CZASOPISMO TECHNICZNE M
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

z. 1-M/2008
ISSN 0011-4561
ISSN 1897-6328

URSZULA FERDEK*

WPŁYW ZDERZEŃ NA DRGANIA POPRZECZNE I SKRĘTNE WIRNIKÓW

INFLUENCE OF IMPACTS ON THE TRANSVERSE AND TORSIONAL VIBRATION OF ROTORS

S t r e s z c z e n i e

W niniejszym artykule przeprowadzono analizę jakościową nieliniowego układu o 3 stopniach swobody, opisującego drgania wirnika. Dopuszczono możliwość występowania zderzeń między elementem wirującym i stojanem. Zastosowano metody numerycznego całkowania oraz metody analizy widmowej do zbadania wpływu częstości wymuszenia i ugięcia statycznego wirnika na typ drgań i liczbę zderzeń.

Słowa kluczowe: *drgania nieliniowe*, *chaos*

A b s t r a c t

The paper discusses the analysis of a three-degree-of-freedom non-linear model which describes the vibrations of a rotor. The model takes into account the impacts between the rotating element and a limiter of motion. Using the methods of numerical integration and spectrum analysis, the influence of the excitation frequency and static loads on the type of vibrations, number of impacts of the system has been studied.

Keywords: *non-linear vibrations*, *chaos*

*Mgr inż. Urszula Ferdek, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

1. Wstęp

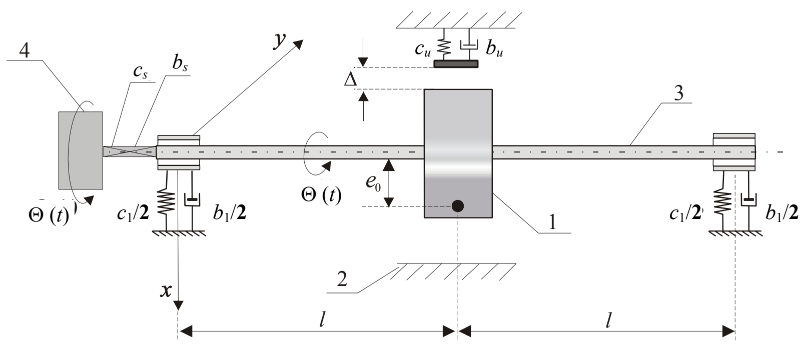
Drgania poprzeczne wirników są najczęściej efektem resztkowych niewyważeń. W przypadku wirników, których obroty są wyższe od krytycznych, dochodzi podczas procesów przejściowych do uderzeń wirnika w stojan. W pewnych warunkach pod wpływem sił udarowych wzbudzają się drgania prawie okresowe lub chaotyczne.

W pracach dotyczących zagadnień zderzeń w omawianym układzie zwykle badany jest uproszczony model wirnika typu Jeffcott [1–4, 6, 8–10]. Jego analiza pozwala wyjaśnić wiele interesujących zjawisk wywołanych zderzeniami elementów układu. Przyjmując do badań taki model, Karpenko i in. [6], a także Sun, Xu i Zhou [10] wykazują, że przy dużym ugięciu statycznym lub dużej amplitudzie wymuszenia bezwładnościowego ustalają się drgania podharmoniczne lub chaotyczne. W pracach [6, 10] badany jest wpływ częstości wymuszenia oraz sztywności zamocowania stojanu na typ drgań. Chu i Zhang [1] analizują wpływ siły ciężkości, Edwards i in. [2] badają wpływ sztywności skrętnej wału, natomiast Feng i Zhang [3] zwracają uwagę na formy wzbudzanych drgań.

Poniżej podjęto próbę zbadania wpływu zderzeń na drgania poprzeczne i skrętne w układzie wirnik–stojan. Analizowano ruch wirnika przy sztywno zamocowanym stojanie.

2. Model układu

W celu zbadania wpływu zderzeń na drgania wirnika przyjęto model przedstawiony na rysunku 1. Wirnik 1 w kształcie sztywnego dysku o masie m i promieniu R jest zamocowany na bezmasowym wale 3, którego końce podtrzymują elastyczne podpory. Odległości wirnika od podpór są jednakowe i wynoszą l. Pomiędzy wirnikiem a nieruchomym stojanem jest luz Δ. Parametry b i c określają, odpowiednio, tłumienie i sztywność podpór wału, b_s i c_s tłumienie i sztywność skrętną wału, natomiast b_u i c_u to parametry określające proces zderzenia wirnika ze stojanem. Drgania poprzeczne opisują współrzędne x i y punktu O (rys. 2), natomiast drgania skrętne kąt $\psi = \Theta - \Theta_0$. W modelu uwzględniono ugięcie statyczne wirnika d w kierunku pionowym oraz wpływ niewyważenia (parametr e_0). Założono także, że prędkość obrotowa Ω zewnętrznego urządzenia napędzającego wirnik (silnik) jest stała.



Rys. 1. Model fizyczny układu: 1 – wirnik, 2 – stojan, 3 – wał, 4 – silnik
Fig. 1. Dynamic model of the system: 1 – rotor, 2 – stator, 3 – shaft, 4 – motor

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Równania różniczkowe ruchu wygodnie jest wyprowadzić z równań Lagrange'a II-go rodzaju. W tym celu wzór określający energię kinetyczną wirnika

$$T = \frac{1}{2} m V_S^2 + \frac{1}{2} I_s \dot{\Theta}^2 \tag{1}$$

przekształćmy, wykorzystując związki

$$\begin{aligned} V_{Sx} &= \dot{x} - e_0 \dot{\Theta} \sin\Theta = \dot{x} - e_0 (\Omega + \dot{\psi}) \sin(\Omega t + \psi) \\ V_{Sy} &= \dot{y} + e_0 \dot{\Theta} \cos\Theta = \dot{y} + e_0 (\Omega + \dot{\psi}) \cos(\Omega t + \psi) \end{aligned} \tag{2}$$

wynikające z zależności wektorowej między prędkościami punktów O i S. Kąt $\Theta = \Omega t + \psi$ jest tu całkowitym kątem obrotu wirnika. Po wprowadzeniu oznaczenia $I_O = I_S + m e_0^2$ otrzymamy

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \frac{1}{2} I_O (\Omega + \dot{\psi})^2 + m e_0 (\Omega + \dot{\psi}) [\dot{y} \cos(\Omega t + \psi) - \dot{x} \sin(\Omega t + \psi)] \tag{3}$$

Zakładając dalej, że x, y i ψ są współrzędnymi uogólnionymi, siły uogólnione opisują następujące wzory

$$\begin{aligned} Q_x &= -b\dot{x} - cx - F_r \cos\varphi + F_t \sin\varphi \\ Q_y &= -b\dot{y} - cy - F_r \sin\varphi - F_t \cos\varphi \\ Q_\psi &= -b_s \dot{\psi} - c_s \psi - F_t R \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie tg$\varphi = y/(x + d)$ (rys. 2). Występujące we wzorach (4) siły F_r i F_t są składowymi biegunowymi oddziaływania stojanu na wirnik w momencie zderzenia. Przyjęto dalej [4], że składową radialną siły udarowej opisuje wzór

$$F_r(r, \dot{r}) = [c_u (r - \Delta) + b_u \dot{r}] H(r - \Delta) H[c_u (r - \Delta) + b_u \dot{r}] \tag{5}$$

gdzie $H(.)$ jest funkcją Heaviside'a. Zgodnie ze wzorem (5) składowa F_r przyjmuje dla $r > \Delta$ tylko wartości dodatnie.

Pomiędzy składową radialną i transwersalną założono związek

$$F_t = \mu_0 F_r \operatorname{sgn}[r\dot{\varphi} + R(\dot{\psi} + \Omega)] \tag{6}$$

Występujące we wzorach (5), (6) współrzędne biegunowe oraz ich pochodne można wyznaczyć ze wzorów

$$r = \sqrt{(x + d)^2 + y^2} \qquad \dot{r} = [(x + d)\dot{x} + y\dot{y}]/r \qquad r\dot{\varphi} = [(x + d)\dot{y} - y\dot{x}]/r \tag{7}$$

Z równań Lagrange'a II-go rodzaju wynika następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + F_r \cos\varphi - F_t \sin\varphi &= m e_0 [(\Omega + \dot{\psi})^2 \cos\Theta + \ddot{\psi} \sin\Theta] \\ m\ddot{y} + b\dot{y} + cy + F_r \sin\varphi + F_t \cos\varphi &= m e_0 [(\Omega + \dot{\psi})^2 \sin\Theta - \ddot{\psi} \cos\Theta] \\ I_O \ddot{\psi} + b_s \dot{\psi} + c_s \psi + F_t R &= m e_0 [\ddot{x} \sin(\Omega t + \psi) - \ddot{y} \cos(\Omega t + \psi)] \end{aligned} \tag{8}$$

Po wprowadzeniu bezwymiarowego czasu $\tau = \omega_0 t$, gdzie $\omega_0 = \sqrt{c/m}$ jest częstością drgań własnych wirnika oraz bezwymiarowych współrzędnych $u_1 = x/\Delta$, $u_2 = y/\Delta$ i $u_3 = \psi$, układ (8) przyjmuje postać

BPK BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

$$u_1'' + 2\zeta_1 u_1' + u_1 + f_\rho\,(u_1 + \sigma - \mu u_2)/\rho = e[(\omega + u_3')^2 \cos(\omega\tau + u_3) + u_3'' \sin(\omega\tau + u_3)]$$

$$u_2'' + 2\zeta_1 u_2' + u_2 + f_\rho\,(u_2 + \mu u_1 + \mu\sigma)/\rho = e[(\omega + u_3')^2 \sin(\omega\tau + u_3) - u_3'' \cos(\omega\tau + u_3)] \quad (9)$$

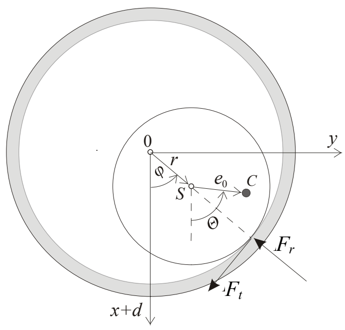
$$u_3'' + 2\omega_s \zeta_s u_3' + \omega_s^2 u_3' + \mu\gamma_0 f_\rho = \lambda e[(\omega + u_3')^2 \sin(\omega\tau + u_3) - u_3'' \cos(\omega\tau + u_3)]$$

przy czym

$$f_\rho = [\gamma_u(\rho - 1) + 2\zeta_u \rho']H(\rho - 1)\,H[\gamma_u(\rho - 1) + 2\zeta_u \rho'] \qquad \mu = \mu_0 \operatorname{sgn}[\rho\varphi' + \rho_0(\omega + u_3')] \quad (10)$$

gdzie

$$\rho = \sqrt{(u_1 + \sigma)^2 + u_2^2}$$



Rys. 2. Związki kinematyczne
Fig. 2. Kinematics relations

Układ (9) jest układem równań nieliniowych głównie ze względu na siły będące rezultatem zderzeń wirnika z nieruchomym stojanem. Opisuje on drgania poprzeczne i skrętne wirnika. Rozwiązania układu (9) zależą istotnie od bezwymiarowych parametrów

$$\omega = \Omega/\omega_0 \qquad e = e_0/\Delta \qquad \sigma = d/\Delta \quad (11)$$

oraz w nieco mniejszym stopniu od pozostałych parametrów, zdefiniowanych następująco

$$\gamma_0 = mR\Delta/I_O \qquad \gamma_u = c_u/c \qquad \gamma_s = c_s m/cI_O \qquad \lambda = me_0\Delta/I_O \qquad \rho_0 = R/\Delta \quad (12)$$

$$\zeta_1 = b/2\sqrt{mc} \qquad \zeta_u = b_u/2\sqrt{mc_u} \qquad \zeta_s = b_s/2\sqrt{I_O c_s} \quad (13)$$

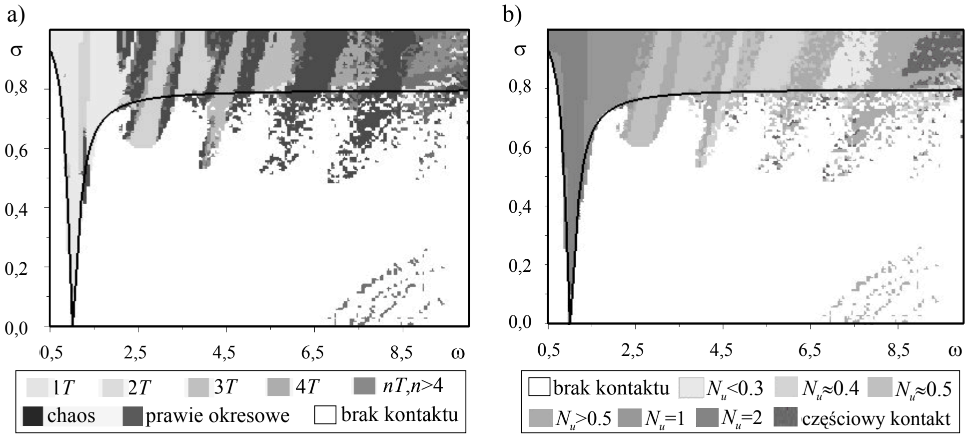
3. Rezultaty obliczeń

Poniżej przedstawiono wybrane rezultaty analizy jakościowej, prowadzonej metodami numerycznymi opisanymi w pracach [5, 7]. Do wyznaczenia rozwiązań równań (9) zastosowano metody numerycznego całkowania, a do określenia typów drgań metody analizy widmowej, bazujące na algorytmach szybkiej transformaty Fouriera. Ograniczono się do zbadania wpływu parametrów ω i σ, decydujących najczęściej o charakterze wzbudzanych drgań. W obliczeniach zostały przyjęte następujące wartości pozostałych parametrów: $e = 0{,}2$, $\gamma_0 = 0{,}1$, $\gamma_u = 50$, $\gamma_s = 2$, $\lambda = 0{,}005$, $\rho_0 = 100$, $\zeta_1 = 0{,}1$, $\zeta_u = 0{,}1$, $\zeta_s = 0{,}05$.

Na rysunku 3 przedstawiono wpływ częstości wymuszenia ω i ugięcia statycznego σ na typ drgań (rys. 3a)) oraz liczbę zderzeń (rys. 3b)). Na rysunkach naniesiono również krzy-

BPK BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

wą, wyznaczoną na podstawie analizy układu liniowego (bez zderzeń), a określającą ugięcie statyczne σ, dla którego wartość maksymalna współrzędnej r podczas drgań ustalonych jest równa luzowi $\Delta(r_{\max} = \Delta)$. W obszarach leżących poniżej tej krzywej analiza liniowa sugeruje brak zderzeń wirnika z ogranicznikiem, czyli w stanie ustalonym powinno się obserwować drgania harmoniczne.



Rys. 3. Wpływ parametrów ω i σ na: a) typ drgań, b) liczbę zderzeń
Fig. 3. Influence of parameters ω and σ on: a) the type of vibration, b) number of impacts

Badania układu nieliniowego wykazują jednak występowanie w tych obszarach innych typów ustalonych drgań, podczas których wirnik uderza w sposób regularny lub nieregularny w ogranicznik. Jest to rezultat procesów przejściowych – początkowo sporadyczne uderzenia wirnika w stojan przechodzą z czasem w systematycznie powtarzające się zderzenia wywołujące drgania o złożonym charakterze. Drgania takie zależą od warunków początkowych oraz od luzu Δ. W efekcie finalnym obszar drgań bez zderzeń jest oddzielony od pozostałych obszarów nieregularną krzywą.

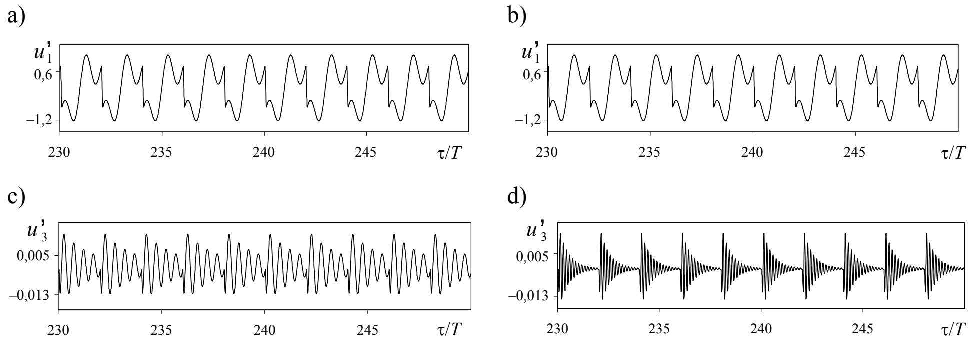
W szerokim zakresie rezonansowym (dla $0{,}5 < \omega < 2{,}3$) dominują drgania z częstością wymuszenia (drgania $1T$-okresowe) – w jednym okresie wymuszenia najczęściej obserwuje się pojedyncze uderzenia wirnika w ogranicznik ruchu ($N_u = 1$). W węższym zakresie, w pobliżu wartości $\omega = 1$, dochodzi także do częstszych zderzeń ($N_u > 1$). Wraz ze wzrostem wartości ω liczba uderzeń maleje, równocześnie drgania $1T$-okresowe przechodzą kolejno w drgania podharmoniczne drugiego, trzeciego i czwartego rzędu. Drgania podharmoniczne oddzielone są od siebie zakresami drgań chaotycznych.

Parametry γ_s, ζ_s, a także γ_0 i λ, decydujące o drganiach skrętnych wału, mają znikomy wpływ na przedstawione rezultaty analizy jakościowej. O typie drgań decydują zderzenia, których wystąpienie zależy od drgań poprzecznych. Drgania poprzeczne w małym stopniu zależą od drgań skrętnych. Fakt ten potwierdzają wyniki przedstawione na rys. 4.

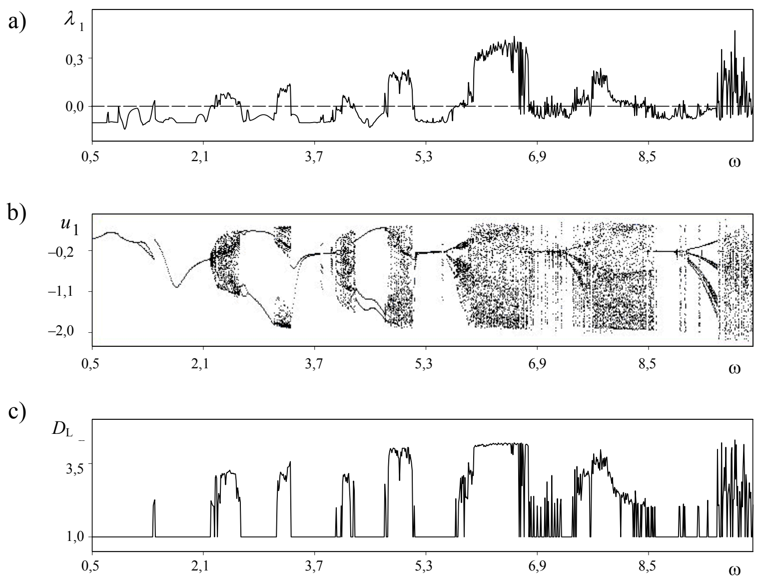
Mamy tu przypadek drgań okresowych (przyjęto $\omega = 3$, $\sigma = 0$ i $\gamma_u = 500$). Przebiegi czasowe drgań poprzecznych, otrzymane dla znacznie różniących się wartości parametru γ_s (bezwymiarowa sztywność skrętna), praktycznie są takie same (rys. 4a) dla $\gamma_s = 40$ i rys. 4b) dla $\gamma_s = 400$). Wpływ parametru γ_s uwidacznia się dopiero na wykresach drgań skręt-

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

nych (rys. 4c) i 4d), odpowiednio, dla γ_s = 40 i γ_s = 400). Cyklicznie powtarzające się zderzenia wywołują zanikające wykładniczo drgania skrętne. Częstość tych drgań zależy wyraźnie od parametru γ_s, który może być tu interpretowany jako kwadrat bezwymiarowej częstości skrętnej. W związku z tym okres drgań tłumionych, pokazanych na rys. 4d), jest 10 razy mniejszy od okresu przebiegu na rys. 4c).



Rys. 4. Wpływ parametru γ_s na przebiegi czasowe: a) i b) drgania gięte, c) i d) drgania skrętne
Fig. 4. Influence of parameter γ_s on the time history: a) i b) flexural vibrations, c) i d) torsional vibrations



Rys. 5. Wpływ parametru ω: a) wykładnik Lapunowa, b) diagram bifurkacyjny, c) wymiar Lapunowa
Fig. 5. Influence of parameter ω: a) Lapunov exponent, b) bifurcation diagram, c) Lapunov dimension

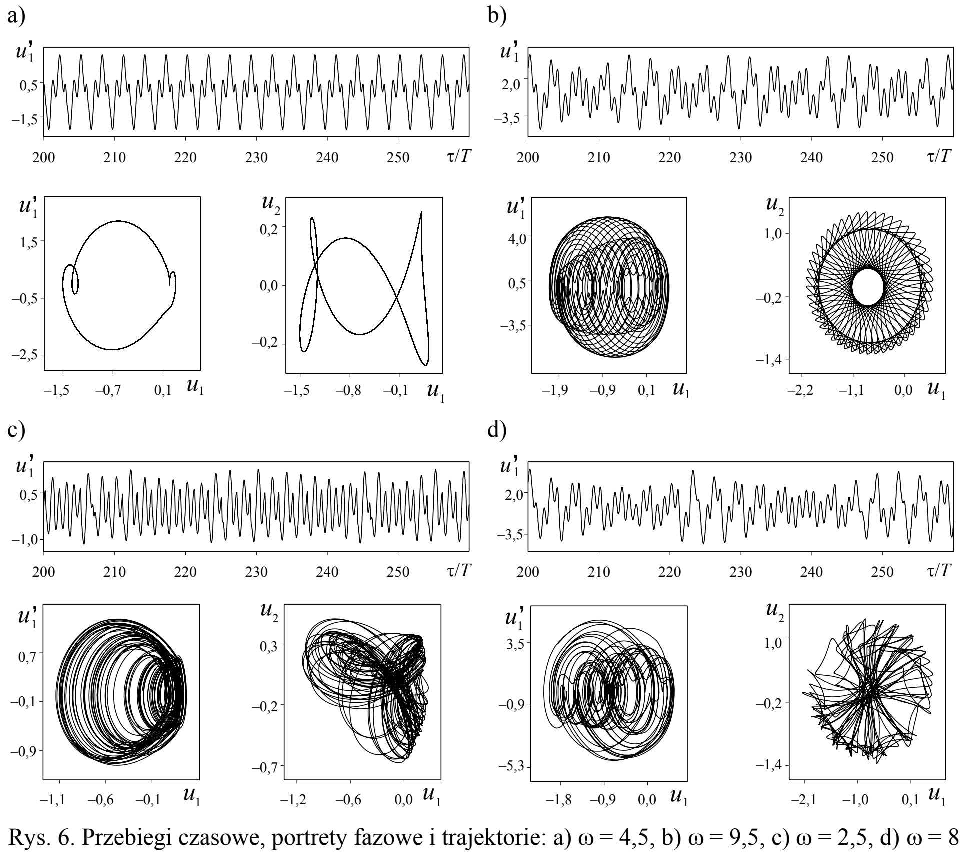
BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Na rysunku 5 przedstawiono porównanie wykresu największego wykładnika Lapunowa z diagramem bifurkacyjnym oraz zależność wymiaru Lapunowa od częstości wymuszenia. Do wyznaczenia wykładników zastosowano odpowiednio zmodyfikowany algorytm Wolfa [11], natomiast diagram sporządzono metodą stroboskopową, notując wartości przemieszczeń co okres wymuszenia. Diagram ten odpowiada przekrojowi obszaru (ω, σ) dla σ = 0,8 (rys. 3).

Wartość ujemna wykładnika Lapunowa (rys. 5a)) świadczy o niechaotycznej ewolucji układu, w odpowiednich zakresach częstości ω na diagramie można zaobserwować układy pojedynczych linii. Liczba linii n określa rząd drgań podharmonicznych (nT-okresowe).

Chaos występuje w przypadku dodatniego wykładnika Lapunowa, wówczas na diagramie rozkład punktów jest zbliżony do losowego, a wymiar Lapunowa przyjmuje wartość większą od jedności ($D_L > 1$).

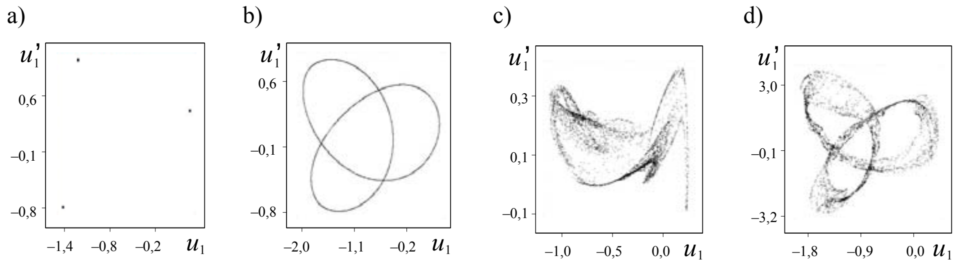
Na rysunku 6 przedstawiono przebiegi czasowe zmiennej $u_1'(t)$, portrety fazowe na płaszczyźnie (u_1, u_1') oraz trajektorie (u_1, u_2) dla drgań okresowych typu 1:3 (rys. 6a)), prawie okresowych (rys. 6b)) oraz dwóch typów drgań chaotycznych (rys. 6c) i 6d)). Przyjęto tu σ = 0,8.



Rys. 6. Przebiegi czasowe, portrety fazowe i trajektorie: a) ω = 4,5, b) ω = 9,5, c) ω = 2,5, d) ω = 8
Fig. 6. Time histories, phase planes and trajectories: a) ω = 4,5, b) ω = 9,5, c) ω = 2,5, d) ω = 8

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Trajektorie fazowe oraz trajektorie ruchu są krzywymi zamkniętymi tylko w przypadku drgań okresowych (rys. 6a)), w pozostałych przypadkach wypełniają one dość szczelnie pewne fragmenty odpowiednich płaszczyzn (dla większej przejrzystości na rys. 6 pokazano trajektorie w ograniczonym przedziale czasu).



Rys. 7. Mapy Poincaré ($\sigma = 0{,}8$): a) $\omega = 4{,}5$, b) $\omega = 9{,}5$, c) $\omega = 2{,}5$, d) $\omega = 8$
Fig. 7. Poincaré maps ($\sigma = 0{,}8$): a) $\omega = 4{,}5$, b) $\omega = 9{,}5$, c) $\omega = 2{,}5$, d) $\omega = 8$

Różne są też fazowe portrety stroboskopowe (w płaszczyźnie u_1, u_1') dla omawianych typów drgań – są to, odpowiednio, pojedyncze punkty (rys. 7a)), krzywa zamknięta (rys. 7b)) oraz fraktale w przypadku drgań chaotycznych (rys. 7c) i 7d)).

4. Wnioski

Z analizy numerycznej równań różniczkowych (9) można wyciągnąć następujące wnioski dotyczące zachowania się układu wirnik–stojan:

– Pokazany wpływ parametrów ω i σ na charakter drgań oraz liczbę zderzeń jest typowy dla układu wirnik–stojan. Dla innych wartości pozostałych parametrów układu kształty „obszarów” różnych jakościowo drgań ulegają tylko nieznacznej zmianie [8].
– Podczas drgań 1T-okresowych liczba zderzeń w okresie wymuszenia jest najczęściej liczbą całkowitą, większą lub równą jedności. W przypadku drgań podharmonicznych mamy do czynienia z rzadkimi zderzeniami, a w przypadku drgań chaotycznych liczba zderzeń dodatkowo zmienia się w sposób nieregularny co okres wymuszenia.
– Analiza wykładników Lapunowa oraz diagramu bifurkacyjnego prowadzi do podobnych wniosków. Analiza diagramu pozwala w przypadku drgań okresowych określić dodatkowo rząd drgań podharmonicznych; zaletą jest tu też znacznie mniejszy czas wymaganych obliczeń numerycznych.
– Skutkiem zderzeń wirnika ze stojanem są drgania skrętne wału. Istotny wpływ na amplitudy drgań mają tu parametry γ_0, γ_s, ζ_s i λ. Jednak ze względu na słabe sprzężenie dwóch pierwszych równań układu (9) z równaniem trzecim drgania poprzeczne w nieznacznym stopniu zależą od drgań skrętnych.

Literatura

[1] Chu F., Zhang Z., *Bifurcation and chaos in a rub-impact Jeffcott rotor system*, Journal of Sound and Vibration 210(1), 1998, 1-18.

BPK BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

[2] Edwards S., Lees A.W., Friswell M.I., *The influence of torsion on rotor/stator contact in rotating machinery*, Journal of Sound and Vibration 225, 4, 1999, 767-778.

[3] Feng Z.C., Zhang X.Z., *Rubbing phenomena in rotor – stator contact*, Chaos, Solitons and Fractals 14, 2002, 257-267.

[4] Ferdek U., *Wpływ zderzeń na drgania ustalone układu wirnik–stojan*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika z. 65, 2005, 109-116.

[5] Ferdek U., Łuczko J., *Analiza jakościowa układów wibroudarowych*, Czasopismo Techniczne z. 6-M/2003, 1-16.

[6] Karpenko E., Wiercigroch M., Cartmell M., *Regular and chaotic dynamics of a discontinuously nonlinear rotor system*, Chaos, Solitons and Fractals 13, 2002, 1231-1242.

[7] Łuczko J., *Metody numeryczne wyznaczania zakresów drgań podharmonicznych i chaotycznych*, Czasopismo Techniczne z. 11-M/2006, 39-62.

[8] Łuczko J., Ferdek U., Cupiał P., *Influence of geometrical restraints on the vibration of rotors*, Proc. of the 7th Conference on Dynamical Systems – Theory and Applications, Vol. 2, 2003, 605-612.

[9] Muszyńska A., Goldman P., *Chaotic Responses of unbalanced rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs*, Chaos, Solitons & Fractals 5, 9, 1995, 1683-1704.

[10] Sun Z., Xu J., Zhou T., *Analysis on complicated characteristics of a high-speed rotor system with rub-impact*, Mechanism and Machine Theory 37, 2002, 659-672.

[11] Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A., *Determining Lyapunov Exponents From A Time Series*, Physica 16D, 1985, 285-317.

BPK BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ