CZASOPISMO TECHNICZNE Ś
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
z. 1-Ś/2007
ISSN 0011-4561
ISSN 1897-6336

KRZYSZTOF STERNIK*

SYMULACJE BADAŃ ELEMENTOWYCH PIASKU OPISANEGO PRAWEM PRZYROSTOWO NIELINIOWYM

SIMULATIONS OF ELEMENT TESTS ON SANDS DESCRIBED BY INCREMENTALLY NON-LINEAR LAW

Streszczenie

Przyrostowo nieliniowe konstytutywne prawo interpolacyjne Darve'a należy do grupy związków hypoplastycznych. W niniejszym artykule przedstawiono ideę sformułowania i symulacje numeryczne ściskania piasków w aparacie trójosiowego ściskania. Pokazano zdolności modelu do opisu zmian objętościowych gruntów o różnym zagęszczeniu i upłynnienia luźnego piasku.

Słowa kluczowe: *grunt*, *model konstytutywny*, *sprężysto-plastyczność*, *upłynnienie*

Abstract

Incrementally nonlinear constitutive law proposed by Darve falls into a category of hypoplastic relationships for soils. The paper presents the idea of the law and numerical simulations of triaxial compression of sand. The capability of the model for description of volume variations of soils at various densities as well as for liquefaction of loose sand has been presented.

Keywords: *soil*, *constitutive model*, *elasto-plasticity*, *liquefaction*

*Dr inż. Krzysztof Sternik, Katedra Geotechniki, Wydział Budownictwa, Politechnika Śląska, Gliwice.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Oznaczenia

σ – naprężenie
ε – odkształcenie
i, j – indeksy o wartościach 1, 2, 3
α, β, γ – indeksy o wartościach 1–6
Z – oznaczenie strefy tensorowej
$\mathbf{M}^Z$ – tensor konstytutywny w strefie tensorowej Z
$\mathbf{N}^+$ – macierz charakterystyk materiałowych przy ściskaniu
$\mathbf{N}^-$ – macierz charakterystyk materiałowych przy rozciąganiu
E^+, E^- – moduł odkształcenia przy ściskaniu/rozciąganiu
ν^+, ν^- – współczynnik Poissona przy ściskaniu/rozciąganiu
p' – efektywne naprężenie średnie
q – naprężenie dewiatorowe
ε_v – odkształcenie objętościowe
R – stopień ograniczenia zmian objętościowych próbki gruntu

1. Wstęp

Prawa konstytutywne formułowane dla gruntów wiążą ze sobą stan naprężenia i odkształcenia. Są one tworzone na podstawie różnych założeń, z których najbardziej ogólnym jest wrażliwość bądź niewrażliwość na skalę czasu.

Formułowanie praw konstytutywnych, z matematycznego punktu widzenia, sprowadza się w ogólnym przypadku do poszukiwania funkcjonału określającego bieżący stan naprężenia $\boldsymbol{\sigma}(t)$ na podstawie całej historii deformacji do chwili t

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{F}\left[\mathbf{F}(\tau)\right], \quad -\infty < \tau \le t \tag{1}$$

gdzie:

$\mathbf{F}(\tau)$ – jest gradientem deformacji, tj. macierzą Jacobiego położenia $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X},\tau)$ cząstki materialnej $\mathbf{X}$ w czasie τ.

Jak powszechnie wiadomo, geomateriały (w tym grunty) wykazują nieliniową reakcję na obciążenie, a także nieodwracalność odkształceń. Oznacza to, że funkcjonał F dla materiałów sprężysto-plastycznych musi być nieliniowy i nieróżniczkowalny [6], co wiąże się z problemami natury matematycznej przy określeniu odpowiedzi materiału na obciążenie.

Środkiem zaradczym na te trudności jest formułowanie praw konstytutywnych w postaci przyrostowej. W takim przypadku historia deformacji wyrażona jest przez parametry o wartościach znanych na początku danego przyrostu obciążenia i zmieniających się w sposób ciągły pod wpływem przyrostu obciążenia. W tym sformułowaniu kierujemy się zasadą, że małe obciążenie wywołuje małą, jednoznacznie określoną odpowiedź w przedziale czasu dt. Zatem istnieje tensorowa funkcja wiążąca ze sobą przyrost naprężenia, odkształcenia i czasu, a także parametry pamięci $\boldsymbol{\chi}$ (zmienne wewnętrzne lub inaczej parametry wzmocnienia)

$$\mathbf{H}_{\chi}\left(d\boldsymbol{\varepsilon}, d\boldsymbol{\sigma}, dt\right) = 0 \tag{2}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Jeżeli założyć dodatkowo, że odpowiedź materiału jest niezależna od prędkości obciążenia, to zależność (2) pomiędzy obciążeniem i odpowiedzią materiału (przyrostami odkształcenia i naprężenia) redukuje się do zależności funkcyjnej

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}_{\chi}\left(d\boldsymbol{\sigma}\right) \tag{3a}$$

lub

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}_{\chi}^{-1}\left(d\boldsymbol{\varepsilon}\right) \tag{3b}$$

W ogólnym przypadku, dla materiału sprężysto-plastycznego funkcja $\mathbf{G}_{\chi}$ (lub $\mathbf{G}_{\chi}^{-1}$) jest jednorodna stopnia 1, co oznacza, że

$$\forall \lambda > 0 : \ \mathbf{G}_{\chi}\left(\lambda d\boldsymbol{\sigma}\right) = \lambda \mathbf{G}_{\chi}\left(d\boldsymbol{\sigma}\right) \tag{4}$$

nieliniowa

$$\forall d\boldsymbol{\sigma} : \ \mathbf{G}_{\chi}(d\boldsymbol{\sigma}) \neq -\mathbf{G}_{\chi}(-d\boldsymbol{\sigma}) \tag{5}$$

i anizotropowa, wyrażając zmienność reakcji na obciążenie w zależności od usytuowania kierunków głównych naprężenia (lub odkształcenia w przypadku $\mathbf{G}_{\chi}^{-1}$).

W ogólności, dla funkcji $f\,(x,\ y,\ z,\ ...,\ t)$ jednorodnej stopnia 1 zachodzi twierdzenie Eulera

$$f\left(x, y, z, \ldots, t\right) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \cdots + t\frac{\partial f}{\partial t} \tag{6}$$

Zatem dla materiałów niewrażliwych na skalę czasu (nielepkich) zależności (3) mogą być przedstawione w formie

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\partial \mathbf{G}_{\chi}}{\partial\left(d\boldsymbol{\sigma}\right)} d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M}_{\chi}\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{\left\| d\boldsymbol{\sigma} \right\|}\right) d\boldsymbol{\sigma} \\ d\boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \mathbf{G}_{\chi}^{-1}}{\partial\left(d\varepsilon\right)} d\varepsilon = \mathbf{P}_{\chi}\left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{\left\| d\boldsymbol{\varepsilon} \right\|}\right) d\varepsilon \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie

$$\left\| d\boldsymbol{\sigma} \right\| = \sqrt{d\boldsymbol{\sigma}_{ij} d\boldsymbol{\sigma}_{ij}} \qquad \text{i} \qquad \left\| d\varepsilon \right\| = \sqrt{d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}}$$

Styczne sprężysto-plastyczne tensory $\mathbf{M}_{\chi}$ i $\mathbf{P}_{\chi}$ zależą od parametrów pamięci χ i od kierunków przyrostów $d\boldsymbol{\sigma}$ i $d\boldsymbol{\varepsilon}$.

Wziąwszy pod uwagę symetrię tensorów naprężenia i odkształcenia, wygodnie jest zapisać je jako wektory $\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}$, gdzie wskaźnik α przyjmuje wartości od 1 do 6

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{Bmatrix} \qquad \text{i} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{8}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Wówczas równania (7) zapisujemy w następującej postaci

$$\begin{aligned} d\varepsilon_\alpha &= \mathbf{M}_{\alpha\beta} d\boldsymbol{\sigma}_\beta \\ d\boldsymbol{\sigma}_\alpha &= \mathbf{P}_{\alpha\beta} d\varepsilon_\beta \end{aligned} \tag{9}$$

2. Strefy tensorowe

Przyrostowa nieliniowość praw konstytutywnych, świadcząca o tworzeniu się odkształceń trwałych pod obciążeniem, wyraża się zależnością tensorów **M** i **P** od kierunków przyrostów, odpowiednio naprężenia i odkształcenia. Sposób, w jaki tensory te zależą od kierunków odpowiednich przyrostów może stanowić podstawę klasyfikacji wszystkich praw konstytutywnych. W związku z tym wygodnie jest wprowadzić pojęcie stref tensorowych [1].

Rozważmy opis zachowania się materiału w postaci (3a) i funkcję $\mathbf{G}_\chi$. Strefą tensorową nazywamy część przestrzeni przyrostów naprężeń, w której $\mathbf{G}_\chi$ zależy liniowo od przyrostu naprężenia. Innymi słowy, w danej strefie tensorowej zależność między $d\boldsymbol{\varepsilon}$ a $d\boldsymbol{\sigma}$ jest przyrostowo liniowa.

Oznaczywszy strefę tensorową jako Z, jej definicja przedstawia się następująco

$$\forall \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{\| d\boldsymbol{\sigma} \|} \in Z : \ \mathbf{M}\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{\| d\boldsymbol{\sigma} \|} \right) \equiv \mathbf{M}^Z \tag{10}$$

W strefie tensorowej Z równania konstytutywne charakteryzują się jednoznacznie określoną postacią tensora $\mathbf{M}^Z$. Cała przestrzeń przyrostów naprężenia podzielona jest na strefy tensorowe w postaci hiperostrosłupów o wspólnym wierzchołku, przy czym na styku dwu stref musi być zachowany warunek ciągłości w postaci

$$\forall \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{\| d\boldsymbol{\sigma} \|} \in Z_1 \cap Z_2 : \ \mathbf{M}^{Z_1} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{\| d\boldsymbol{\sigma} \|} = \mathbf{M}^{Z_2} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{\| d\boldsymbol{\sigma} \|} \tag{11}$$

W klasycznych sprężysto-plastycznych związkach konstytutywnych wyróżnić można dwie strefy tensorowe – macierz materiałowa ma inną postać przy obciążeniu i odciążeniu (zazwyczaj zakładanym jako sprężyste). W tych sformułowaniach warunek ciągłości pomiędzy procesem obciążenia i odciążenia jest zapewniony przez założenie obciążenia neutralnego.

Zależność tensora **M** od kierunku obciążenia może być wyrażona w sposób dyskretny – w postaci skończonej liczby przyporządkowań różnych postaci tensorów **M** do odpowiadających im stref tensorowych (związki „przyrostowo przedziałami liniowe") bądź jako zmieniająca się w sposób ciągły postać tensora **M** w zależności od kierunku przyrostu obciążenia (związki „przyrostowo nieliniowe").

3. Interpolacyjne prawo nieliniowe

Macierze materiałowe równań konstytutywnych (9), po rozwinięciu w szereg potęgowy, mogą być przedstawione w następującej formie

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta}\left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}}{\|d\boldsymbol{\sigma}\|}\right)=\mathbf{M}^{0}_{\alpha\beta}+\mathbf{M}^{1}_{\alpha\beta\gamma}\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}}{\|d\boldsymbol{\sigma}\|}+\mathbf{M}^{2}_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}}{\|d\boldsymbol{\sigma}\|}\frac{d\boldsymbol{\sigma}_{\delta}}{\|d\boldsymbol{\sigma}\|}+\cdots$$
$$\mathbf{P}_{\alpha\beta}\left(\frac{d\varepsilon_{\gamma}}{\|d\varepsilon\|}\right)=\mathbf{P}^{0}_{\alpha\beta}+\mathbf{P}^{1}_{\alpha\beta\gamma}\frac{d\varepsilon_{\gamma}}{\|d\varepsilon\|}+\mathbf{P}^{2}_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{d\varepsilon_{\gamma}}{\|d\varepsilon\|}\frac{d\varepsilon_{\delta}}{\|d\varepsilon\|}+\cdots \tag{12}$$

Każde z równań (12) przedstawia 36 funkcji sześciu zmiennych (odpowiednio składowych przyrostów naprężenia lub odkształcenia). Są to ogólne postacie macierzy konstytutywnych materiałów nielepkich.

Po ograniczeniu szeregów (12) tylko do dwóch pierwszych składników, równania konstytutywne przyjmą postać

$$d\varepsilon_{\alpha}=\mathbf{M}^{0}_{\alpha\beta}d\boldsymbol{\sigma}_{\beta}+\frac{1}{\|d\boldsymbol{\sigma}\|}\mathbf{M}^{1}_{\alpha\beta\gamma}d\boldsymbol{\sigma}_{\beta}d\boldsymbol{\sigma}_{\gamma}$$
$$d\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}=\mathbf{P}^{0}_{\alpha\beta}d\varepsilon_{\beta}+\frac{1}{\|d\varepsilon\|}\mathbf{P}^{1}_{\alpha\beta\gamma}d\varepsilon_{\beta}d\varepsilon_{\gamma} \tag{13}$$

Pierwsze wyrazy równań (13) opisują reakcję sprężystą na obciążenie, zaś w całości stanowią przyrostowo nieliniowe prawa konstytutywne drugiego rzędu zaproponowane przez Darve'a [1, 3]. Dodatkowo, w celu uzupełnienia opisu, czyni się jeszcze trzy założenia:

– związki (13) są ortotropowe, co oznacza symetrię względem płaszczyzn trójwymiarowego układu współrzędnych;
– nieliniowość postulowana jest tylko w odniesieniu do wybranych składowych tensorów $\mathbf{M}^{1}_{\alpha\beta\gamma}$ i $\mathbf{P}^{1}_{\alpha\beta\gamma}$, tj.

$$\begin{matrix}\mathbf{M}^{1}_{\alpha\beta\gamma}=0\\ \mathbf{P}^{1}_{\alpha\beta\gamma}=0\end{matrix}\quad\text{dla}\quad\beta\neq\gamma \tag{14}$$

– moduły ścinania są sprężyste, co oznacza, że

$$\begin{matrix}\mathbf{M}^{1}_{\alpha\beta\gamma}=0\\ \mathbf{P}^{1}_{\alpha\beta\gamma}=0\end{matrix}\quad\text{dla}\quad\beta\geq 4,\ \gamma\geq 4 \tag{15}$$

W szczególności, uwzględniając powyższe postulaty, równania (13a) przyjmują następującą postać

$$\begin{Bmatrix}d\varepsilon_{11}\\ d\varepsilon_{22}\\ d\varepsilon_{33}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{N}^{+}+\mathbf{N}^{-}\right]\cdot\begin{Bmatrix}d\sigma_{11}\\ d\sigma_{22}\\ d\sigma_{33}\end{Bmatrix}+\frac{1}{2\|d\boldsymbol{\sigma}\|}\left[\mathbf{N}^{+}-\mathbf{N}^{-}\right]\cdot\begin{Bmatrix}d\sigma^{2}_{11}\\ d\sigma^{2}_{22}\\ d\sigma^{2}_{33}\end{Bmatrix}$$
$$d\varepsilon_{12}=\frac{1}{2G_{3}}d\sigma_{12} \tag{16}$$
$$d\varepsilon_{23}=\frac{1}{2G_{1}}d\sigma_{23}$$
$$d\varepsilon_{31}=\frac{1}{2G_{2}}d\sigma_{31}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

gdzie

$$\mathbf{N}^{+}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1^{+}} & -\dfrac{\nu_2^{1+}}{E_2^{+}} & -\dfrac{\nu_3^{1+}}{E_3^{+}} \\ -\dfrac{\nu_1^{2+}}{E_1^{+}} & \dfrac{1}{E_2^{+}} & -\dfrac{\nu_3^{2+}}{E_3^{+}} \\ -\dfrac{\nu_1^{3+}}{E_1^{+}} & -\dfrac{\nu_2^{3+}}{E_2^{+}} & \dfrac{1}{E_3^{+}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}^{-}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{E_1^{-}} & -\dfrac{\nu_2^{1-}}{E_2^{-}} & -\dfrac{\nu_3^{1-}}{E_3^{-}} \\ -\dfrac{\nu_1^{2-}}{E_1^{-}} & \dfrac{1}{E_2^{-}} & -\dfrac{\nu_3^{2-}}{E_3^{-}} \\ -\dfrac{\nu_1^{3-}}{E_1^{-}} & -\dfrac{\nu_2^{3-}}{E_2^{-}} & \dfrac{1}{E_3^{-}} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Elementy macierzy **N** tworzą tzw. uogólnione styczne moduły odkształcenia i styczne współczynniki Poissona

$$E_i=\left.\frac{\partial\sigma_i}{\partial\varepsilon_i}\right|_{\sigma_j,\,\sigma_k} \qquad \nu_i^{j}=-\left.\frac{\partial\varepsilon_j}{\partial\varepsilon_i}\right|_{\sigma_j,\,\sigma_k} \tag{18}$$

Charakterystyki te wyznaczane są na podstawie analizy tzw. uogólnionych ścieżek trójosiowego obciążenia. Są to wyniki obciążania próbek gruntu w aparacie prawdziwego trójosiowego ściskania, w trakcie którego zmienia się tylko jedna składowa naprężenia głównego, zaś dwie pozostałe są ustalone i w ogólności mogą przyjmować różne wartości. Występujące w macierzach (17) znaki „+" i „–" odnoszą się odpowiednio do ściskania w i-tym kierunku $(d\sigma_i > 0)$ lub rozciągania $(d\sigma_i < 0)$. Odpowiedź na dowolną ścieżkę obciążenia jest aproksymowana na podstawie znajomości odpowiedzi gruntu na ścieżki trójosiowego obciążenia.

Wyniki badań laboratoryjnych dla uogólnionych ścieżek trójosiowych są aproksymowane przez wyrażenia analityczne. Na ich podstawie wyznaczane są, jako pochodne, styczne wartości uogólnionych modułów Younga i współczynników Poissona (18). W formułach tych, których szczegółowa specyfikacja znacznie przekracza ramy niniejszego artykułu, występują stałe materiałowe oraz parametry pamięci (zmieniając się zarówno w sposób skokowy, jak i ciągły). Ogółem, stałych materiałowych w modelu przyrostowo nielinio-wym Darve'a występuje 19, co stanowi poważne utrudnienie przy jego kalibracji.

Postać związków (16) wskazuje, że są to równania jednorodne stopnia 1 względem $d\boldsymbol{\sigma}$, zatem opisują reakcję na obciążenie niezależną od czasu. Są to również związki nieliniowe względem $d\boldsymbol{\sigma}$. W elementarnym cyklu obciążenia przyrostem naprężeń głównych $d\boldsymbol{\sigma} = \{d\sigma_1,\ d\sigma_2,\ d\sigma_3\}^T$ i odciążenia tym samym przyrostem, ale o przeciwnym znaku $-d\boldsymbol{\sigma}$, równania (16) przewidują powstanie odkształceń trwałych (plastycznych)

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{Bmatrix}=\frac{1}{\|d\boldsymbol{\sigma}\|}\left[\mathbf{N}^{+}-\mathbf{N}^{-}\right]\cdot\begin{Bmatrix} d\sigma_{11}^2 \\ d\sigma_{22}^2 \\ d\sigma_{33}^2 \end{Bmatrix} \tag{19}$$

Po odjęciu odkształceń trwałych od całkowitych przyrostów odkształceń głównych wygenerowanych po obciążeniu, otrzymujemy odwracalną część odkształceń

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\left[\mathbf{N}^{+}+\mathbf{N}^{-}\right]\cdot\begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{Bmatrix}-\frac{1}{2\|d\boldsymbol{\sigma}\|}\left[\mathbf{N}^{+}-\mathbf{N}^{-}\right]\cdot\begin{Bmatrix} d\sigma_1^2 \\ d\sigma_2^2 \\ d\sigma_3^2 \end{Bmatrix} \tag{20}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Jak widać część odwracalna odkształceń nie ma charakteru sprężystego, który wynika z pierwszego członu równań (20). Zatem, inaczej niż w klasycznej teorii sprężysto-plastyczności, trwałe odkształcenia powstające w wyniku cyklu „obciążenie–odciążenie" wynikają z charakteru równań konstytutywnych, a nie założenia zasady dekompozycji odkształceń na część sprężystą i plastyczną.

4. Symulacje badań trójosiowego ściskania piasku z drenażem

Możliwości symulacyjne przyrostowo nieliniowego prawa interpolacyjnego Darve'a zaprezentowane zostaną na przykładzie przewidywań reakcji na konwencjonalne trójosiowe ściskanie piasku o różnym początkowym stopniu zagęszczenia.

Przez konwencjonalne trójosiowe ściskanie rozumieć należy obciążenie walcowej próbki gruntu w aparacie trójosiowego ściskania przy ustalonej wartości ciśnienia w komorze równej naprężeniu poziomemu σ'_3. Zmianie podlega jedynie wartość składowej pionowej naprężenia σ'_1 wywołana wysuwaniem tłoka (ryc. 1). W próbce wytworzony jest zatem osiowo-symetryczny stan naprężenia i odkształcenia.

Gdy zapewniona jest swobodna zmiana objętości próbki, tj. gdy z próbki nasyconej wodą może ona swobodnie odpływać lub gdy badany jest grunt suchy, mówimy o warunkach badania „z drenażem". Wówczas ze względu na niewystępowanie ciśnienia wody w porach, naprężenia całkowite σ równe są naprężeniom efektywnym σ'.

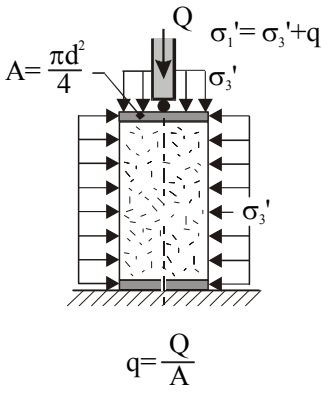
Wyniki badań reprezentowane są zwykle za pomocą niezmienników naprężenia i odkształcenia, które w warunkach badań w aparacie trójosiowego ściskania przyjmują postać:

– naprężenia średnie $p' = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3) = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + 2\sigma'_3)$

– naprężenie dewiatorowe $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$

– odkształcenie objętościowe $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$

– odkształcenie postaciowe $\varepsilon_s = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$

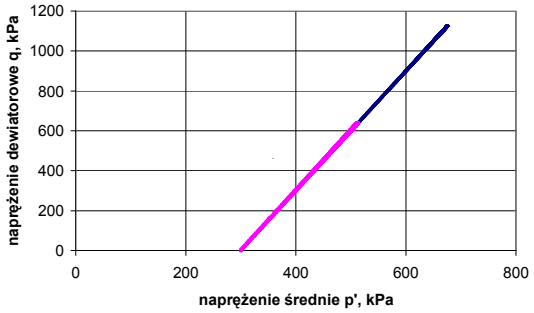


Ryc. 1. Schemat próbki gruntu w aparacie trójosiowego ściskania
Fig. 1. Scheme of a sample in a triaxial apparatus

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Zwykle w mechanice gruntów przyjmuje się konwencję oznaczeń, która zakłada, że ściskanie wywołuje dodatnia wartość naprężenia, a towarzyszy mu zmniejszenie objętości określane dodatnią zmianą odkształcenia objętościowego.

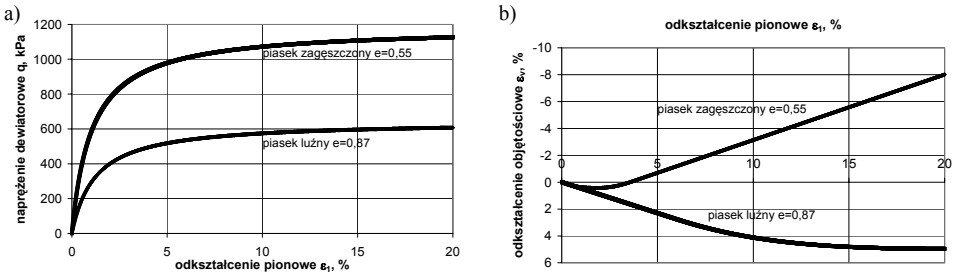
Konwencjonalne ściskanie trójosiowe charakteryzuje się nachyleniem ścieżki naprężenia $q/p' = 3$ (ryc. 2).



Ryc. 2. Ścieżka naprężenia w konwencjonalnym ściskaniu trójosiowym
Fig. 2. Stress path in conventional triaxial compression

Symulacje trójosiowego ściskania przeprowadzone zostały na zestawach parametrów odpowiadających piaskowi luźnemu i zagęszczonemu. Stopień zagęszczenia określają początkowe wartości wskaźnika porowatości, które wynoszą e_0 = 0,55 dla piasku zagęszczonego i e_0 = 0,87 dla piasku luźnego.

Różnice w prognozie zachowania się piasków są zgodne ze znanymi wynikami doświadczeń. Piasek zagęszczony wykazuje większą wytrzymałość na ścinanie (wyższa wartość naprężenia dewiatorowego przy zniszczeniu) – ryc. 3a.



Ryc. 3. Wyniki symulacji ściskania z drenażem w konwencjonalnym aparacie trójosiowym
Fig. 3. Results of simulations of drained compression in a conventional triaxial apparatus

Zasadnicza różnica jest widoczna również w prognozie zmian objętościowych. Piasek luźny zagęszcza się w całym zakresie obciążenia, zaś piasek zagęszczony, po początkowej fazie dogęszczania, wykazuje rozluźnienie (spadek wartości odkształcenia objętościowego) – ryc. 3b.

5. Statyczne upłynnienie piasku luźnego

Liczne eksperymenty wykazały, że luźny piasek obciążany w warunkach bez drenażu wykazuje spadek naprężenia średniego oraz szczytową wartość naprężenia dewiatorowego,

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

po osiągnięciu której wytrzymałość na ścinanie spada do 0, zaś ciśnienie wody w próbce wzrasta w sposób ciągły podczas całego obciążenia. Takie zjawisko nazywamy statycznym upłynnieniem. Nazwa wywodzi się z obserwacji zachowania się próbek gruntu nasyconego wodą w warunkach bez drenażu podczas monotonicznego obciążenia. Badania tego typu należą do standardowo wykonywanych w laboratoriach mechaniki gruntów od początków rozwoju tej dyscypliny.

Jednak, pomimo iż w naturze najczęściej obserwowane jest upłynnienie piasków nawodnionych, nienawodnienie jest warunkiem koniecznym do wystąpienia tego zjawiska. Rezultaty uzyskane przez Laniera i Blocha [2, 5] pokazują, że upłynnienie może wystąpić w suchym piasku luźnym. Warunkiem koniecznym do wystąpienia upłynnienia jest ograniczenie zmian objętościowych.

Rozważając obciążenie w układzie osi głównych, przy założeniu osiowej symetrii, ograniczenie zmian objętościowych uzyskujemy, narzucając zależność odkształceń poziomych od odkształceń pionowych za pomocą stałej R [2]:

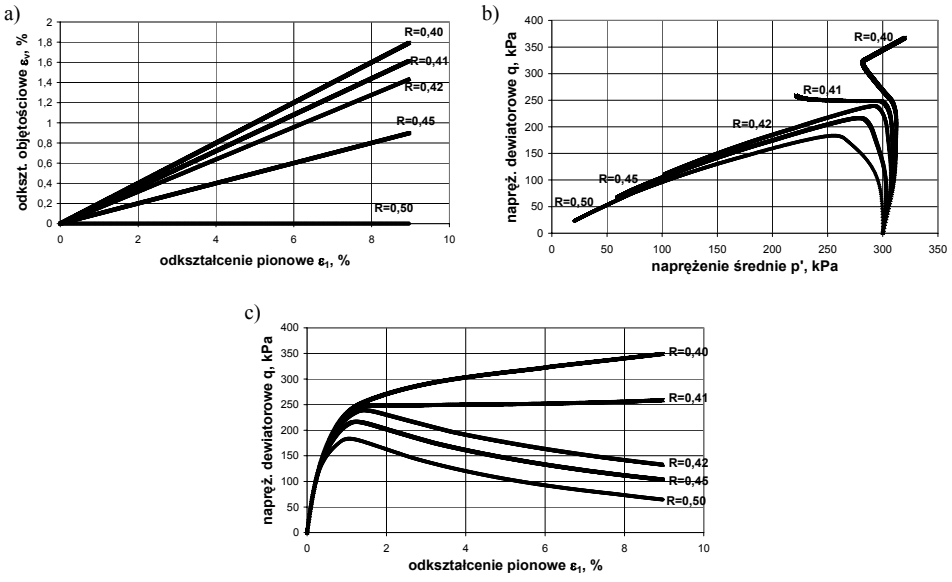
$$d\varepsilon_1 = \text{const}, \quad d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 = -Rd\varepsilon_1 \tag{21}$$

Wówczas zmiany objętościowe dane są jako

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3 = (1-2R)d\varepsilon_1 \tag{22}$$

Zauważmy, że przypadek, gdy $R = 1$ odpowiada zerowym odkształceniom objętościowym (obciążenie izochoryczne), najczęściej utożsamianym z badaniem w warunkach bez drenażu. Dla $0 < R < 1$ objętość się zwiększa (dylatacja), a gdy $R > 1$ objętość się zmniejsza (kontraktacja).

Na rycinie 4 przedstawione są wyniki symulacji ściskania w aparacie trójosiowym przy narzuconych różnych stopniach zmian objętościowych R = 0,40; 0,41; 0,42; 0,45; 0,50.



Ryc. 4. Wyniki symulacji ściskania w konwencjonalnym aparacie trójosiowym luźnego piasku przy wymuszonych różnych zmianach objętościowych

Fig. 4. Simulations of triaxial compression of loose sand at imposed different volumetric variations

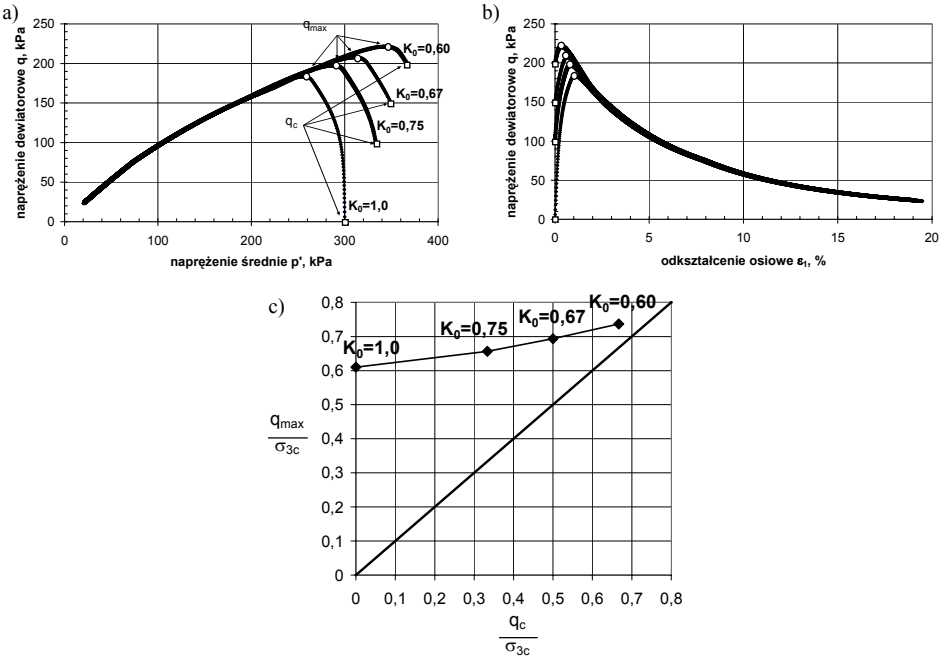
BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Symulacje wykonane zostały z zastosowaniem nieliniowego prawa interpolacyjnego Darve'a i pokazują zdolność tego prawa do przewidywania upłynnienia luźnego piasku.

Na rycinie 4a zaprezentowano ścieżki odkształcenia ilustrujące wymuszone zmiany objętościowe. W analizowanym przypadku upłynnienie następuje dla $R > 0{,}41$, o czym świadczy zwrot ścieżek naprężenia w kierunku początku układu współrzędnych (ryc. 4b) i wystąpienie wytrzymałości szczytowej w charakterystykach ścinania (ryc. 4c).

6. Wpływ początkowego stanu naprężenia na inicjację upłynnienia

Na upłynnienie stwierdzone w konwencjonalnych badaniach trójosiowych piasków luźnych bez drenażu mają wpływ następujące czynniki [4]: stopień zagęszczenia (początkowa wartość wskaźnika porowatości e_0), ciśnienie w komorze aparatu, wartość początkowego naprężenia dewiatorowego. Stwierdzono, że opór przeciwko upłynnieniu jest szczególnie wrażliwy na wartość początkową naprężenia dewiatorowego, od której następuje ścinanie próbki. Upłynnienie następuje tym łatwiej im wyższa jest wartość naprężenia dewiatorowego q_c zastosowanego do skonsolidowania próbki, od której rozpoczyna się ścinanie (ryc. 5a). Przy wysokich poziomach wartości q_c upłynnienie inicjuje się przy wzroście wartości naprężenia dewiatorowego o zaledwie kilka procent w stosunku do jego wartości. Raportowane wyniki wskazują, że początek upłynnienia był obserwowany przy niewielkich wartościach odkształcenia pionowego badanych próbek ($\varepsilon_1 \approx 1$–2%).



Ryc. 5. Wyniki symulacji upłynnienia piasku luźnego o różnym stopniu początkowej anizotropii
Fig. 5. Simulations of liquefaction of loose sand at various degree of initial anisotropy

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Wyższa wartość początkowa naprężenia q_c odpowiada większemu stopniu anizotropii skonsolidowania próbki wyrażonej współczynnikiem $K_0 = \sigma'_3 / \sigma'_1$. W oczywisty sposób $K_0 = 1{,}0$ odpowiada izotropowemu skonsolidowaniu próbki.

Numeryczne symulacje ściskania trójosiowego z zastosowaniem nieliniowego prawa interpolacyjnego Darve'a, odpowiadające opisanym powyżej spostrzeżeniom poczynionym na bazie eksperymentów, potwierdzają zdolność tego typu prawa konstytutywnego do poprawnego opisu upłynnienia statycznego.

Symulacje przeprowadzono dla jednego zestawu parametrów odpowiadającego piaskowi luźnemu. Przyjęto początkowe wartości naprężeń poziomych $\sigma'_2 = \sigma'_3 = 300$ kPa i wymuszono kontrolę odkształceń wynikającą z warunków bez drenażu $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0{,}5\,\varepsilon_1$. Zmieniane były początkowe wartości naprężenia pionowego $\sigma'_1 = 300$ kPa; 400 kPa; 450 kPa; 500 kPa, uzyskując w ten sposób różny stopień anizotropii początkowej, wyrażonej wartościami współczynnika $K_0 = 1{,}0$; 0,75; 0,67; 0,60.

Wyniki obliczeń przedstawiono na ryc. 5. Ścieżki naprężeń (ryc. 5a) oraz charakterystyki ścinania (ryc. 5b) wykazują charakterystyczną dla upłynnienia wytrzymałość szczytową q_{max}. Stwierdzona doświadczalnie tendencja do zmniejszania się przyrostu naprężenia dewiatorowego niezbędnego do zainicjowania upłynnienia jest pokazana również za pomocą diagramu na ryc. 5c. Mniejsza wrażliwość na upłynnienie wyrażona jest mniejszym pionowym dystansem między punktami reprezentującymi stopień anizotropii początkowej a linią poprowadzoną pod kątem 45°.

7. Podsumowanie

Model przyrostowo nieliniowy, którego podstawy zaprezentowane zostały w niniejszej pracy stanowi alternatywę dla klasycznych sformułowań opisu sprężysto-plastycznego zachowania się gruntów. Jest jednym z modeli, które dały początek grupie hypoplastycznych praw konstytutywnych. Przedstawione w pracy obliczenia numeryczne pokazały jego główne cechy: poprawny opis zmian objętościowych gruntów o różnym stopniu początkowego zagęszczenia (dylatacji, kontraktacji), zdolność do przewidywania upłynnienia piasków.

Przytoczony został także warunek wystąpienia upłynnienia w piaskach luźnych, które powszechnie jest kojarzone z nasyceniem gruntu. W istocie, do zaniku naprężenia średniego między ziarnami piasku niezbędne jest ograniczenie zmian objętościowych podczas obciążania.

Istotną wadą prezentowanego modelu fizycznego jest jego trudna kalibracja, wymagająca określenia wartości 19 parametrów. W trakcie symulacji badań elementowych piasków ujawnia się niezdolność do opisu osłabienia gruntów silnie zagęszczonych. Autor modelu tłumaczy ten niedostatek celowym pominięciem, ze względu na wciąż istniejącą niepewność na ile obserwowane w badaniach osłabienie jest wynikiem właściwości samego gruntu, a na ile niejednorodności pola naprężeń i odkształceń w próbce podczas badania.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Literatura

[1] Darve F., *An incrementally non-linear constitutive law of second order and its application to localization*, Mechanics of Engineering Materials, C.S. Desai and R.H. Gallagher Eds., John Wiley & Sons, 1984, 179-196.

[2] Darve F., *Liquefaction phenomenon*: *Modelling*, *stability and uniqueness*, [in:] Verification of Numerical Procedures for the Analysis of Soil Liquefaction Problems, Arulanandan & Scott Eds., Balkema, Rotterdam 1994, 1305-1319.

[3] Darve F., Labanieh S., *Incremental constitutive law for sands and clays: simulation of monotonic and cyclic tests*, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 6, 1982, 243-275.

[4] Kramer S.L., Seed H.B., *Initiation of Soil Liquefaction Under Static Loading Conditions*, J. Geotech. Eng., Vol. 114, No. 4, 1988, 412-430.

[5] Lanier J., Bloch J.F., *Essais à volume constant réalises sur une presse tridimensionnelle*, Ed. Reynouard J.M., Report of GRECO Geomaterials, INSA, Lyon 1989, 240-243.

[6] Owen D.R., Wiliams W.O., *On the time derivatives of equilibrated response functions*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 33, No. 4, 1969, 288-306.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ