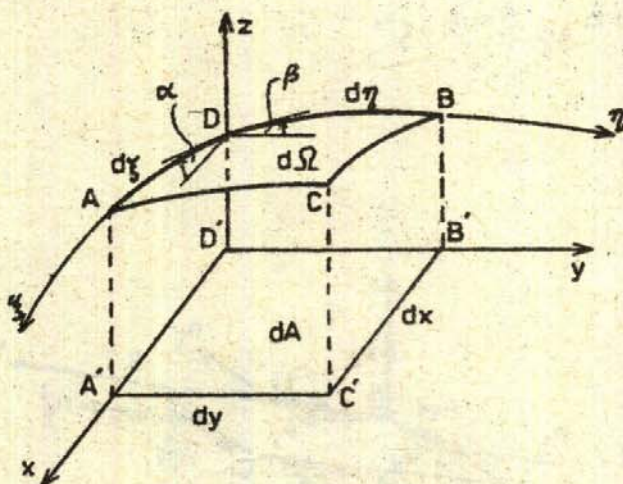
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + z_{,x}^2}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + z_{,y}^2}}.$$

Dla elementu powierzchni $OABC$ i jego rzutu $O'A'B'C'$ zachodzą zależności:

$$dx = \cos \alpha \cdot d\xi, \quad dy = \cos \beta \cdot d\eta, \quad (7.36)$$

$$d\Omega = \sqrt{1 + z_{,x}^2 + z_{,y}^2} dx dy = a dA.$$

Podanymi zależnościami możemy się posługiwać w przypadku, gdy istnieje jednoznaczność odwzorowania powierzchni środkowej na płaszczyźnie (x, y) , tzn. dla $z_{,x} \neq \infty$ i $z_{,y} \neq \infty$.



Rys.7.11. Element i rzut powierzchni środkowej

Dalsze rozważania odnoszą się do rzutu. Dlatego zamiast intensywności obciążeń p_x, p_y, p_z odnoszących się do pola $d\Omega$ przyjmujemy dalej obciążenia powierzchniowe:

$$\xi_i = a p_i \quad \text{dla} \quad i = x, y, z, \quad (7.37)$$

a zamiast sił podłużnych $n_\xi, n_\eta, n_{\xi\eta} = n_{\eta\xi}$ siły n_x, n_y, n_{xy} na płaszczyźnie (x, y) . Dla uproszczenia na rys.7.12 boki elementu powierzchniowego $d\Omega$ zostały wyprostowane. Podano tylko intensywności obciążeń i sił przekrojowych.

Zależności między siłami i ich rzutami wynikają ze związków:

$$n_x dy = n_\xi d\eta \cos \alpha, \quad n_{xy} dy = n_{\xi\eta} d\eta \cos \beta,$$

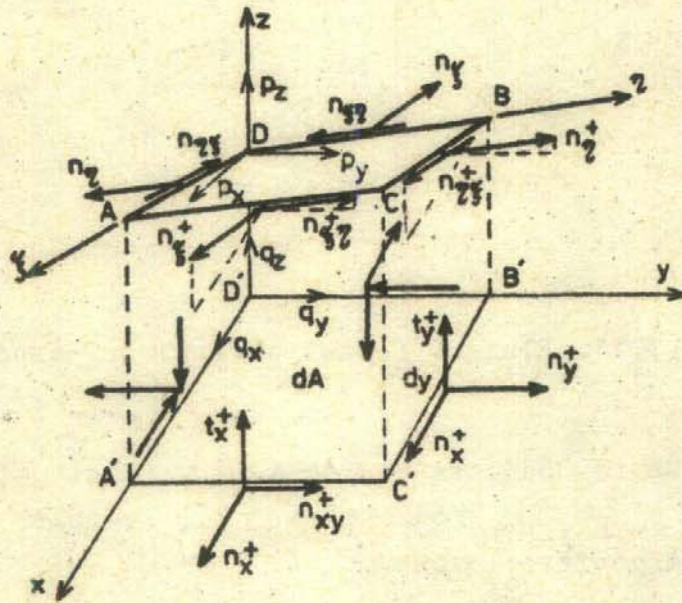
$$n_y dx = n_\eta d\xi \cos \beta, \quad n_{yx} dx = n_{\eta\xi} d\xi \cos \alpha,$$

skąd wynikają równości:

$$n_x = n_\xi \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}, \quad n_y = n_\eta \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

(7.38)

$$n_{xy} = n_{yx} = n_{\xi\eta} = n_{\eta\xi}.$$



Rys.7.12. Obciążenia elementu powierzchniowego

Dodatkowo należy uwzględnić składowe t_x, t_y równoległe do osi z :

$$t_x = n_x \operatorname{tg} \alpha + n_{xy} \operatorname{tg} \beta, \quad t_y = n_y \operatorname{tg} \beta + n_{yx} \operatorname{tg} \alpha. \quad (7.39)$$

Siły działające na poszczególnych bokach rzutu wynoszą:

$$O'B': -n_x dy \quad -n_{xy} dy, \quad -t_x dy$$

$$B'C': \left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx \right) dy, \quad \left(n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} dx \right) dy, \\ \left(t_x + \frac{\partial t_x}{\partial x} dx \right) dy,$$

$$O'B': -n_y dx, \quad -n_{yx} dx, \quad -t_y dx,$$

$$A'C': \left(n_y + \frac{\partial n_y}{\partial y} dy \right) dx, \quad \left(n_{yx} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} dy \right) dx, \\ \left(t_y + \frac{\partial t_y}{\partial y} dy \right) dx.$$

Warunki równowagi sił równoległych do osi x , y mają postać:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} + \varepsilon_x = 0,$$

(7.40a)

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + \varepsilon_y = 0.$$

Rzutując siły na kierunek osi z otrzymujemy:

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + \varepsilon_z = 0,$$

a po podstawieniu (7.39):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(n_x \frac{\partial z}{\partial x} + n_{xy} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(n_{yx} \frac{\partial z}{\partial x} + n_y \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \varepsilon_z = \\ = n_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (n_{xy} + n_{yx}) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} \right) \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon_z = 0 .$$

Po uwzględnieniu (7.40a) otrzymujemy trzecie równanie równowagi:

$$n_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + g = 0 , \quad (7.40b)$$

gdzie intensywność obciążenia g jest obliczona wzorem

$$g = \varepsilon_z - \varepsilon_x \frac{\partial z}{\partial x} - \varepsilon_y \frac{\partial z}{\partial y} . \quad (7.41)$$

Równania (7.40a) są spełnione tożsamościowo, jeśli posłużymy się funkcją naprężeń /tak jak w płaskim stanie naprężeń/:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int \varepsilon_x dx , \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int \varepsilon_y dy , \quad n_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} . \quad (7.42)$$

Po podstawieniu (7.42) do (7.40b) otrzymujemy równanie różniczkowe /nazywane równaniem Puchera [1] /dla wyznaczenia funkcji naprężeń/:

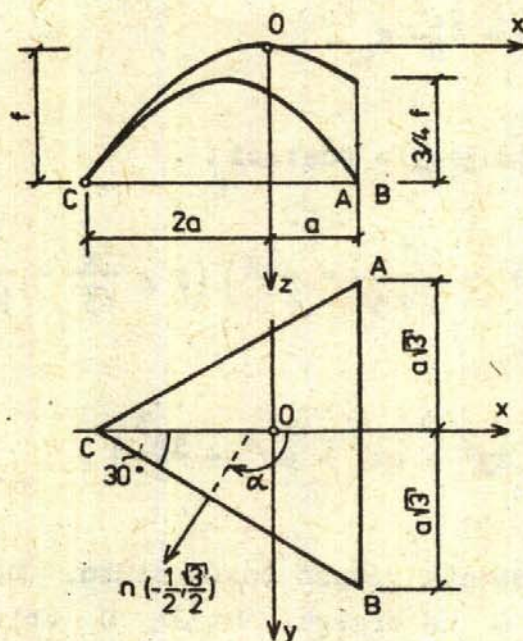
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + G = 0 , \quad (7.43)$$

gdzie funkcja obciążenia G wynosi:

$$G = \varepsilon_z - \varepsilon_x \frac{\partial z}{\partial x} - \varepsilon_y \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \int \varepsilon_x dx - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \int \varepsilon_y dy . \quad (7.44)$$

Przytoczone równania odnoszą się do powłok o różnym kształcie rzutu. Jeśli linia brzegu nie jest równoległa do linii współrzędnych $x = \text{const.}$ lub $y = \text{const.}$ to warunki podparcia formułujemy dla siły normalnej n_n i stycznej n_{ns} , korzystając ze wzorów (2.37a).

Przykład 7.7 Powłoka o kształcie paraboloidy obrotowej na rzucie trójkąta równobocznego, obciążenie pionowe równomierne /rys.7.13/.



Rys.7.13. Paraboloida obrotowa na rzucie trójkąta równoramiennego

Równanie powierzchni środkowej ma postać:

$$z = \frac{f}{4a^2} (x^2 + y^2), \quad (7.45)$$

skąd wynika :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{f}{2a^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

Przyjmujemy, że powłoka jest poddana działaniu tylko obciążenia o składowej ξ_z :

$$\xi_x = \xi_y = 0, \quad G = \xi_z = \xi_0 = \text{const.}$$

Dla rozpatrywanego przypadku równanie (7.43) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{2a^2}{h} \xi_0. \quad (7.46)$$

Funkcję naprężeń przyjmujemy w postaci:

$$\begin{aligned} F &= C \left(a - x \right) \left(y - \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2a}{\sqrt{3}} \right) \left(y + \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2a}{\sqrt{3}} \right) = \\ &= C \left(\frac{x^3}{3} - xy^2 + ax^2 + ay^2 - \frac{4a^3}{3} \right), \end{aligned} \quad (7.47)$$

która powstaje z wymnożenia równań boków rzutu. Daje to zerową wartość funkcji naprężeń $F = 0$ na brzegu. Stałą C obliczamy tak, aby było spełnione równanie (7.46). Po obliczeniu drugich pochodnych otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= C(2x + 2a) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= C(-2x + 2a) \end{aligned} \right\} \rightarrow C = -\frac{a}{2F} \xi_0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2Cy.$$

Tak więc naprężenia w powłoce wynoszą:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{ag_0}{l}(a-x),$$

$$n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{ag_0}{l}(a+x),$$

$$n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{ag_0}{l}y.$$

Naprężenia wzdłuż brzegów rzutu obliczamy dla boków trójkąta:

AB: $x = a$

$$n_x = 0, \quad n_y = -\frac{2a^2 g_0}{l}, \quad n_{xy} = -\frac{ag_0}{l}y,$$

BC: $y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2a}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = 120^\circ$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$n_n = -\frac{ag_0}{l} \left[(a-x) \frac{1}{4} + (a+x) \frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2a) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} n_{ns} &= -\frac{ag_0}{l} \left[\frac{1}{2}(a+x-a+x) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2a) \left(-\frac{1}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{ag_0}{\sqrt{3}l} (2x+a), \end{aligned}$$

AC: $y = -\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2a}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = 240^\circ$

$$\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$n_n = -\frac{ag_0}{f} \left[(a-x) \frac{1}{4} + (a+x) \frac{3}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}} (x+2a) \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 0,$$

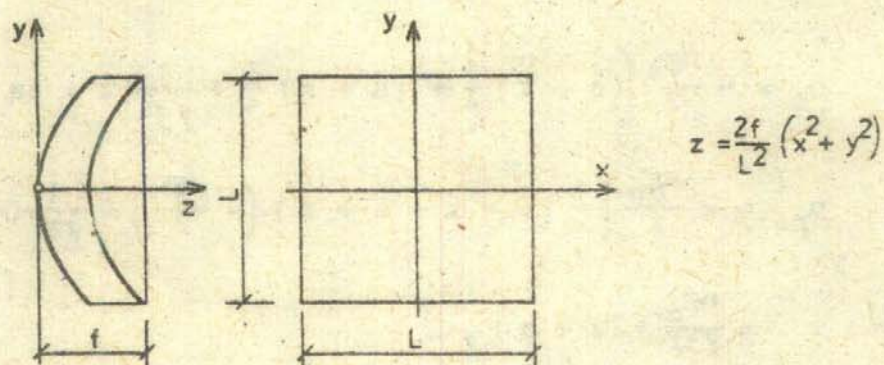
$$\begin{aligned} n_{ns} &= -\frac{ag_0}{f} \left[\frac{1}{2} (a+x - a+x) \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} (x+2a) \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= -\frac{ag_0}{\sqrt{3}f} (2x+a). \end{aligned}$$

Z obliczonych naprężeń wynika, że funkcja naprężeń (7.47) spełnia warunek brzegowy $n_n = 0$. Odpowiada to podparciu brzegu przez przepo-
nę, która nie przenosi obciążeń poprzecznych, ale przenosi obciążenia
styczne $n_{ns} \neq 0$.

Szereg dalszych przypadków zastosowania równania Puchera można zna-
leźć w przystępnie napisanej monografii [1].

7.8. Przykłady do rozwiązania

1. Dla paraboloidy obrotowej rozpiętej nad rzutem kwadratowym podda-
nej działaniu obciążenia poprzecznego $g_z(x,y)$ obliczyć wartości sił
podłużnych przyjmując funkcję naprężeń /rys.7.14/ :



Rys.7.14. Rysunki do zadania

$$F = \sum_{i,j=1,3,\dots} F_{ij} \cos \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{j\pi y}{L} .$$

2. Jakie obciążenie poprzeczne $g_z(x,y)$ należy dobrać, aby funkcja naprężeń

$$F = C (a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$$

spełniła warunki podparcia przeponami brzegów $x = \pm a$, $y = \pm b$ paraboloidy hiperbolicznej o równaniu:

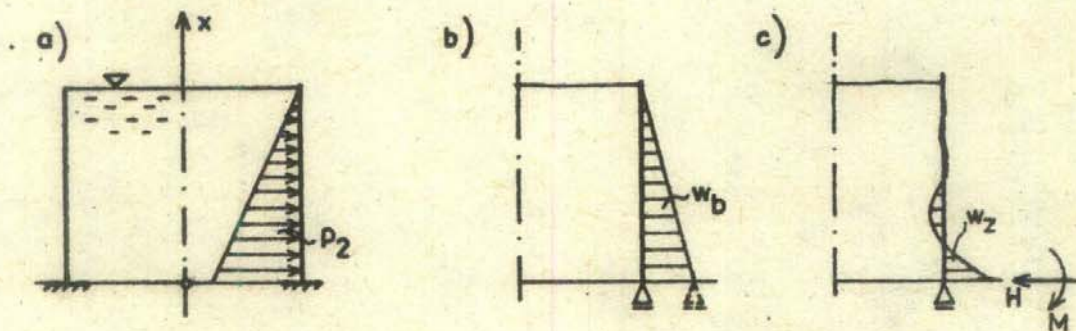
$$z = f \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) .$$

8. ZGINANE POWŁOKI WALCOWE

8.1. Uwagi ogólne

Zajmiemy się powłokami walcowymi o przekroju kołowym /rys.7.8/. Równania tych powłok są stosunkowo proste, a z drugiej strony względy technologiczne powodują, że powłoki te są często stosowane w praktyce.

W p.7.5 omówiliśmy stan bezmomentowy zamkniętych powłok walcowych. Okazuje się, że taki stan jest trudny do zrealizowania ze względu na warunki brzegowe w realnych konstrukcjach. Na rys.8.1a pokazano zbiornik w dolnym brzegu utwierdzonym. Rozwiązanie można otrzymać przez superpozycję stanu bezmomentowego /rys.8.1b/ i stanu giętnego od obciążeń brzegowych /rys.8.1c/.



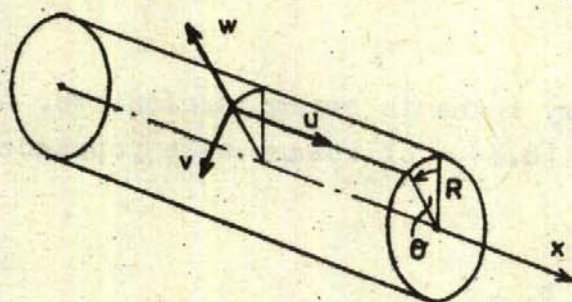
Rys.8.1. Superpozycja stanu bezmomentowego i zginania siłami brzegowymi

Wskazana superpozycja wymaga znajomości rozwiązania dla zginania powłoki. Uzyskanie takich rozwiązań jest znacznie trudniejsze niż w stanie bezmomentowym. Pokażemy takie rozwiązanie najpierw dla szczególnego przypadku - stanu obrotowo symetrycznego, wychodząc jednak z ogólnych równań powłok obrotowych, wyprowadzonych w p.6.8-9.

8.2. Zginanie obrotowo-symetryczne zamkniętych powłok walcowych

W przypadku zamkniętych powłok walcowych o przekroju kołowym /powłoki cylindryczne/ - por. rys.8.2 - obowiązują następujące zależności:

$$\xi = x \rightarrow A = 1, \quad r = R_2 = R = \text{const.}, \quad \frac{1}{R_1} = 0. \quad (8.1)$$



Rys.8.2. Powierzchnia środkowa powłoki cylindrycznej

W stanie obrotowo-symetrycznym wszystkie wielkości kinematyczne i statyczne są niezależne od kąta θ . Zajmiemy się szczególnym przypadkiem takiego stanu, gdy powłoka nie jest skręcana, tzn. gdy znikają następujące wielkości:

$$p_2 = 0, \quad b_2 = 0 \rightarrow v = 0, \quad n_{12} = q_2 = 0, \quad m_{12} = 0. \quad (8.2)$$

Po uwzględnieniu zależności (8.1-2) dla $j = 0$ z równań (6.56-57) otrzymujemy:

I. Równania równowagi:

$$n_1' + p_1 = 0, \quad (8.3)$$

$$q_1' - \frac{n_2}{R} + p_n = 0, \quad m_1' - q_1 + b_1 = 0,$$

II + III. Równania kinematyczne i fizyczne:

$$\begin{aligned} n_1 &= B \left[u' + \frac{\nu}{R} w \right], \\ n_2 &= B \left[\frac{w}{R} + \nu u' \right], \\ m_1 &= - D w'', \\ m_2 &= - \nu D w''. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Teraz wyprowadzimy równania przemieszczeniowe. Najpierw z trzeciego równania równowagi (8.3)₃ obliczamy siłę poprzeczną:

$$q_1 = m_1' + b_1. \tag{8.5}$$

Wzory (8.4-5) podstawiamy do dwóch pierwszych równań równowagi (8.3) i po elementarnych przekształceniach otrzymujemy równania przemieszczeniowe obrotowo-symetrycznego zginania powłoki cylindrycznej:

$$\begin{aligned} u'' + \frac{\nu}{R} w' &= - \frac{p_1}{B}, \\ \frac{\nu}{R} u' + \frac{h^2}{12} w^{IV} + \frac{w}{R^2} &= \frac{1}{B} (p_n + b_1'). \end{aligned} \tag{8.6}$$

Całkowanie pierwszego równania daje:

$$u' = - \frac{\nu}{R} w - \frac{1}{B} \left(\int p_1 dx + C \right), \tag{8.7}$$

a po podstawieniu tej funkcji do (8.6)₂ otrzymujemy:

$$\frac{h^2}{12} w^{IV} + \frac{1 - \nu^2}{R^2} w = \frac{1}{B} \left(p_n + b_1' + \frac{\nu}{R} \int p_1 dx + \frac{\nu}{R} C \right).$$

Równanie to po wymnożeniu przez $12/h^2$ przyjmuje postać:

$$w^{IV} + 4\beta^4 w = \frac{P(x)}{D}, \quad (8.8)$$

gdzie występuje współczynnik:

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{Rh}} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}, \quad (8.9)$$

oraz funkcja obciążenia:

$$p(x) = p_n + b_1' + \frac{\nu}{R} \int p_1 dx + C. \quad (8.10)$$

Równanie (8.8) jest podobne do równania belki na podłożu sprężystym typu Winklera. Wynikają stąd określone własności rozwiązania.

Całką ogólną równania jednorodnego:

$$w^{IV} + 4\beta^4 w = 0 \quad (8.11)$$

jest funkcja:

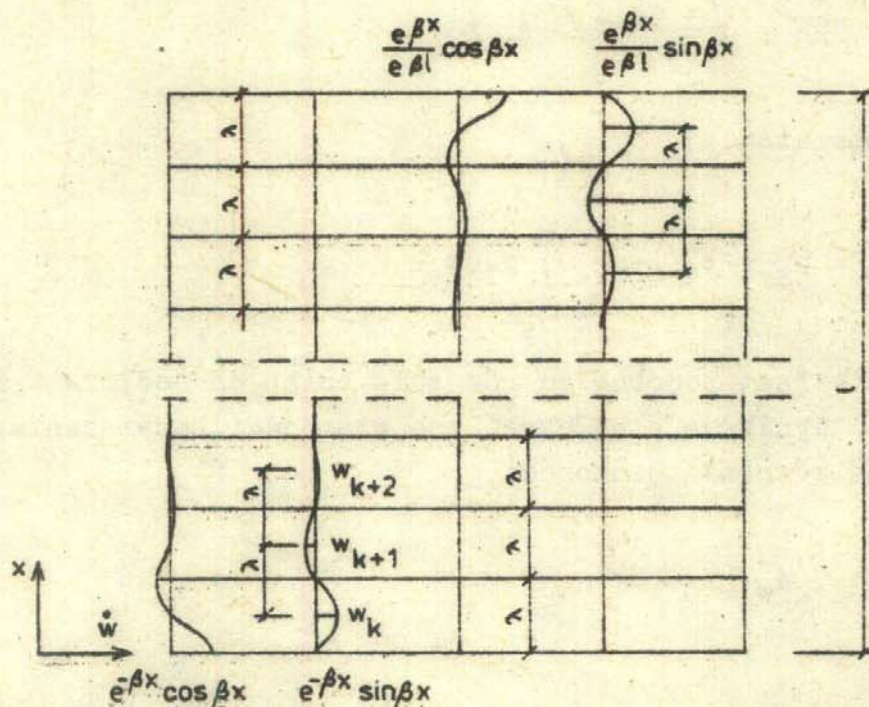
$$w^0(x) = e^{-\beta x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x). \quad (8.12)$$

Otrzymane rozwiązanie składa się z dwóch par szybko zanikających funkcji okresowych. Na rys.8.3 pokazano wykresy tych funkcji przy założeniu, że $B_1 = B_2 = 1$, $B_3 = B_4 = 1/e^{\beta l}$. Z równości $\sin \beta \lambda = \sin \pi$ obliczamy długość półfali funkcji występujących w rozwiązaniu (8.12):

$$\lambda = \frac{\pi}{\beta}. \quad (8.13)$$

Omawiane funkcje są szybko malejące, o czym świadczy stosunek wartości dwóch sąsiednich amplitud:

$$\frac{|w_{k+1}|}{|w_k|} = \frac{e^{-\beta(x+\lambda)}}{e^{-\beta x}} = e^{-\beta\lambda} = e^{-\frac{\pi}{23}} \approx \frac{1}{23} \quad (8.14)$$



Rys.8.3. Wykresy funkcji opisujących efekt brzegowy

Oznacza to, że dla odległości 2λ otrzymamy:

$$\frac{w_{k+2}}{w_k} \approx \frac{1}{23^2} = \frac{1}{529} ;$$

a więc przy długości powłoki $l > 3\lambda$ brzegi praktycznie nie wpływają na siebie.

Opisane zjawisko szybkiego zanikania ugięcia, jak też się przekrojowych wywołanych zginaniem nazywamy efektem brzegowym. Odpowiednio równanie jednorodne (8.11) i funkcję (8.12) nazywamy równaniem i funkcją /rozwiązaniem/ efektu brzegowego.

Efekt brzegowy charakteryzuje się powstaniem stanów giętnych we wszystkich miejscach powłoki, gdzie następuje naruszenie założeń stanu bezmomentowego, a więc w otoczeniu punktów skokowej zmiany obciążeń, skokowej zmiany grubości lub sztywności powłoki, załamania powierzchni środkowej itp.

Jako całość szczególną $\bar{w}(x)$ można przyjąć rozwiązanie ze stanu bezmomentowego, pod warunkiem, że $\bar{w}^{IV} = 0$ i $b_1 \equiv 0$. Przy takich założeniach na podstawie wzorów (7.27) i (7.29) można wykazać, że jest spełnione równanie:

$$4\beta^4 \bar{w} = \frac{1}{D} \left(p_n + \frac{\nu}{E} \int p_1 dx + C \right),$$

a więc funkcja $\bar{w}(x)$ jest całką równania (8.8).

Na podstawie zjawiska efektu brzegowego dzielimy powłoki cylindryczne na długie i krótkie. W powłokach krótkich efekty brzegowe z przeciwnych końców powłoki nakładają się.

Powłoki długie mają:

$$l > 3\lambda, \quad (8.15)$$

co umożliwia spełniać oddzielne warunki brzegowe dla funkcji:

$$x \approx 0, \quad w = e^{-\beta x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x) + \bar{w}(x), \quad (8.16)$$

$$x \approx l, \quad w = e^{\beta x} (B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x) + \bar{w}(x).$$

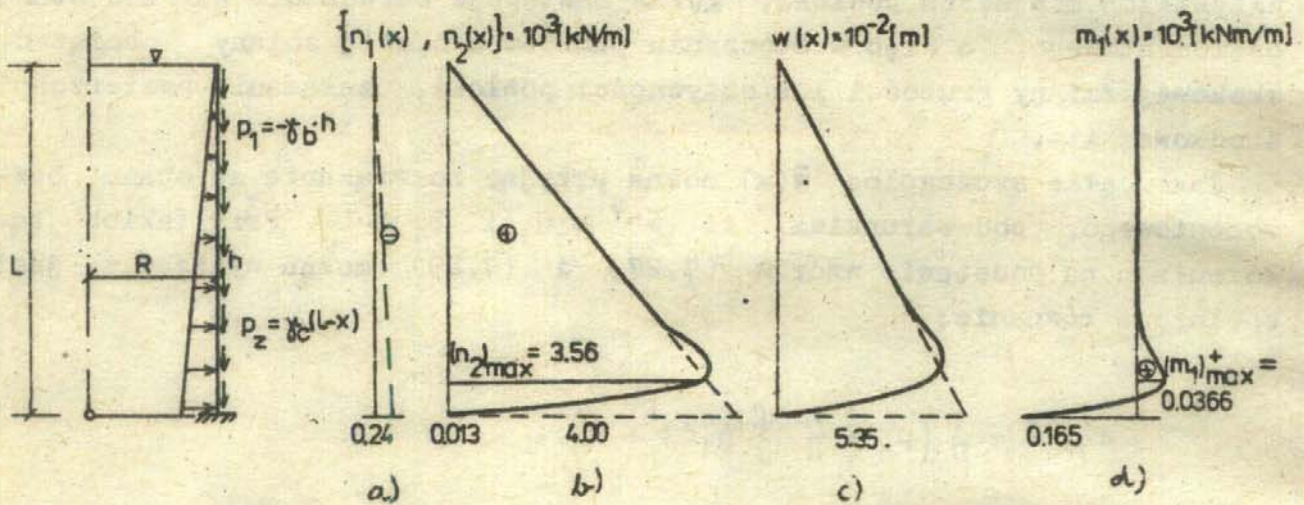
W powłokach krótkich, dla których $l < 3\lambda$, należy spełniać warunki brzegowe dla całej funkcji $w = \overset{\circ}{w} + \bar{w}$, gdzie $\overset{\circ}{w}$ jest określone wzorem (8.12).

Przykład 8.1. Zbiornik żelbetowy, wypełniony wodą /rys.8.4/.

Obliczenia zostaną wykonane dla następujących wartości liczbowych:

$$R = 20 \text{ m}, \quad L = 20 \text{ m}, \quad h = 0,15 \text{ m}, \quad \nu = 0,167, \quad E = 1 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2,$$

$$\gamma_c = 10 \text{ kN/m}^2, \quad \gamma_b = 24 \text{ kN/m}^3.$$



Rys.8.4. Zbiornik walcowy

Powyższe dane pozwalają obliczyć sztywność powłoki:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{10^7 \cdot 0,15^3}{12(1-0,167^2)} = 2893,19 \text{ kNm}$$

oraz parametr powłoki

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{Rh}} \cdot \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} = \sqrt{\frac{1}{20 \cdot 0,15}} \cdot \sqrt[4]{3(1-0,167^2)} = 0,754 \text{ 1/m}$$

Porównanie długości powłoki \$L = 20 \text{ m}\$ z \$\lambda\$, które wynosi:

$$\lambda = \frac{\pi}{\beta} = 4,164 \text{ m} < \frac{20 \text{ m}}{3}$$

wskazuje na możliwość oddzielnego spełnienia warunków brzegowych dla \$x = 0\$ i \$x = L\$.

Całkę równania (8.8) przedstawiamy w postaci sumy całki ogólnej (6.12) i szczególnej (7.33)₂, wynikającej z rozpatrzenia stanu bezmomentowego w danej powłoce o warunkach brzegowych jak w przykładzie (7.6):

$$\bar{w} = e^{-\beta x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x) \quad \text{dla } x \approx 0,$$

$$\bar{w} = e^{\beta x} (B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x) \quad \text{dla } x \approx L,$$

$$\bar{w} = \frac{R}{Eh} [(\gamma_c R + \nu \gamma_b h)(L - x)].$$

Dla powłoki z rys.8.4 można zapisać warunki brzegowe:

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad m_1(L) = 0, \quad q_1(L) = 0.$$

Zajmiemy się najpierw otoczeniem konturu $x = L$. Uwzględniając we wzorach (8.4)₃ i (8.5) całkę ogólną i szczególną można wyrazić moment m_1 i siłę q_1 poprzez stałe B_3 i B_4 :

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= -Dw'' = -2D\beta^2 e^{\beta x} (B_4 \cos \beta x - B_3 \sin \beta x) \\ q_1 &= m_1' = -2D\beta^3 e^{\beta x} [(B_4 - B_3) \cos \beta x - (B_3 + B_4) \sin \beta x] \end{aligned} \right\} x = L$$

Otrzymujemy w ten sposób dwa równania:

$$\left\{ \begin{aligned} -\sin \beta L \cdot B_3 + \cos \beta L \cdot B_4 &= 0, \\ -(\sin \beta L + \cos \beta L) B_3 + (\cos \beta L - \sin \beta L) B_4 &= 0, \end{aligned} \right.$$

których wyznacznik jest różny od zera, a więc $B_3 = B_4 = 0$.

W wyniku zamocowania konturu $x = 0$ powstanie w dolnej części powłoki stan giętny opisany równaniami:

$$w(x) = e^{-\beta x} (B_1 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x) + \frac{R}{Eh} (\gamma_c R + \nu \gamma_b h) (L - x),$$

$$w'(x) = \beta e^{-\beta x} [(B_2 - B_1) \cos \beta x - (B_1 + B_2) \sin \beta x] - \frac{R}{Eh} (\gamma_c R + \nu \gamma_b h).$$

Warunki brzegowe dla $x = 0$:

$$w(0) = B_1 + \frac{R}{Eh} (\gamma_c R + \nu \gamma_b h) L = B_1 + \frac{20}{10^7 \cdot 0,15} (10 \cdot 20 + 0,167 \cdot 24 \cdot 0,15) \cdot 20 = B_1 + 0,0535 = 0,$$

$$\begin{aligned} w'(0) &= \beta (B_2 - B_1) - \frac{R}{Eh} (\gamma_c R + \nu \gamma_b h) = \\ &= 0,754 (B_2 - B_1) - \frac{20}{10^7 \cdot 0,15} (10 \cdot 20 + 0,167 \cdot 24 \cdot 0,15) = \\ &= 0,754 (B_2 - B_1) - 0,002675 = 0, \end{aligned}$$

prowadzą do równań algebraicznych i wartości stałych:

$$\begin{cases} B_1 = -0,0535, \\ B_1 - B_2 = -0,0035 \rightarrow B_2 = -0,0500. \end{cases}$$

Ostatecznie funkcja ugięcia w otoczeniu brzegu będzie miała następującą postać:

$$\begin{aligned}
w &= - e^{-\beta x} (0,0535 \cos \beta x + 0,0500 \sin \beta x) + \\
&+ \frac{R}{Eh} (\gamma_c R + \nu \gamma_b h) (L - x) = \\
&= - e^{-0,754x} (0,0535 \cos \beta x + 0,0500 \sin \beta x) + \\
&+ 0,133 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \cdot 6012 \cdot (L - x) = \\
&= - e^{-0,754x} (0,0535 \cos \beta x + 0,0500 \sin \beta x) + \\
&+ 0,535 - 0,002668 x.
\end{aligned}$$

Reprezentowany przez całkę $\overset{0}{w}$ stan giętny musi być uwzględniany w ostatecznym rozkładzie siły podłużnej n_2 , wyznaczonej początkowo w stanie bezmomentowym równaniem (7.31). Korzystając ze związku geometrycznego $\varepsilon_2 = w/R$ i fizycznego $\varepsilon_2 = (n_2 - \nu n_1) / (Eh)$ otrzymujemy:

$$n_2 = \frac{Eh}{R} (\overset{0}{w} + \bar{w}) + \nu n_1,$$

a po oznaczeniu sił ze stanu bezmomentowego przez \bar{n}_1 i \bar{n}_2 ostateczną zależność:

$$\begin{aligned}
n_2 &= \frac{Eh}{R} \overset{0}{w} + \left(\frac{Eh}{R} \bar{w} + \nu \bar{n}_1 \right) = \frac{Eh}{R} \overset{0}{w} + \bar{n}_2 = \\
&= - \frac{Eh}{R} e^{-\beta x} (0,0535 \cos \beta x + 0,0500 \sin \beta x) + \\
&+ \gamma_c R (L - x) = \\
&= - 0,75 \cdot 10^5 e^{-0,754 x} (0,0535 \cos \beta x + 0,0500 \sin \beta x) + \\
&- 200 x + 4000.
\end{aligned}$$

Na rys. 8.4a, b, c zaznaczono linią przerywaną rozwiązanie w stanie bezmomentowym, nanosząc równocześnie poprawki wynikające ze stanu giętnego.

Rozkład momentu zginającego m_1 /rys. 8.4a/ wynika z zależności:

$$\begin{aligned} m_1 &= -Dw'' = 2D\beta^2 e^{-\beta x} [-B_1 \sin \beta x + B_2 \cos \beta x] = \\ &= 3,2897 \cdot 10^3 e^{-0,754x} [0,0535 \sin(0,754x) - 0,05 \cos(0,754x)]. \end{aligned}$$

8.3. Ogólna postać równań przemieszczeniowych

Pełny komplet równań powłok walcowych /zamkniętych i otwartych/, w których są spełnione zależności (8.1) przyjmuje postać:

I. Równania równowagi

$$\frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial n_{12}}{\partial \theta} + p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial n_{12}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial n_2}{\partial \theta} + \frac{q_2}{R} + p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial q_2}{\partial \theta} - \frac{n_2}{R} + p_n = 0,$$

(8.17)

$$\frac{\partial m_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_{12}}{\partial \theta} - q_1 + b_1 = 0,$$

$$\frac{\partial m_{12}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_2}{\partial \theta} - q_2 + b_2 = 0,$$

$$n_{12} - n_{21} - \frac{m_{12}}{R} = 0,$$

II + III. Równania kinematyczne i fizyczne

$$\begin{aligned}
 n_1 &= B \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \right], \\
 n_2 &= B \left[\left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) + v \frac{\partial u}{\partial x} \right], \\
 n_{12} &= \frac{1-v}{2} B \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right), \\
 m_1 &= D \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right], \\
 m_2 &= D \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \\
 m_{12} &= \frac{1-v}{2} D \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right).
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

Z czwartego i piątego równania równowagi obliczamy siły poprzeczne:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{\partial m_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_{12}}{\partial \theta} + b_1, \\
 q_2 &= \frac{\partial m_2}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial m_{12}}{\partial \theta} + b_2.
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

Wzory (8.18-8.19) podstawiamy do trzech pierwszych równań równowagi. Po elementarnych przekształceniach otrzymujemy równania przemieszczeniowe /dokładniej równania typu Lamégo, a więc równania równowagi wyrażone przez przemieszczenia/:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+v}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{v}{R} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{p_1}{B}, \\
 \frac{1+v}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-v}{2} (1+k) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} (1+k) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} &+ \\
 + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - k \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) &= -\frac{1}{B} \left(p_2 + \frac{b_2}{R} \right),
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - k \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{w}{R^2} + \\
& + kR^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) = \\
& = \frac{1}{B} \left(p_n + \frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial b_2}{\partial \theta} \right),
\end{aligned}$$

gdzie posłużono się współczynnikiem

$$k = \frac{h^2}{12R^2}. \quad (8.21)$$

Przy wyprowadzeniu równań przemieszczeniowych nie zajmowaliśmy się szóstym równaniem równowagi. Można tak zrobić, jeśli przyjmiemy $m_{12}/R \approx 0$. Przy posługiwaniu się uproszczonymi wzorami (4.24) na siły przekrojowe przyjmowaliśmy, że $z/R \ll 1$, a więc tym bardziej zachodzi $k \ll 1$.

W wielu wypadkach możemy posługiwać się uproszczonymi wzorami na momenty zginające, zachowując w nich człony zależne tylko od przemieszczenia poprzecznego w :

$$\begin{aligned}
m_1 &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\
m_2 &= -D \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
m_{12} &= -(1 - \nu) D \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}.
\end{aligned} \quad (8.22)$$

Dalsze uproszczenia otrzymujemy przez pominięcie członu q_2/R w drugim równaniu równowagi oraz obciążeń momentowych. Dochodzimy w ten sposób do równań uproszczonych:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{p_1}{B},$$

$$\frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{p_2}{B}, \quad (8.23)$$

$$\frac{\nu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R^2} + kR^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) = \frac{p_n}{B}$$

Do równań przemieszczeniowych dołączamy warunki brzegowe:

a/ dla brzegów $x = \text{const.}$

$$u = \bar{u},$$

$$n_1 = \bar{n}_1,$$

$$v = \bar{v},$$

$$n_{12} + \frac{m_{12}}{R} = \bar{n}_{12}, \quad (8.24a)$$

$$w = \bar{w},$$

lub

$$q_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial m_{12}}{\partial \theta} = \bar{q}_1,$$

$$\varphi_1 \equiv -\frac{\partial w}{\partial x} = \bar{\varphi}_1,$$

$$m_1 = \bar{m}_1.$$

b/ dla brzegów $y = \text{const.}$

$$u = \bar{u},$$

$$n_2 = \bar{n}_2,$$

$$v = \bar{v},$$

$$n_{12} = \bar{n}_{12}, \quad (8.24b)$$

lub

$$q_2 + \frac{\partial m_{12}}{\partial x} = \bar{q}_2,$$

$$\varphi_2 \equiv -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{R} = \bar{\varphi}_2,$$

$$m_2 = \bar{m}_2.$$

Równania (8.23) można przekształcić do postaci wygodniejszej do prowadzenia analizy. Z pierwszego równania obliczamy $\partial^2 v / \partial x \partial \theta$, a po zróżniczkowaniu otrzymujemy $\partial^4 v / \partial x^3 \partial \theta$ oraz $\partial^4 v / \partial x \partial \theta^3$. Następnie działamy operatorem $\partial^2 / \partial x \partial \theta$ na drugie równanie (8.23)₂ i eliminujemy pochodne v . Tak samo eliminujemy pochodne u . Dochodzimy w ten sposób do równań częściowo rozprężonych:

$$\begin{aligned} \nabla^4 u + \frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} = \\ = \frac{1}{B} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{2}{1-\nu} \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \theta^2} \right), \end{aligned} \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 v + \frac{2+\nu}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} = \\ = \frac{1}{B} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial \theta} - \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 p_2}{\partial \theta^2} \right), \end{aligned}$$

gdzie ∇^4 oznacza biaplasjan:

$$\nabla^4 = \nabla^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right). \quad (8.26)$$

Po zastosowaniu operatora ∇^4 do trzeciego równania (8.23)₃ możemy przedstawić $\nabla^4 (\partial u / \partial x)$, $\nabla^4 (\partial v / \partial \theta)$ obliczone z (8.25) i w ten sposób dochodzimy do równania:

$$\begin{aligned} \nabla^8 w + \frac{1-\nu^2}{kR^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \\ = \frac{1}{D} \left(\nabla^4 p_n + \frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 p_1}{\partial x^3} - \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 p_1}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{2+\nu}{R^2} \frac{\partial^3 p_2}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 p_2}{\partial \theta^3} \right) \end{aligned} \quad (8.27)$$

gdzie operator $\nabla^8 = \nabla^4 (\nabla^4)$.

Doszliśmy w ten sposób do równania ósmego rzędu, z którego można obliczyć ugięcie w , a następnie z równań (8.25) przemieszczenia u i v . Ponieważ równania (8.25) i (8.27) wyprowadziliśmy przez różniczkowanie równań (8.23), tylko te rozwiązania są dopuszczalne, które spełniają równania (8.23).

Wyprowadzone równania uproszczone są stosowane w powłokach otwartych. Natomiast należy je używać ostrożnie w obliczeniach powłok zamkniętych. Bardziej szczegółową analizę uproszczeń, zależnych od parametrów geometrycznych, warunków brzegowych i rozkładu obciążenia w powłokach walcowych można znaleźć w [2,6].

8.4. Uproszczone równania naprężeniowo- - przemieszczeniowe do analizy przekryć walcowych

Równania uproszczone, wyprowadzone w poprzednim punkcie, można zamienić równaniami naprężeniowo-przemieszczeniowymi analogicznymi do równań powłok mała wyniosłych.

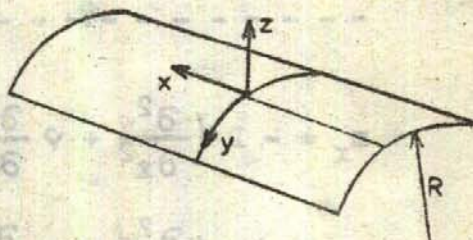
Najpierw posłużymy się ortogonalnym układem współrzędnych (x, y) , gdzie zgodnie z rys.8.5 współrzędna krzywoliniowa y wynosi:

$$y = R \theta . \quad (8.28)$$

W poprzednim punkcie przyjęliśmy następujące założenia:

1. W równaniach równowagi pomijamy q_2/R w (8.17)₂ i m_{12}/R w (8.17)₆ oraz obciążenia momentowe b_1, b_2 .

2. Pomijamy $\partial v / \partial \theta$ i $\partial v / \partial x$ w równaniach fizycznych (8.18) dla określenia momentów, a więc posługujemy się wzorami (8.22).



Rys.8.5. Układ współrzędnych ortogonalnych na powierzchni walcowej

Dochodzimy w ten sposób do równań:

I. Równania równowagi

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + p_x = 0,$$

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} + p_y = 0,$$

(8.29)

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{n_y}{R} + p_z = 0,$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_x = 0,$$

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y = 0,$$

II + III. Równania fizyczne

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh} (n_x - \nu n_y),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{Eh} (n_y - \nu n_x),$$

(8.30a)

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} n_{xy},$$

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

(8.30b)

$$m_{xy} = - (1 - \nu) \cdot D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Dwa pierwsze równania równowagi są spełnione tożsamościowo przez wyprowadzenie funkcji naprężeń F i wzorów (6.62), które tutaj przypominamy:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int p_x dx, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int p_y dy, \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (8.31)$$

Funkcję naprężeń obliczamy z równania nierozdzielności, które przez analogię do (6.63) ma postać:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \chi_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8.32)$$

Po podstawieniu wzorów (8.30a) na odkształcenia równanie nierozdzielności przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \nabla^4 F - \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \\ &= \int \frac{\partial^2 p_x}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 p_y}{\partial x^2} dy - \nabla \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} \right) \quad (8.33) \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę na duże podobieństwo tego równania do równania (6.64), które wyprowadziliśmy dla powłok mało wyniosłych.

Po obliczeniu sił poprzecznych z równań równowagi (8.29)₄₋₅ i podstawienia do (8.29)₃ dochodzimy do równania:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - \frac{n_x}{R} + p_n = 0$$

Do tego równania podstawiamy wzory (8.30b) na momenty i (8.31)₂ na siłę podłużną n_y , co prowadzi do równania:

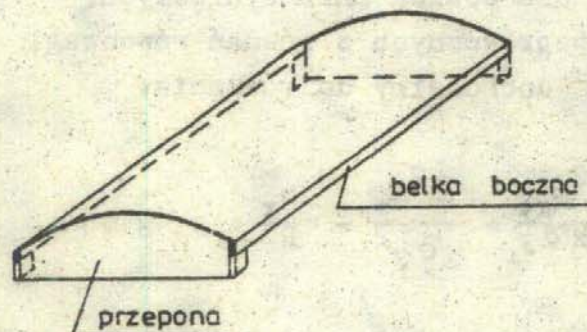
$$D \nabla^4 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = p_n + \frac{1}{R} \int p_y dy \quad (8.34)$$

Również to równanie jest podobne do równania (6.67) powłok mało wyniosłych.

Wyprowadzone równania (8.33-8.34) stanowią podstawę do analizy przekryć walcowych [12]. W przeciwieństwie do powłok mało wyniosłych można dokonać rozprężenia. Po zastosowaniu operatora ∇^4 do równania (8.33) i $\partial^2/\partial x^2$ do (8.34) można wyeliminować pochodne w i w analogiczny sposób pochodne F, co prowadzi do równań:

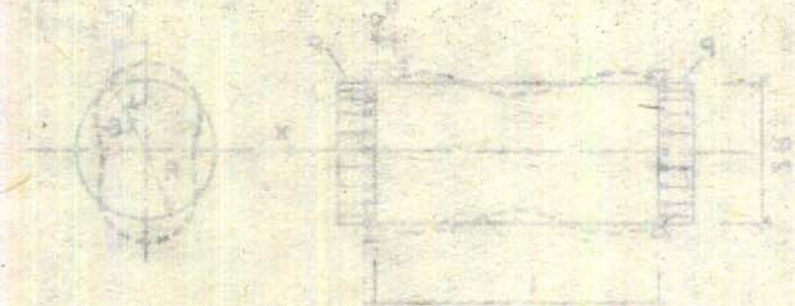
$$\begin{aligned} \nabla^8 F + \frac{1-\nu^2}{kR^4} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = \\ = \nabla^4 \left[\int \frac{\partial^2 p_x}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 p_y}{\partial x^2} dy - \nu \left(\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} \right) \right] + \\ + \frac{1-\nu^2}{kR^3} \left(\frac{\partial^2 p_n}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \int \frac{\partial^2 p_y}{\partial x^2} dy \right), \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$\begin{aligned} \nabla^8 w + \frac{1-\nu^2}{kR^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{1}{D} \left(\nabla^4 p_n + \frac{\nu}{R} \frac{\partial^3 p_x}{\partial x^3} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 p_x}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ \left. + \frac{2+\nu}{R} \frac{\partial^3 p_y}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 p_y}{\partial y^3} \right). \end{aligned}$$



Rys.8.6. Sposób podparcia sklepienia walcowego

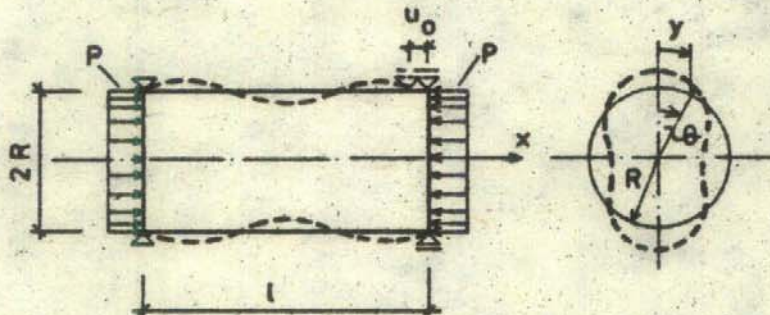
Nie przytaczamy tutaj rozwiązań równań (8.35) ze względu na dość żmudne obliczenia. Temu zagadnieniu jest poświęcony podręcznik [12], gdzie można znaleźć również odpowiednie tablice. Warto dodać, że zazwyczaj brzegi prostoliniowe są wzmacniane belkami bocznymi /burtowymi/, jak pokazano na rys.8.6. Wymaga to spełnienia odpowiednich równań ciągłości i równowagi. Przystępnie to zadanie jest opisane w [6].



Rys. 8.6. Wzmacnianie brzegów prostoliniowych.

9. ZARYS TEORII UTRATY STABILNOŚCI POWŁOK, ZAGADNIENIA NIEOMÓWIONE

9.1. Wyboczenie powłoki walcowej



Rys.9.1. Ściskana powłoka walcowa

Zajmiemy się prostym zagadnieniem obliczenia obciążenia krytycznego zamkniętej powłoki walcowej poddanej ściskaniu osiowemu równomiernym obciążeniem P , które jest przyłożone do brzegów zewnętrznych /rys.9.1/.

Przed wyboczeniem w powłoce powstają siły podłużne:

$$n_1 = -P. \quad (9.1)$$

Tak samo jak w płytach w chwili wyboczenia powstaje fikcyjne obciążenie poprzeczne:

$$\bar{p}_n = n_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (9.2)$$

które podstawiamy do równania (8.11). Jeśli przyjmiemy, że nie ma obciążenia powierzchniowego ($p_1 = p_2 = p_n = 0$), to dochodzimy do równania:

$$D \nabla^4 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (9.3)$$

Ze względu na przegubowe podparcie brzegów przyjmujemy rozwiązanie w postaci:

$$w = A \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{jy}{R}. \quad (9.4)$$

Podstawienie (9.4) do (9.3) daje następujące równanie algebraiczne służące obliczeniu obciążenia krytycznego:

$$p = \frac{x^2}{12(1-\nu^2)} + \frac{1}{x^2}, \quad (9.5)$$

gdzie występują wielkości bezwymiarowe:

$$p = \frac{PR}{Eh^2}, \quad x = \frac{\pi \sqrt{Rh}}{l} m \left(1 + \frac{l^2}{\pi^2 R^2} \frac{1^2}{m^2} \right). \quad (9.6)$$

Minimalną wartość p obliczamy z równania:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \rightarrow x^2 = \sqrt{12(1-\nu^2)} \dots \quad (9.7)$$

Obciążenie krytyczne wynosi:

$$P_{kr} = \frac{Eh^2}{R} p_{min} = \frac{Eh^2}{R \sqrt{3(1-\nu^2)}}. \quad (9.8)$$

Postać wyboczenia /liczbę półfal/ obliczamy z równania:

$$m^2 \left(1 + \frac{j^2}{\pi^2 R^2} - \frac{j^2}{m^2} \right)^2 = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\pi^2} \frac{j^2}{Rh} . \quad (9.9)$$

Powtórzyliśmy sposób postępowania z p.5, jeśli stosowaliśmy do analizy wyboczenia płyt prostokątnych ściskanych jednokierunkowo. Wartość obciążenia krytycznego P_{kr} zależy od stałych materiałowych E, ν , promienia R i grubości h , nie zależy natomiast od długości powłoki l .

Ze względu na zakrzywienie powierzchni środkowej wyboczenie powłoki może nastąpić również przy obciążeniu ciśnieniem zewnętrznym q . Wyboczenie polega na przejściu od postaci obrotowo-symetrycznej do niesymetrycznej.

W przypadku przegubowego podparcia końców /rys.9.2/ przyjmujemy przemieszczenia w postaci:

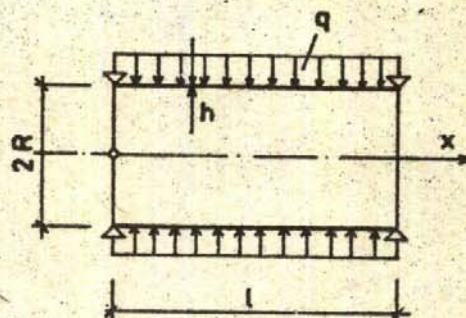
$$u = A \sin \frac{\pi x}{l} \cos j\theta ,$$

$$v = B \cos \frac{\pi x}{l} \sin j\theta , \quad (9.10)$$

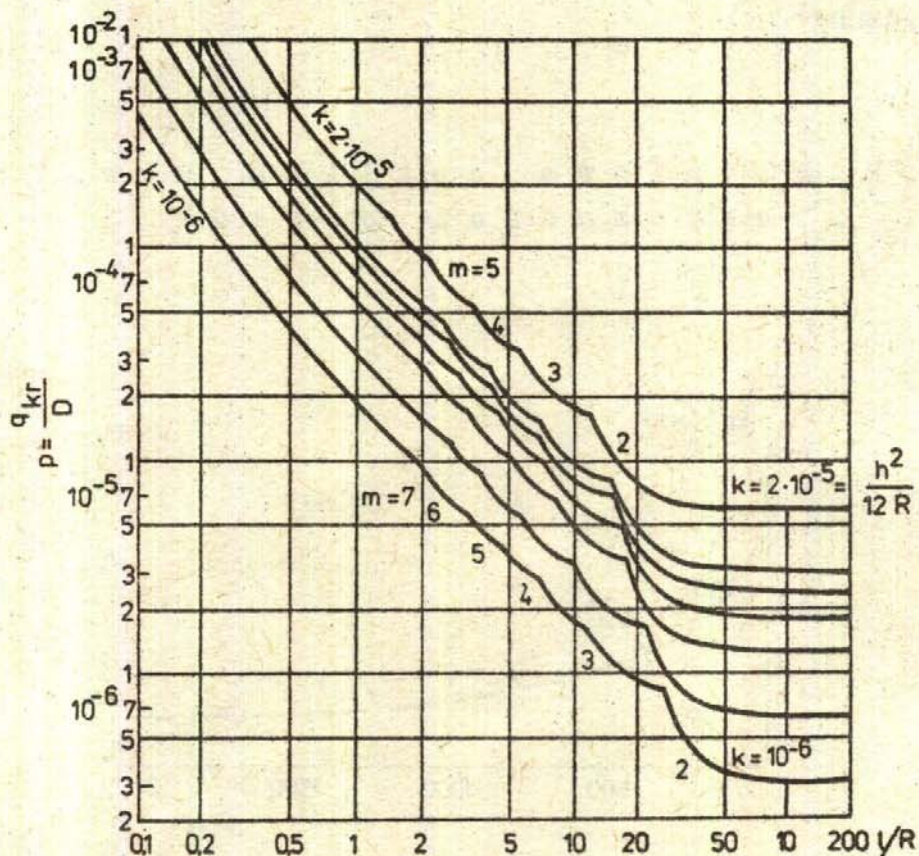
$$w = C \sin \frac{\pi x}{l} \cos j\theta .$$

Obliczenia są dwuetapowe. Najpierw obliczamy stan osiowo-symetryczny zginania powłoki pod wpływem ciśnienia $\bar{q} = 1$. Na podstawie równań liniowych otrzymujemy rozwiązanie $\bar{u}, \bar{w}, \bar{n}_{\alpha\beta}, \bar{m}_{\alpha\beta}$, które wraz z przewidywanym rozwiązaniem (9.10) podstawiamy do równań stateczności.

Równania stateczności mogą mieć postać przemieszczeniowych równań (9.4). Będą one jednorodne ($p_\alpha = p_\Omega = 0$) i uzupełnione członami ujmującymi odejście od zasady zeszywnienia. Rozwiązania otrzymujemy w postaci trzech jednorodnych równań algebraicznych ze względu na amplitudy A, B, C. Z zerowania się wyznacznika tych równań /jest on nazywany wyznacznikiem stateczności/ otrzymujemy równanie, z którego obliczamy obciążenie krytyczne:



Rys.9.2. Powłoka walcowa obciążona ciśnieniem zewnętrznym



Rys.9.3. Krytyczne ciśnienia zewnętrzne dla powłoki walcowej

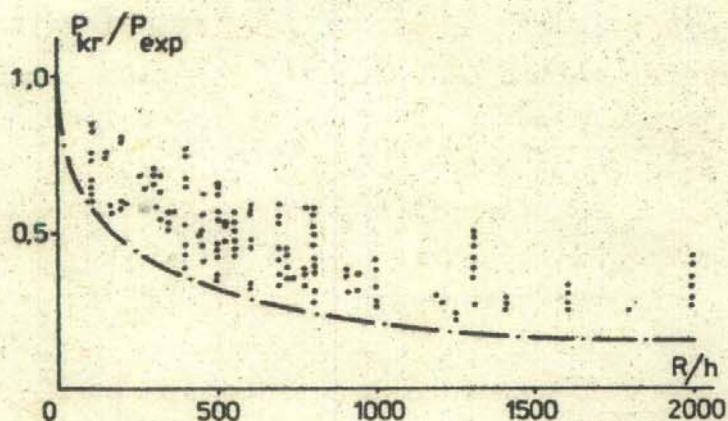
$$q_{kr} \frac{(1 - \nu^2) R}{Eh} = \frac{(1 - \nu^2)}{(m^2 - 1) (1 + \lambda^2 m^2)^2} + k \left(m^2 - 1 + \frac{2m^2 - 1 - \nu}{1 + \lambda^2 m^2} \right), \quad (9.11)$$

gdzie:

$$k = \frac{h^2}{12R^2}, \quad \lambda^2 = \frac{l^2}{\pi^2 R^2}. \quad (9.12)$$

Rozwiązania (9.11) i rys.9.3 wzięliśmy z [16]. Widać, że dla ustalonych wartości k otrzymujemy typowe "girlandy". Dla krótszych powłok /gdy $l < 50 R$ / stosunek l/R istotnie wpływa na wartość obciążenia krytycznego.

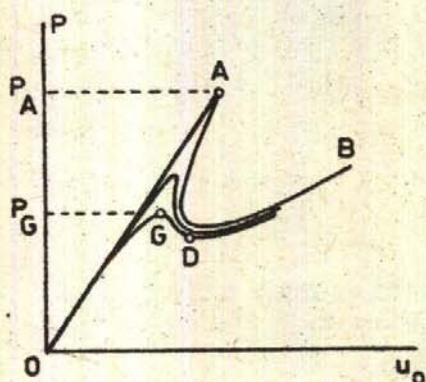
9.2. Nieliniowa analiza utraty stateczności powłok



Rys.9.4. Obciążenia krytyczne osiowo-ściskanych powłok walcowych

Rozważania przytoczone w poprzednim punkcie opierały się na liniowych równaniach stateczności. Chodzi o równania typu (9.3), które są jednorodne i przy traktowaniu obciążenia jako parametru są one równaniami liniowymi ze względu na funkcje ugięcia. Liniowe równania obowiązują jedynie w chwili wyboczenia, gdyż opierają się na założeniu małych przemieszczeń.

W przeciwieństwie do płyt doświadczenia przeprowadzone dla powłok wykazują często znacznie niższe wartości obciążeń krytycznych, niż obliczone z równań liniowych. Na rys.9.4 pokazano wyniki doświadczeń nad powłoką walcową o schemacie z rys.9.1.



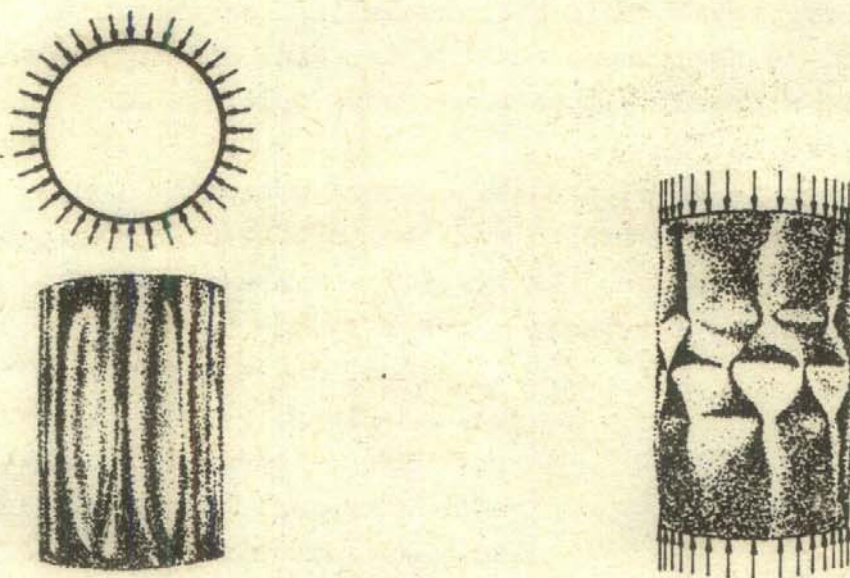
Rys.9.5. Zależność obciążenia od przesunięcia brzegu ściskanej powłoki walcowej

Widać, że w porównaniu z wartością obliczeniową (9.8) dla dużych stosunków R/h wartości obciążeń krytycznych otrzymanych z doświadczeń mogą być kilkakrotnie niższe. Widać też, że występuje znaczny rozrzut wyników pomiarów.

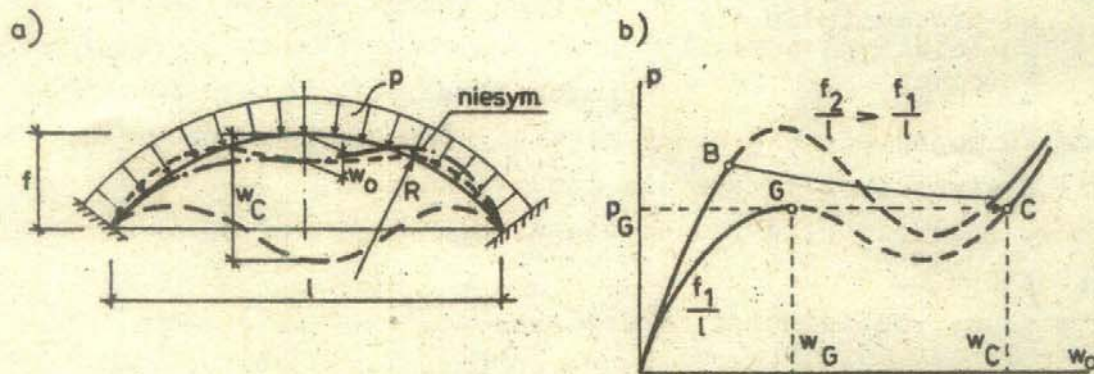
Na rys.9.5 pokazano wykres zależności $P(u_0)$, gdzie u_0 jest osiowym przemieszczeniem brzegu /rys.9.1/. Doświadczenia wykazały na istotny wpływ tzw. imperfekcji na obciążenia krytyczne. Chodzi o przypadkowe niedokładności geometryczne /zmienna grubość ścianki, wstępne wygięcia/ lub mechaniczne /miękkosrodowość przykładania obciążeń, podparcie brzegów/, które powodują, że od początku pojawiają się stany giętne. Imperfekcje powodują, że obciążenie krytyczne obliczone dla powłoki idealnej /punkt A na rys. 9.5/ może znacznie przewyższać obciążenia krytyczne powłoki rzeczywistej /punkt G/.

Stwierdzone rozbieżności między wynikami analizy liniowej /obciążenie P_A / i doświadczalnej zmuszają do uściślenia obliczeń. Okazuje się, że zarówno analiza pozakrytyczna /część A-B krzywej na rys.9.5/ jak też powłok z imperfekcjami wymaga uściślenia teorii powłok i metod obliczeniowych. Obliczenie górnego i dolnego obciążenia krytycznego P_G i P_D jest możliwe tylko na podstawie analizy nieliniowej.

Analizę liniową można zastosować do obliczenia obciążenia typu bifurkacyjnego, któremu odpowiada wyboczenie powłoki. Chodzi o przejście ze stanu przedwyboczeniowego do jakościowo innego stanu pokrytycznego /stan bezmomentowy \rightarrow stan giętny, stan osiowo-symetryczny \rightarrow stan niesymetryczny/.



Rys.9.6. Wyboczenie powłoki walcowej obciążonej ciśnieniem zewnętrznym i ścisaniem osiowym



Rys.9.7. Utrata stateczności powłoki kulistej

Obciążenie bifurkacyjne, obliczone dla powłok idealnych, może być bliskie lub odległe od obciążeń krytycznych konstrukcji realnych. Zależy to od przebiegu zjawiska wyboczenia. W przypadku powłoki walcowej obciążonej ciśnieniem zewnętrznym pojawiają się długie półfale wyboczenia

wzdłuż południków, /rys.9.6a/ i powłoka jest mało czuła na imperfekcje. W takim przypadku analiza liniowa daje dobre wyniki.

Inaczej jest przy ściskaniu osiowym. Obserwujemy tutaj czułość na imperfekcje, które obniżają obciążenia krytyczne powłoki idealnej i powodują duży rozrzut wyników doświadczeń. W zależności od parametrów geometrycznych i imperfekcji postaci wyboczenia są różne. Na rys.9.6b pokazano charakterystyczne romboidalne wklęsnięcia, jakie pojawiają się przy wyboczeniu ściskanych powłok walcowych.

Oprócz bifurkacji utrata stateczności może nastąpić przez przeskok. To zjawisko pokazujemy na przykładzie mało wyniosłej powłoki kulistej poddanej działaniu ciśnienia zewnętrznego /rys.9.7a/. Odkształcanie się powłoki jest od początku nieliniowe. Dla powłok mało wyniosłych /parametr wyniosłości $f_1/l < 2$ / obciążenie może osiągnąć wartość graniczną p_G , po czym następuje przeskok do punktu C, czemu towarzyszy skokowy wzrost ugięć $w_G \rightarrow w_C$. Przeskok następuje bez zmiany typu postaci równowagi /obrotowa-symetria/.

W powłokach wyniosłych $f_2/l > 15$ może wystąpić też bifurkacja stanu równowagi, która charakteryzuje się przejściem od obrotowo-symetrycznego do niesymetrycznego zginania. W przypadku powłoki kulistej punkt bifurkacji B leży na nieliniowej ścieżce równowagi $p(w_0)$.

Z przedstawionego, krótkiego omówienia wynika, że analiza utraty stateczności powłok jest znacznie bardziej złożona niż płyt, głównie ze względu na konieczność oparcia się na nieliniowych równaniach powłok.

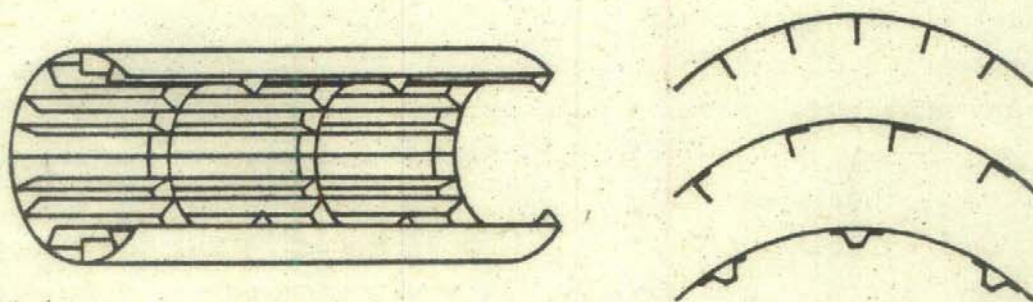
9.3. Z a g a d n i e n i a n i e o m ó w i o n e

Przedstawiony wykład na temat ustrojów powierzchniowych należy traktować jako elementarne wprowadzenie do teorii i analizy tych ustrojów. Zgodnie z założeniami przyjętymi w p.1.2, ograniczyliśmy się do teorii liniowej, opartej na hipotezach Kirchhoffa-Love'a. Zajmowaliśmy się najprostszym przypadkiem materiału izotropowego i jednorodnego. Przyjęliśmy, że obciążenia są przykładane statycznie, a więc zawęziliśmy obszar rozważań do zagadnień statyki i statycznej utraty stateczności.

Teoria dźwigarów powierzchniowych, a zwłaszcza teoria powłok uległa w ostatnich 30 latach znacznemu rozwojowi. Polegał on z jednej strony na budowaniu konsystentnych modeli w ramach opisanych założeń, z drugiej zaś strony na osłabianiu tych założeń. Poniżej omawiamy tylko niektóre kierunki badań ustrojów powierzchniowych - peñniejsze ich omawianie wykracza poza możliwości elementarnego wykładu.

9.3.1. Ustroje uzebrowane i trójwarstwowe

Cienkościenność ustrojów powierzchniowych powoduje, że są one często mało sztywne, a tym samym i podatne na utratę stateczności. Z tego względu często stosuje się uzebrowanie podłużne i poprzeczne /dla uproszczenia przyjmujemy, że można wyróżnić takie kierunki/. Na rys.9.8 pokazano uzebrowaną powłokę walcową oraz różne typy jednostronnych żeber.



Rys.9.8. Uzebrowana powłoka walcowa i różne typy jednostronnych żeber

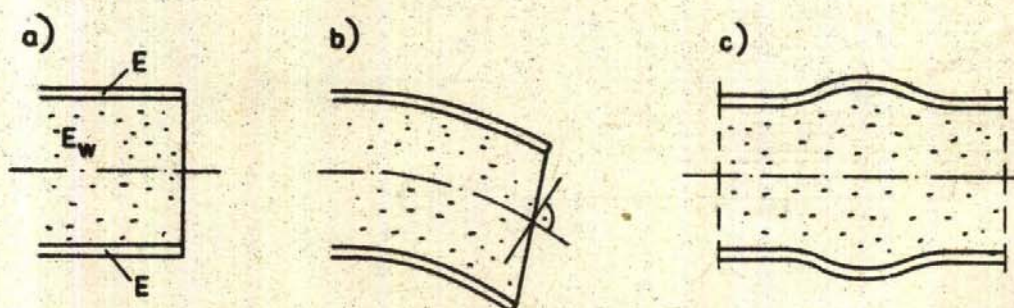
Jeśli liczba żeber jest duża, to można je "rozmazać" i rozpatrywać powłokę jako jednorodną, konstrukcyjnie ortotropową /ogólniej konstrukcyjnie anizotropową/. Oznacza to, że obliczamy zastępcze sztywności, uwzględniając w nich udział żeber. Przykładowo podajemy równanie płyty ortotropowej z dużymi siłami w płaszczyźnie środkowej:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} =$$

$$= P(x,y) + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (9.13)$$

gdzie występują zastępcze sztywności D_1 , zależne od parametrów płyty i uzebrowania /por. [15], ss.332-335/.

Innym typem ustrojów powierzchniowych o korzystnych własnościach są płyty i powłoki wielowarstwowe. Najczęściej stosuje się ustroje trójwarstwowe, w których rozsunięte warstwy zewnętrzne /okładki/ zapewniają dobre własności mechaniczne. Wypełniacz /warstwa wewnętrzna/ ma parametry mechaniczne znacznie gorsze niż okładki /np. $E_w \approx 0,01 E$ /, lecz za to ma np. dobre własności izolacyjne. Taki wypełniacz jest podatny na odkształcenia postaciowe, co nie pozwala stosować hipotez K-L. Hipoteza odcinka normalnego jest zastępowana hipotezą odcinka łamanego /rys.9.9b/, a analiza lokalnej utraty stateczności /rys.9.9c/ wymaga rozważenia ścisłości wypełniacza.

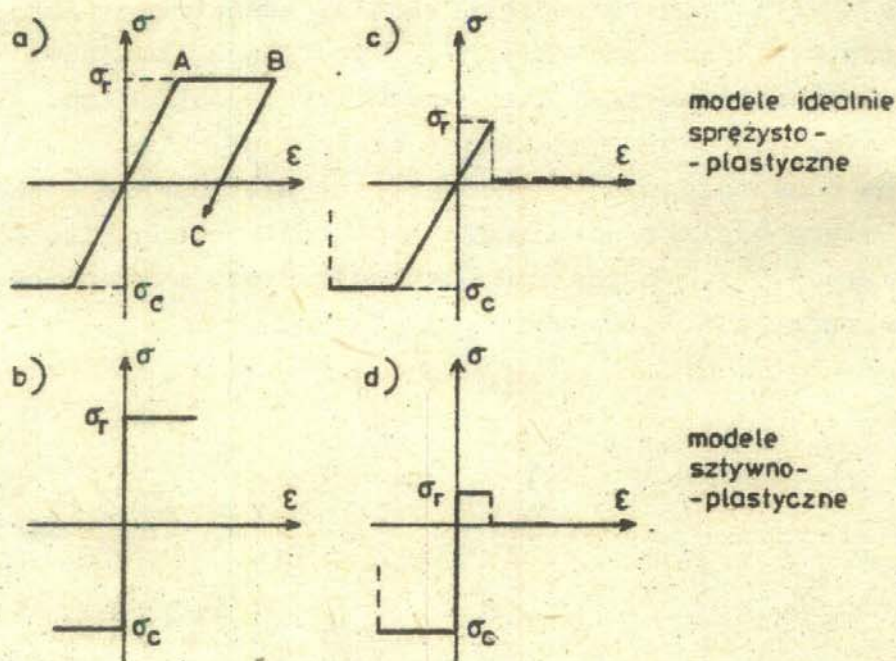


Rys.9.9. Zginanie i lokalne wyboczenie powłoki trójwarstwowej

Należy dodać, że w przypadku coraz częściej stosowanych powłok z tworzyw sztucznych należy brać pod uwagę zarówno anizotropię jak też podatność na odkształcenia postaciowe.

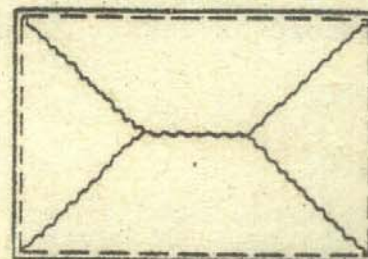
9.3.2. Ustroje niesprężyste

Dążenie do pełniejszego wykorzystania nośności konstrukcji skłania do dopuszczenia odkształceń przekraczających granicę proporcjonalności, a nawet plastyczności materiału. Aby uprościć analizę korzystamy z różnych modeli materiału. Na rys.9.10 pokazano stosowane idealizacje dla stanu jednoosiowego naprężenia. Pokazaliśmy modele idealnie sprężysto-plastyczne i sztywno-plastyczne, przyjmowane do obliczenia konstrukcji wykonanych ze stali lub betonu.



Rys.9.10. Modele dla jednoosiowego stanu naprężeń w stali i betonie

Teoria nośności granicznej w ustrojach powierzchniowych korzysta z podejścia statycznego lub kinematycznego. Przy budowaniu pól kinematycznie dopuszczalnych przemieszczeń uogólnia się koncepcje przegubów plastycznych na tzw. linie załomów /rys.9.11/. Tej problematyce poświęcono wiele prac; szereg rozwiązań można znaleźć w [17].



Rys.9.11. Linie załomów w płycie sztywno-plastycznej obciążonej równomiernie

Analiza sprężysto-plastyczna jest bardziej złożona, gdyż wymaga rozpatrywania stref sprężystych i uplastycznionych, zarówno w odniesieniu do powierzchni środkowej jak też wzdłuż grubości ustroju powierzchniowego. Daleszą komplikacją jest konieczność uwzględniania lokalnych odciażeń /część B-C wykresu rozciągania na rysunku 9.10a/. Wszystko to powoduje, że nawet najprostsze przykłady jest trudno obliczać /por. [13]/.

9.3.3. Drgania ustrojów powierzchniowych

Zgodnie z założeniami ograniczyliśmy się do obciążeń przykładanych statycznie. Jeśli jednak podczas obciążania konstrukcji powstają duże prędkości i przyspieszenia /lub równoważnie energia kinetyczna jest porównywalna z energią potencjalną/, to nie możemy pominąć w obliczeniach sił bezwładności $-\rho h \ddot{w}$ i tłumienia $-2\beta \dot{w}$. Równanie izotropowej płyty zginanej przyjmuje postać:

$$D \nabla^4 w + 2\beta \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t), \quad (9.14)$$

gdzie ρ jest gęstością materiału, a β współczynnikiem tłumienia wiskotycznego /proporcjonalnego do prędkości/.

Analiza równania (9.14) jest złożona ze względu na pochodne cząstkowe i bogactwo warunków granicznych /brzegowych i początkowych/. Tutaj przytaczamy jedynie analizę drgań swobodnych. W tym celu przyjmujemy $\beta = 0$ i $p = 0$ oraz rozwiązanie zakładamy w postaci funkcji o rozdzielonych zmiennych:

$$w = W(x, y) \cdot T(t), \quad (9.15)$$

co prowadzi do równania:

$$(\nabla^4 W - k^4 W) \cdot T = 0, \quad (9.16)$$

W szczególnym przypadku płyty prostokątnej, przegubowo podpartej możemy przyjąć rozwiązanie $W(x, y)$ w postaci podwójnego szeregu trygonometrycznego, a $T(t)$ w postaci funkcji sinusoidalnej:

$$w(x, y, t) = \underbrace{(A_{ij} \sin \alpha_i x \sin \beta_j y)}_{W(x, y)} \cdot \underbrace{\sin \omega t}_{T(t)}. \quad (9.15a)$$

Funkcja $T(t) = \sin \omega t$ spełnia warunki początkowe $T(0) = 0$, $\dot{T}(0) = \omega$.

Z przyrównania do zera nawiasu po lewej stronie równania (9.16) otrzymujemy rozwiązanie:

$$k^4 \equiv \frac{\rho h}{D} \omega^2 = \pi^4 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)^2, \quad (9.17)$$

skąd otrzymujemy wzór na częstość drgań własnych:

$$\omega_{ij} = \pi^2 \left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots \quad (9.18)$$

Rozdzielenie zmiennych można wykonać ponadto dla drgań harmoniczych, (również wymuszonych). Dochodzimy w ten sposób do analizy zagadnień brzegowych lub do obliczania wartości i wektorów własnych. Korzystamy przy tym najczęściej z różnych metod przybliżonych lub numerycznych.

W bardziej złożonych przypadkach drgań nieharmonicznych pozostają jedynie metody numerycznego całkowania odpowiednich równań ruchu.

Szereg rozwiązań można znaleźć w monografiach [10, 14].

9.3.4. Duże ugięcia płyt i powłok

W niektórych konstrukcjach dopuszczamy duże ugięcia. Tak jest w przypadku niektórych przekryć lub poszyc. Jeśli ograniczamy się do tzw. umiarkowanie dużych ugięć $w_{\max} \approx h$, to możemy posługiwać się nieliniowymi równaniami kinematycznymi tylko dla odkształceń powierzchni środkowej. W przypadku powłok mało wyniosłych przyjmujemy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

a więc dochodzą człony, które znamy z analizy płyt ściskanych /p.2.8.2/.

W płytach $R_1 \rightarrow \infty$ i odpowiednikiem równań (6.69) dla umiarkowanie dużych ugięć są tzw. równania Karmana [15], str.378:

$$\nabla^4 F = - \frac{E}{2} L(w, w), \quad (9.20)$$

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} + \frac{h}{D} L(w, F),$$

gdzie występuje funkcja nieliniowa:

$$L(a, b) = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}. \quad (9.21)$$

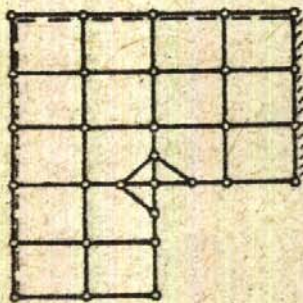
Widać, że w równaniach (9.20) występuje silne sprzężenie między funkcją ugięcia w i funkcją naprężenia F .

Oprócz zagadnień stateczności powłok analiza nieliniowa czasem jest niezbędna w powłokach mało wyniosłych, gdy $f/h \leq 6$, gdzie f jest strzałką, a h grubością powłoki.

Duże przemieszczenia mogą powstać na skutek uplastycznienia lub pełzania powłoki. W takim przypadku analiza jest bardzo złożona i może być prowadzona wyłącznie metodami numerycznymi.

9.3.5. Metoda elementów skończonych

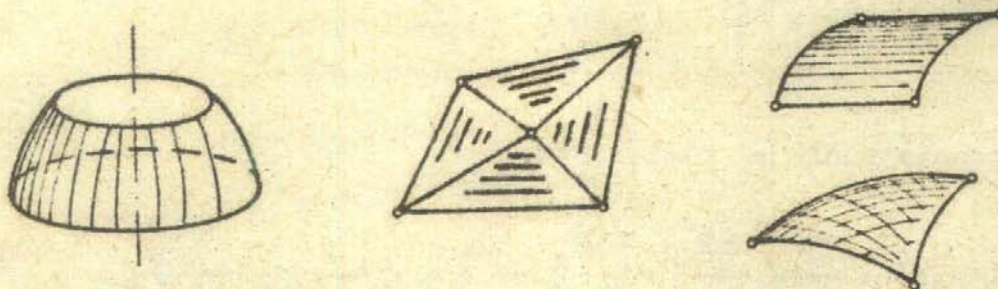
W wielu miejscach odwoływaliśmy się do metod numerycznych. Wynika to



Hys.9.12. Podział płyty na elementy skończone

ze złożoności równań i kształtów powłok. Obecnie do obliczeń stosuje się najczęściej metodę elementów skończonych /MES/. Ta metoda polega na podziale ustroju powierzchniowego na podobszary /elementy skończone/, w których aproksymujemy pola przemieszczeń i/lub naprężeń odpowiednio dobranymi funkcjami dopuszczalnymi. Jako podstawowe przyjmujemy wielkości węzłowe /przemieszczenia i lub siły przekrojowe/, które są stopniami swobody funkcji dopuszczalnych.

Na rys.9.12 pokazano podział płyty na elementy trójkątne, czworo- i pięcioboczne. W urządzeniach powierzchniowych posługujemy się różnymi typami elementów skończonych. Stosuje się elementy obrotowo-symetryczne, płaskie, pojedynczo i podwójnie zakrzywione /rys.9.13/.



Rys.9.13. Typy elementów skończonych do analizy urządzeń powierzchniowych

MES uogólniła podejścia znane w mechanice konstrukcji pod nazwą metody przemieszczeń, sił i mieszanej. Ze względu na łatwość algorytmizacji i automatyzacji powszechnie stosuje się wersję przemieszczeniową MES.

MES jest w tej chwili wszechwładnie panującą metodą analizy konstrukcji, gdyż szczególnie dobrze nadaje się do wykorzystywania obliczeń na emc. Szczegółowy, a zarazem przystępny opis metody można znaleźć w [19], a jej dostosowanie do liniowej analizy urządzeń powierzchniowych zostało omówione w [18].

MES jest przedmiotem oddzielnych wykładów na wielu uczelniach. Mamy nadzieję, że tak samo będzie na Politechnice Krakowskiej i na naszym Wydziale.

10. L I T E R A T U R A

- [1] P. Csonka: Powłoki cienkie - stan bionowy. Arkady, Warszawa 1969.
- [2] A.P. Filin: Elementy teorii obołoczek. Leningrad 1975.
- [3] W. Flüge: Powłoki - obliczenia statyczne. Arkady, Warszawa 1972.
- [4] K. Girkmann: Dźwigary powierzchniowe. Arkady, Warszawa 1957.
- [5] Z. Kączkowski: Płyty. Arkady, Warszawa 1968, wyd. 1; wyd.2, 1980.
- [6] N.W. Kołkunow: Podstawy obliczenia powłok sprężystych. Kraków 1973.
- [7] W. Krzys, M. Życzkowski: Sprężystość i plastyczność. Warszawa, PWN 1962.
- [8] H. Lundgren: Powłoki walcowe. Arkady, Warszawa 1963.
- [9] W. Nowacki: Dźwigary powierzchniowe. PWN, Warszawa 1979.
- [10] W. Nowacki: Dynamika budowli. Arkady, Warszawa 1972, wyd.2.
- [11] J. Orkisz: Komputeryzacja metody różnic skończonych. Mechanika i Komputer, t.4, ss.7-69, Warszawa 1981.
- [12] D. Rüdiger, J. Urban: Łupiny walcowe o przekroju kołowym. Arkady, Warszawa 1958.
- [13] W.W. Sokołowski: Teoria plastyczności. Tłum. z jęz. ros. Moskwa-Leningrad 1950. PWN, Warszawa 1957.
- [14] R. Solecki, J. Szymkiewicz: Układy prętowe i powierzchniowe - obliczenia dynamiczne. Arkady, Warszawa 1964.
- [15] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: Teoria płyt i powłok. Arkady, Warszawa 1962.
- [16] S.P. Timoshenko, J.N. Gere: Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa 1963.
- [17] Teoria plastyczności, praca zbiorowa pod red. W. Olszaka, P. Perzyny, A. Sawczuka. PWN, Warszawa 1965.
- [18] Z. Waszczyszyn, Z. Reipert: Dźwigary powierzchniowe, rozdz.9, Mechanika konstrukcji - ujęcie komputerowe, T.2. Arkady, Warszawa 1984.
- [19] O.C. Zienkiewicz: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972.
- [20] N.W. McLachlan: Funkcje Bessela dla inżynierów. PWN, Warszawa 1964.

D.1. Wzory różnicowe

Dla ułatwienia rozważymy najpierw zadanie jednowymiarowe. Przy wyprowadzaniu wzorów różnicowych można skorzystać z rozwinięcia funkcji w szereg Taylora, przyjmując dalej uproszczenie, że zarówno wartości funkcji, jak i pochodne są liczone w tych samych węzłowych punktach. Przyjmujemy także stały krok Δx .

Do rozpisania pochodnej 1-go i 2-go rzędu mogą być użyte trzy punkty węzłowe, oznaczone dalej indeksami $-1, 0, 1$.

Rozpisujemy wartość funkcji w skrajnych punktach przy użyciu rozwinięcia w szereg Taylora wokół punktu 0 :

$$f_{+1} = f_0 + f'_0 \Delta x + f''_0 \frac{\Delta x^2}{2} + \dots,$$

$$f_{-1} = f_0 - f'_0 \Delta x + f''_0 \frac{\Delta x^2}{2} + \dots,$$

Rozwiązując ten układ względem pochodnych f'_0 , f''_0 otrzymujemy schematy różnicowe:

$$f'_0 = -\frac{1}{2\Delta x}(f_{+1} - f_{-1}), \quad f''_0 = \frac{1}{\Delta x^2}(f_{+1} - 2f_0 + f_{-1})$$

Błąd popełniany przy stosowaniu takich schematów różnicowych może być określony na podstawie członu najniższego rzędu względem Δ , który nie był uwzględniony w rozwinięciu. W tym celu wstawiamy z powrotem rozszerzone o jeden składnik wyrażenie na f_{+1} i f_{-1} :

$$f_{+1} = f_0 + f'_0 \Delta x + f''_0 \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + f'''_0 \cdot \frac{\Delta x^3}{6}$$

$$f_{-1} = f_0 - f'_0 \Delta x + f''_0 \frac{\Delta x^2}{2} - f'''_0 \frac{\Delta x^3}{6}$$

na przykład do wzoru na pierwszą pochodną:

$$\frac{1}{2\Delta x^2} (f_{+1} - f_{-1}) = \frac{1}{2\Delta x} (2 f'_0 \Delta x + f''_0 \frac{\Delta x^3}{3})$$

i otrzymujemy:

$$f'_0 = \frac{1}{2\Delta x} (f_{+1} - f_{-1}) - f''_0 \frac{\Delta x^2}{6}.$$

Określony został więc błąd, jaki popełniamy stosując zamiast pierwszej pochodnej, odpowiedni iloraz różnicowy. Wynosi on $E = -\frac{1}{6} f''_0 \Delta x^2$ i jest podany w tabl. D1.1 w trzeciej kolumnie.

Podobnie można wyprowadzić ilorazy różnicowe odpowiadające pochodnym wyższego rzędu oraz oszacować błędy przy użyciu iloczynu pochodnej odpowiedniego rzędu liczonej w punkcie centralnym i potęgi kroku siatki.

Zestawienie ważniejszych wzorów jest treścią tabl. D1.1.

Tablica D1.1

f_0^l	Współczynniki	Błąd E
f'_0	$(-1 \quad +1) \frac{1}{2\Delta x}$	$-\frac{1}{6} f''_0 \Delta x^2$
f''_0	$(+1 \quad -2 \quad +1) \frac{1}{\Delta x^2}$	$-\frac{1}{12} f'''_0 \Delta x^2$
f'''_0	$(-1 \quad +2 \quad -2 \quad +1) \frac{1}{2\Delta x^3}$	$-\frac{1}{4} f^{IV}_0 \Delta x^2$
f^{IV}_0	$(+1 \quad -4 \quad 6 \quad -4 \quad +1) \frac{1}{\Delta x^4}$	$-\frac{1}{6} f^{V}_0 \Delta x^2$
	punkty -2 -1 0 +1 +2	

D.2. Wzory Gaussa-Weingarstena

Wyprowadzimy wzory na pochodne wektorów osi ortogonalnego układu lokalnego $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_n)$ względem współrzędnych ξ_1, ξ_2 . Pochodne te są wektorami w układzie lokalnym:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \xi_\alpha} = (e_{i,\alpha})_1 \vec{e}_1 + (e_{i,\alpha})_2 \vec{e}_2 + (e_{i,\alpha})_n \vec{e}_n, \quad (\text{D.2.1})$$

gdzie w dalszym ciągu indeksy przyjmują wartości $i = 1, 2, n$; $\alpha = 1, 2$.
Najpierw korzystamy z równości:

$$\frac{\partial (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)}{\partial \xi_\alpha} = 0,$$

która po rozpisaniu daje następujące związki:

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \xi_\alpha} &= - \vec{e}_j \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \xi_\alpha} \quad \text{dla } i \neq j, \\ \vec{e}_i \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial \xi_\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.2.2})$$

Warunek przemienności różniczkowania /warunek Schwarz'a/:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \xi_2 \partial \xi_1}$$

możemy napisać w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} (A_2 \vec{e}_2) = \frac{\partial}{\partial \xi_2} (A_1 \vec{e}_1),$$

lub po wykonaniu różniczkowania iloczynu $A_\alpha \vec{e}_\alpha$:

$$\vec{e}_2 \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + A_2 \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1} = \vec{e}_1 \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + A_1 \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_2} .$$

Po wymnożeniu tego związku kolejno przez \vec{e}_1 i \vec{e}_2 otrzymujemy:

$$\vec{e}_1 \vec{e}_2 \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + A_2 \vec{e}_1 \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1} = \vec{e}_1 \vec{e}_2 \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + A_1 \vec{e}_1 \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_2} ,$$

$$\vec{e}_2 \vec{e}_2 \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} + A_2 \vec{e}_2 \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1} = \vec{e}_1 \vec{e}_2 \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + A_1 \vec{e}_2 \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_2} .$$

Biorąc pod uwagę ortogonalność wersorów $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ i wykorzystując wzory (D.2), dochodzimy do zależności:

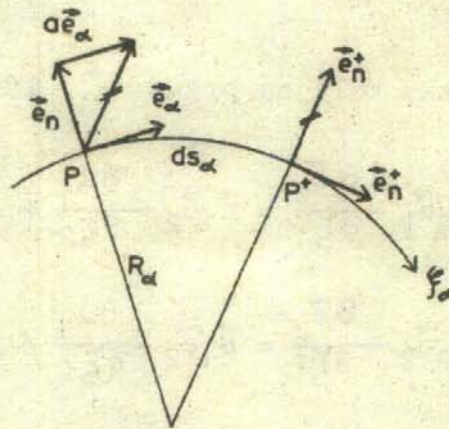
$$\vec{e}_1 \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} , \quad \vec{e}_2 \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} .$$

Dalsze zależności otrzymujemy przez obliczenie składowych wersora \vec{e}_n^+ na płaszczyźnie określonej wersorami $(\vec{e}_n, \vec{e}_\alpha)$, na której leży łuk ds_α linii współrzędnych ξ_α :

$$\begin{aligned} \vec{e}_n^+ &= \vec{e}_n + \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \xi_\alpha} d\xi_\alpha = \\ &= \vec{e}_n + a \vec{e}_\alpha . \end{aligned}$$

Z rys.D.1 wynika zależność:

$$\frac{a}{|\vec{e}_n^+|} = \frac{ds_\alpha}{R_\alpha} \longrightarrow a = \frac{A_\alpha}{R_\alpha} d\xi_\alpha .$$



Rys.D.1. Wyrażenie e_n^+ w układzie $(\vec{e}_n, \vec{e}_\alpha)$

Porównując obliczone przyrosty:

$$\frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \xi_\alpha} d\xi_\alpha = \vec{e}_\alpha \frac{A_\alpha}{R_\alpha} d\xi_\alpha$$

i mnożąc obydwie strony przez \vec{e}_α , dochodzimy do poszukiwanej zależności:

$$\vec{e}_\alpha \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \xi_\alpha} = \frac{A_\alpha}{R_\alpha} \quad (\text{D.2.4})$$

Zależność (D.2.4) otrzymaliśmy przez przejście od punktu P do bliskiego punktu P^+ , leżącego na płaszczyźnie określonej wektorami $(\vec{e}_n, \vec{e}_\alpha)$. Przy takim rozumowaniu wektor $\partial \vec{e}_n / \partial \xi_\alpha$ jest kolinearny z wektorem \vec{e}_α , a więc jest równocześnie ortogonalny do \vec{e}_β :

$$\vec{e}_\beta \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \xi_\alpha} = 0 \quad \text{dla } \alpha \neq \beta \quad (\text{D.2.5})$$

Związki (D.2.2-2.5) określają składowe macierzy $(e_{i,\alpha})_j$, które występują we wzorze (D.2.1). Pokazujemy to na przykładzie współrzędnych wektora $\partial \vec{e}_1 / \partial \xi_1$:

$$(e_{1,1})_1 \equiv \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1} \vec{e}_1 = 0,$$

$$(e_{1,1})_2 \equiv \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1} \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2},$$

$$(e_{1,1})_n \equiv \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1} \vec{e}_n = -\vec{e}_1 \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \xi_1} = -\frac{A_1}{R_1}.$$

W podobny sposób obliczamy dalsze współrzędne.

Wracając do postaci (D.2.1) otrzymujemy następujące wzory:

$$\frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \vec{e}_2 - \frac{A_1}{R_1} \vec{e}_n, \quad \frac{\partial \vec{e}_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \vec{e}_2,$$

$$\frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_1} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} \vec{e}_1, \quad \frac{\partial \vec{e}_2}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \xi_1} \vec{e}_1 - \frac{A_2}{R_2} \vec{e}_n,$$

$$\frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \xi_1} = \frac{A_1}{R_1} \vec{e}_1, \quad \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \xi_2} = \frac{A_2}{R_2} \vec{e}_2. \quad (D.2.6)$$

Pierwsze cztery wzory na pochodne $\partial \vec{e}_\alpha / \partial \xi_\alpha$ są w geometrii różniczkowej nazywane wzorami Gaussa, a wzory na pochodne $\partial \vec{e}_n / \partial \xi_\alpha$ wzorami Weingartena.





BIBLIOTEKA GŁÓWNA

W 47421

PK 349/83 - 100 000 egz.

Politechnika Krakowska
Biblioteka Główna



100000118044



BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ