CZASOPISMO TECHNICZNE M
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

z. 4-M/2008
ISSN 0011-4561
ISSN 1897-6328

LESZEK MIKULSKI, HENRYK LASKOWSKI*

OPTYMALIZACJA WYTRZYMAŁOŚCIOWA KŁADKI DLA PIESZYCH JAKO ZADANIE OPTYMALNEGO STEROWANIA

STRENGTH OPTIMIZATION FOR FOOTBRIDGE AS AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM

Streszczenie

Przedmiotem artykułu jest optymalne kształtowanie przekroju poprzecznego łuku kołowego wykonanego z rur o stałej średnicy zewnętrznej i zmiennej grubości, który jest elementem nośnym stalowej kładki pieszo-jezdnej. Dla pięciu stanów obciążenia minimalizowana jest objętość stali, przy ograniczeniach wytrzymałościowych i geometrycznych. Zadanie optymalnego kształtowania jest sformułowane w kategoriach teorii sterowania, warunki konieczne optymalizacji tworzą WPPB, który rozwiązano numerycznie za pomocą programu Dircol-2.1.

Słowa kluczowe: *sterowanie optymalne*, *zasada maksimum*

Abstract

The paper presents optimal modelling of the cross-section of a semi-circular arch made of tubes having fixed external diameter and variable thickness which is a carrying member of a steel foot bridge. The steel volume is minimized for five states of load, taking into account the strength and geometrical constraints. The optimal design problem is formulated in terms of the control theory, the necessary optimization conditions form the multi-point boundary value problems, which is solved numerically by means of the Dircol-2.1 software.

Keywords: *optimal control*, *maximum principle*

*Dr hab. inż. Leszek Mikulski, prof. PK, dr inż. Henryk Laskowski, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

1. Wstęp

Artykuł dotyczy optymalnego kształtowania przekroju poprzecznego łuku kołowego wykonanego z rur o stałej średnicy zewnętrznej i zmiennej grubości. Dwa łuki kołowe stanowią ustrój nośny kładki pieszo-jezdnej. Kładka przeznaczona jest dla ruchu pieszego (szerokość pomostu – 4 m) oraz dla ograniczonego ruchu pojazdów kołowych przewidzianego jako obciążenie wyjątkowe. Na łukach oparta jest konstrukcja pomostu, który pracuje jako belka ciągła trójprzęsłowa. Obciążenie z płyty pomostu jest przekazywane na łuk przez podpory płyty; są to obciążenia skupione. Łuk kołowy jednoprzęsłowy o rozpiętości 18,64 m i strzałce 3,30 m oparty jest na dwóch łożyskach stałych. Promień osi łuku wynosi 14,87 m. W artykule pominięto wpływ stanów montażowych na optymalizację.

2. Sformułowanie zadań optymalizacji

Łuk kołowy jest optymalizowany dla wybranej funkcji celu, którą jest objętość stali z uwzględnieniem ograniczeń. Zadanie optymalizacji sformułowane będzie następująco: dla łuku poddanego różnym stanom obciążenia należy wyznaczyć optymalny rozkład grubości rury, która minimalizuje przyjętą funkcję celu i spełnia przyjęte ograniczenia.

W artykule rozważono następujące stany obciążenia:

1. Stan 0 – obciążenie ciężarem własnym łuku. W tym stanie uwzględnia się tylko obciążenie ciężarem własnym optymalizowanego łuku w postaci obciążenia rozłożonego w odniesieniu do osi łuku.
2. Stan 1 – obciążenie ciężarem własnym nadłucza.
3. Stan 2 – obciążenie tłumem pieszych.
4. Stan 3 – obciążenie pojazdem na lewym słupku.
5. Stan 4 – obciążenie pojazdem na prawym słupku.

W stanach 1–4 obciążenie jest przekazywane na łuk przez podpory płyty pomostu i są to siły skupione. Wartości tych sił wyznaczono w programie Robot jako reakcje podpór belki ciągłej (płyty pomostu). Wyróżnionym stanom obciążenia odpowiadają zmienne stanu zestawione w tabeli 1.

Tabela 1

Zmienne stanu

	Stan 0	Stan 1	Stan 2	Stan 3	Stan 4
u:	y_1	y_7	y_{13}	y_{19}	y_{25}
w:	y_2	y_8	y_{14}	y_{20}	y_{26}
φ:	y_3	y_9	y_{15}	y_{21}	y_{27}
M:	y_4	y_{10}	y_{16}	y_{22}	y_{28}
Q:	y_5	y_{11}	y_{17}	y_{23}	y_{29}
N:	y_6	y_{12}	y_{18}	y_{24}	y_{30}
V:	y_{31}				

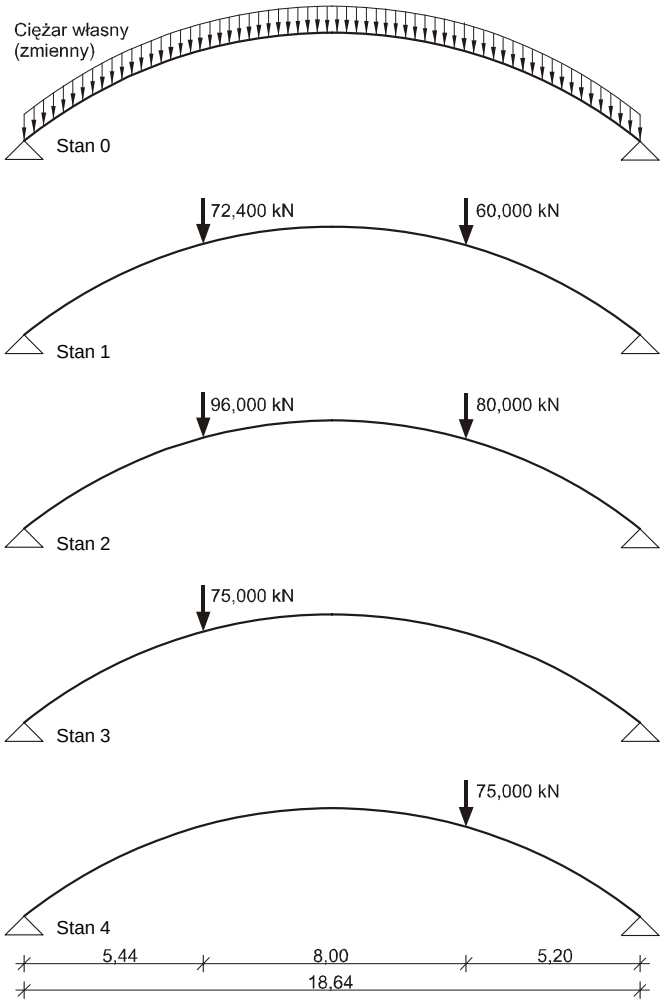
gdzie:

u – przemieszczenie styczne do osi łuku,

w – przemieszczenie prostopadłe do osi łuku,

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

φ – przemieszczenie kątowe,
M – moment zginający,
Q – siła poprzeczna,
N – siła podłużna,
V – objętość.



Rys. 1. Stany obciążenia: stan 0 – obciążenie ciężarem własnym łuku, stan 1 – obciążenie ciężarem własnym nadłucza, stan 2 – obciążenie tłumem pieszych, stan 3 – obciążenie samochodem S na lewym słupku, stan 4 – obciążenie samochodem S na prawym słupku

Fig. 1. States of loads: state 0 – dead weight of the arch, state 1 – dead weight of the superstructure, state 2 – crowd load, state 3 – car S load on the left pillar, state 4 – car S load on the right pillar

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

2.1. Równania stanu

Równania różniczkowe stanu mają obecnie następującą postać kanoniczną

$$
\begin{aligned}
y'_1 &= \frac{y_6}{EA\cos\alpha} + \frac{y_2\kappa}{\cos\alpha} \\
y'_2 &= \frac{-y_1\kappa}{\cos\alpha} + \frac{y_3}{EI\cos\alpha} \\
y'_3 &= \frac{y_4}{EI\cos\alpha} \\
y'_4 &= \frac{y_5}{\cos\alpha} \\
y'_5 &= \frac{y_6\kappa}{EI\cos\alpha} - \frac{q_{t0}}{\cos\alpha} \\
y'_6 &= \frac{-y_5\kappa}{\cos\alpha} - \frac{q_{n0}}{\cos\alpha} \\
y'_7 &= \frac{y_{12}}{EA\cos\alpha} + \frac{y_8\kappa}{\cos\alpha} \\
y'_8 &= \frac{-y_7\kappa}{\cos\alpha} + \frac{y_9}{EI\cos\alpha} \\
y'_9 &= \frac{y_{10}}{EI\cos\alpha} \\
y'_{10} &= \frac{y_{11}}{\cos\alpha} \\
y'_{11} &= \frac{y_{12}\kappa}{EI\cos\alpha} \\
y'_{12} &= \frac{-y_{11}\kappa}{\cos\alpha} \\
y'_{13} &= \frac{y_{18}}{EA\cos\alpha} + \frac{y_{14}\kappa}{\cos\alpha} \\
y'_{14} &= \frac{-y_{13}\kappa}{\cos\alpha} + \frac{y_{15}}{EI\cos\alpha} \\
y'_{15} &= \frac{y_{16}}{EI\cos\alpha}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

$$
\begin{aligned}
y'_{16} &= \frac{y_{17}}{\cos\alpha} \\
y'_{17} &= \frac{y_{18}\kappa}{EI\cos\alpha} \\
y'_{18} &= \frac{-y_{17}\kappa}{\cos\alpha} \\
y'_{19} &= \frac{y_{24}}{EA\cos\alpha} + \frac{y_{20}\kappa}{\cos\alpha} \\
y'_{20} &= \frac{-y_{19}\kappa}{\cos\alpha} + \frac{y_{21}}{EI\cos\alpha} \\
y'_{21} &= \frac{y_{22}}{EI\cos\alpha} \\
y'_{22} &= \frac{y_{23}}{\cos\alpha} \\
y'_{23} &= \frac{y_{24}\kappa}{EI\cos\alpha} \\
y'_{24} &= \frac{-y_{23}\kappa}{\cos\alpha} \\
y'_{25} &= \frac{y_{30}}{EA\cos\alpha} + \frac{y_{26}\kappa}{\cos\alpha} \\
y'_{26} &= \frac{-y_{25}\kappa}{\cos\alpha} + \frac{y_{27}}{EI\cos\alpha} \\
y'_{27} &= \frac{y_{28}}{EI\cos\alpha} \\
y'_{28} &= \frac{y_{29}}{\cos\alpha} \\
y'_{29} &= \frac{y_{30}\kappa}{EI\cos\alpha} \\
y'_{30} &= \frac{-y_{29}\kappa}{\cos\alpha} \\
y'_{31} &= \frac{A}{\cos\alpha}
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

$$
A = \pi\left(d^2 - \left(d-U\right)^2\right),\ I = \frac{\pi\left(d^4 - \left(d-U\right)^4\right)}{64},\quad \alpha = \arctan\left(\frac{(x_0 - x)}{\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}}\right),\quad \kappa = -\frac{1}{R}
$$

$q_{t0} = \gamma_S \gamma_0 U\cos\alpha,\quad q_{n0} = \gamma_S \gamma_0 U\sin\alpha,\quad \gamma_S$ – ciężar w. stali, $\gamma_0 = 1{,}1,\quad U$ – grubość rury

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Optymalizowany łuk oparty jest na dwóch podporach stałych, a więzom tym odpowiadają następujące warunki brzegowe

$$\begin{gathered} y_1(0)=0, y_2(0)=0, y_4(0)=0, y_7(0)=0, y_8(0)=0, y_{10}(0)=0 \\ y_{13}(0)=0, y_{14}(0)=0, y_{16}(0)=0, y_{19}(0)=0, y_{20}(0)=0, y_{22}(0)=0 \\ y_{25}(0)=0, y_{26}(0)=0, y_{28}(0)=0 \\ y_1(l)=0, y_2(l)=0, y_4(l)=0, y_7(l)=0, y_8(l)=0, y_{10}(l)=0 \\ y_{13}(l)=0, y_{14}(l)=0, y_{16}(l)=0, y_{19}(l)=0, y_{20}(l)=0, y_{22}(l)=0 \\ y_{25}(l)=0, y_{26}(l)=0, y_{28}(l)=0 \end{gathered} \tag{3}$$

Ponadto w punktach ((x_a = 5,44), (x_b = 13,44)) przekazywania obciążeń z płyty pomostu przyłożone są siły skupione P_{ij}, które wywołują skoki zmiennych stanu. W punkcie x = 5,44 skoki są następujące

$$\begin{aligned} y_{11}^{+} &= y_{11}^{-} - P_{11}\cos\alpha_2 \\ y_{12}^{+} &= y_{12}^{-} + P_{11}\sin\alpha_2 \\ y_{17}^{+} &= y_{17}^{-} - P_{21}\cos\alpha_2 \\ y_{18}^{+} &= y_{18}^{-} + P_{21}\sin\alpha_2 \\ y_{23}^{+} &= y_{23}^{-} - P_{31}\cos\alpha_2 \\ y_{24}^{+} &= y_{24}^{-} + P_{31}\sin\alpha_2 \\ y_{29}^{+} &= y_{29}^{-} - P_{41}\cos\alpha_2 \\ y_{30}^{+} &= y_{30}^{-} + P_{41}\sin\alpha_2 \end{aligned} \tag{4}$$

W punkcie x = 13,44 nieciągłe pozostają zmienne stanu

$$\begin{aligned} y_{11}^{+} &= y_{11}^{-} - P_{11}\cos\alpha_2 \\ y_{12}^{+} &= y_{12}^{-} + P_{11}\sin\alpha_2 \\ y_{17}^{+} &= y_{17}^{-} - P_{21}\cos\alpha_2 \\ y_{18}^{+} &= y_{18}^{-} + P_{21}\sin\alpha_2 \\ y_{23}^{+} &= y_{23}^{-} - P_{31}\cos\alpha_2 \\ y_{24}^{+} &= y_{24}^{-} + P_{31}\sin\alpha_2 \\ y_{29}^{+} &= y_{29}^{-} - P_{41}\cos\alpha_2 \\ y_{30}^{+} &= y_{30}^{-} + P_{41}\sin\alpha_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Pozostałe zmienne stanu y_i pozostają ciągłe w punktach A i B. Ostatecznie łuk opisany jest układem 31 równań różniczkowych stanu (1), (2) z warunkami brzegowymi (3) i wewnętrznymi warunkami punktowymi (4), (5).

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

2.2. Funkcja celu

Jako funkcję celu przyjęto objętość zużytej stali, która jest całkowym wskaźnikiem jakości

$$J(U) = \int_0^l \frac{\pi(d^2 - (d-U)^2)}{\cos\alpha} dx \tag{6}$$

2.3. Niezbędne ograniczenia

W zadaniu optymalizacji uwzględnione zostały następujące kombinacje obciążeń:

Tabela 2

Kombinacje obciążeń

Obciążenia	Kombinacja 1	Kombinacja 2	Kombinacja 3
Ciężar własny łuku	x	x	x
Ciężar własny nadłucza	x	x	x
Tłum pieszych	x		
Pojazd na lewym słupku		x	
Pojazd na prawym słupku			x

Dla każdego stanu obciążenia wyznaczono naprężenia normalne we włóknach dolnych i górnych

$$\sigma_{0d} = \frac{y_4 d}{2I} + \frac{y_6}{A}, \qquad \sigma_{1d} = \frac{y_{10} d}{2I} + \frac{y_{12}}{A}, \qquad \sigma_{2d} = \frac{y_{16} d}{2I} + \frac{y_{18}}{A}$$
$$\sigma_{3d} = \frac{y_{22} d}{2I} + \frac{y_{24}}{A}, \qquad \sigma_{4d} = \frac{y_{28} d}{2I} + \frac{y_{30}}{A} \tag{7}$$

$$\sigma_{0g} = -\frac{y_4 d}{2I} + \frac{y_6}{A}, \qquad \sigma_{1g} = -\frac{y_{10} d}{2I} + \frac{y_{12}}{A}, \qquad \sigma_{2g} = -\frac{y_{16} d}{2I} + \frac{y_{18}}{A}$$
$$\sigma_{3g} = -\frac{y_{22} d}{2I} + \frac{y_{24}}{A}, \qquad \sigma_{4g} = -\frac{y_{28} d}{2I} + \frac{y_{30}}{A} \tag{8}$$

Uwzględniając kombinacje obciążeń, sumarycznie naprężenia możemy zapisać następująco

$$\sigma_{Id} = \sigma_{0d} + \sigma_{1d} + \sigma_{2d}, \qquad \sigma_{IId} = \sigma_{0d} + \sigma_{1d} + \sigma_{3d}, \qquad \sigma_{IIId} = \sigma_{0d} + \sigma_{1d} + \sigma_{4d}$$
$$\sigma_{Ig} = \sigma_{0g} + \sigma_{1g} + \sigma_{2g}, \qquad \sigma_{IIg} = \sigma_{0g} + \sigma_{1g} + \sigma_{3g}, \qquad \sigma_{IIIg} = \sigma_{0g} + \sigma_{1g} + \sigma_{4g} \tag{9}$$

Maksymalne i minimalne naprężenia we włóknach górnych i dolnych zapiszemy w postaci

$$\sigma_{\max,d} = |\max(\sigma_{Id}, \sigma_{IId}, \sigma_{IIId})|, \qquad \sigma_{\min,d} = |\min(\sigma_{Id}, \sigma_{IId}, \sigma_{IIId})|$$
$$\sigma_{\max,g} = |\max(\sigma_{Ig}, \sigma_{IIg}, \sigma_{IIIg})|, \qquad \sigma_{\min,g} = |\min(\sigma_{Ig}, \sigma_{IIg}, \sigma_{IIIg})| \tag{10}$$

Ostatecznie naprężenie normalne uwzględniane w zadaniu optymalizacji zdefiniujemy jako

$$\sigma = \max(\sigma_{\max,d}, \sigma_{\min,d}, \sigma_{\max,g}, \sigma_{\min,g}) \tag{11}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Dla przyjętych kombinacji obciążeń naprężenia styczne wynoszą

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \left| \frac{y_5 S}{2IU} + \frac{y_{11} S}{2IU} + \frac{y_{17} S}{2IU} \right| \\
\tau_2 &= \left| \frac{y_5 S}{2IU} + \frac{y_{11} S}{2IU} + \frac{y_{23} S}{2IU} \right| \\
\tau_3 &= \left| \frac{y_5 S}{2IU} + \frac{y_{11} S}{2IU} + \frac{y_{29} S}{2IU} \right| \\
S &= \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{4d}{6\pi} - \frac{\pi (d-2U)^2}{8} \cdot \frac{4(d-2U)}{6\pi}
\end{aligned} \tag{12}$$

Ekstremalne naprężenie styczne wyznaczymy z zależności

$$\tau = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \tag{13}$$

Podobnie jak naprężenia styczne (12) zapiszemy przemieszczenia, które odpowiadają założonym kombinacjom obciążeń

$$\begin{aligned}
Y_1 &= y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha + y_7 \sin\alpha + y_8 \cos\alpha + y_{13} \sin\alpha + y_{14} \cos\alpha \\
Y_2 &= y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha + y_7 \sin\alpha + y_8 \cos\alpha + y_{19} \sin\alpha + y_{20} \cos\alpha \\
Y_3 &= y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha + y_7 \sin\alpha + y_8 \cos\alpha + y_{25} \sin\alpha + y_{26} \cos\alpha
\end{aligned} \tag{14}$$

Ekstremalne przemieszczenie wynosi

$$Y = \max\left(|Y_1|, |Y_2|, |Y_3|\right) \tag{15}$$

Zdefiniowane maksymalne naprężenia normalne (11), naprężenia styczne (13) oraz maksymalne przemieszczenia (15) umożliwiają zapisanie warunków ograniczających zgodnych z przepisami normowymi

$$\begin{aligned}
g_1 &= f_d - \sigma \geq 0 \\
g_2 &= 0{,}58 f_d - \tau \geq 0 \\
g_3 &= Y_d - Y \geq 0
\end{aligned} \tag{16}$$

gdzie:

f_d – wytrzymałość obliczeniowa stali,

$Y_d = \dfrac{l}{300}$ – graniczne przemieszczenie pionowe.

3. Warunki konieczne optymalności

Dla przyjętych funkcji celu (6) i ograniczeń (16) zdefiniujemy funkcję Hamiltona w postaci

$$H = \sum_{i}^{31} \lambda_i f_i(x, y, U) + \sum_{i=1}^{2} \mu_i g_i(y, U) + \mu_3 g_3(y) \tag{17}$$

gdzie λ_i, μ_i to mnożniki Lagrange'a.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Do sformułowania warunków koniecznych optymalizacji służy zasada maksimum w wersji rozszerzonej, uwzględniająca ograniczenia zmiennych stanu i ich nieciągłości (4), (5) w skończonej liczbie punktów. Sterownie optymalne możemy wyznaczyć, rozwiązując układy równań

$$y_i^{'} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \qquad \lambda_i^{'} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial U} = 0 \tag{18}$$

przy warunkach brzegowych (3) dla zmiennych stanu i warunkach transwersalności dla funkcji sprzężnych (19). Poniżej szczegółowo zestawiono warunki transwersalności

$$\begin{gathered}
\lambda_3(0) = 0, \lambda_5(0) = 0, \lambda_6(0) = 0, \lambda_9(0) = 0, \lambda_{11}(0), \lambda_{12}(0) = 0 \\
\lambda_{15}(0) = 0, \lambda_{17}(0) = 0, \lambda_{18}(0) = 0, \lambda_{21}(0) = 0, \lambda_{23}(0) = \lambda_{24}(0) = 0 \\
\lambda_{27}(0) = 0, \lambda_{29}(0) = 0, \lambda_{30}(0) = 0 \\
\lambda_3(l) = 0, \lambda_5(l) = 0, \lambda_6(l) = 0, \lambda_9(l) = 0, \lambda_{11}(l), \lambda_{12}(l) = 0 \\
\lambda_{15}(l) = 0, \lambda_{17}(l) = 0, \lambda_{18}(l) = 0, \lambda_{21}(l) = 0, \lambda_{23}(l) = \lambda_{24}(l) = 0 \\
\lambda_{27}(l) = 0, \lambda_{29}(l) = 0, \lambda_{30}(l) = 0
\end{gathered} \tag{19}$$

Ponadto w punktach przyłożenia sił skupionych obowiązują warunki ciągłości

$$\lambda_i^+(x_a) = \lambda_i^-(x_a), \qquad \lambda_i^+(x_b) = \lambda_i^-(x_b) \tag{20}$$

Z warunku $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$ wyznaczamy optymalne sterowanie $U(x)$, jeśli ograniczenie g_i nie jest aktywne, tzn. $g_i > 0$.

Funkcja Hamiltona (18) nie jest stała, ponieważ problem nie jest autonomiczny, ponadto funkcja Hamiltona jest nieciągła, w punktach x_a, x_b doznaje skoku

$$\begin{aligned}
H\left(y^+, \lambda^+, U^+, x = x_a\right) &= H\left(y^-, \lambda^-, U^-, x = x_b\right) + D_1 \\
H\left(y^+, \lambda^+, U^+, x = x_b\right) &= H\left(y^-, \lambda^-, U^-, x = x_b\right) + D_2
\end{aligned} \tag{21}$$

4. Rozwiązanie numeryczne

Po zestawieniu warunków koniecznych optymalizacji zadanie optymalnego kształtowania przekroju poprzecznego rury stalowej zostało sprowadzone do rozwiązania Wielopunktowego Problemu Brzegowego (WPPB) dla układu równań różniczkowych (1), (2), (18) z warunkami brzegowymi i wewnętrznymi warunkami punktowymi (3), (4), (19), (20). Wielkościami, które należy wyznaczyć są: **31** zmiennych stanu y_i, **31** zmiennych sprzężonych λ_i, **1** zmienna decyzyjna U, **3** mnożniki Lagrange'a μ_i, dwie stałe odpowiedzialne za skoki funkcji Hamiltona w punktach x_a, x_b. Ogółem do wyznaczenia pozostaje **67** wielkości. Rozwiązanie sformułowanego problemu optymalnego kształtowania możliwe jest na drodze numerycznej. Rezultaty numeryczne uzyskano, wykorzystując do optymalizacji pogram numeryczny Dircol-2.1. Po rozwiązaniu WPPB otrzymano następującą strukturę rozwiązania optymalnego z **8** punktami zmiany sterowania

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

$$U(x)=\begin{cases} U_1 & \text{gdy} \quad x\in(0,000;\,3,192) \\ U_{\text{opt}} & \text{gdy} \quad x\in(3,192;\,3,724) \\ g_1=0 & \text{gdy} \quad x\in(3,724;\,6,920) \\ U_1 & \text{gdy} \quad x\in(6,920;\,11,720) \\ U_{\text{opt}} & \text{gdy} \quad x\in(11,720;\,12,520) \\ g_1=0 & \text{gdy} \quad x\in(12,520;\,14,384) \\ U_{\text{opt}} & \text{gdy} \quad x\in(14,384;\,15,448) \\ g_1=0 & \text{gdy} \quad x\in(15,448;\,16,512) \\ U_1 & \text{gdy} \quad x\in(16,512;\,18,640) \end{cases} \tag{22}$$

dla której wartość funkcji celu (7) wynosi J = 0,441656. W wyniku optymalizacji uzyskano optymalny rozkład zmiennej decyzyjnej U. Strukturę rozwiązania podaje zależność (22).

W analizowanym przykładzie aktywne są ograniczenia geometryczne oaz ograniczenia naprężeń normalnych (SGN). Warunek na SGU $g_3 > 0$ pozostaje zawsze spełniony, tzn. że przemieszczenia dopuszczalne nie są przekroczone. Uzyskane rozwiązanie spełnia warunki konieczne optymalności.

Na podstawie uzyskanego w ten sposób rozwiązania teoretycznego można było dobrać grubości rur dostępnych w handlu oraz ich kolejności występowania wzdłuż optymalnego łuku. W odpowiednich procedurach sformułowano zadanie optymalizacji, wprowadzając dodatkowe przedziały charakterystyczne, w których możliwa jest realizacja założonych zmian grubości rur. I tak, przedział pierwszy $(0, x_a)$ podzielono na trzy przedziały, przedział drugi (x_a, x_b) na pięć, a trzeci na trzy (x_b, l). Dopuszczono dowolne zmiany położenia granic dodatkowych przedziałów charakterystycznych, jednak w ramach pierwszego podziału. W dodatkowych punktach charakterystycznych wprowadzono warunki zmiennych stanu wynikające z ich ciągłości.

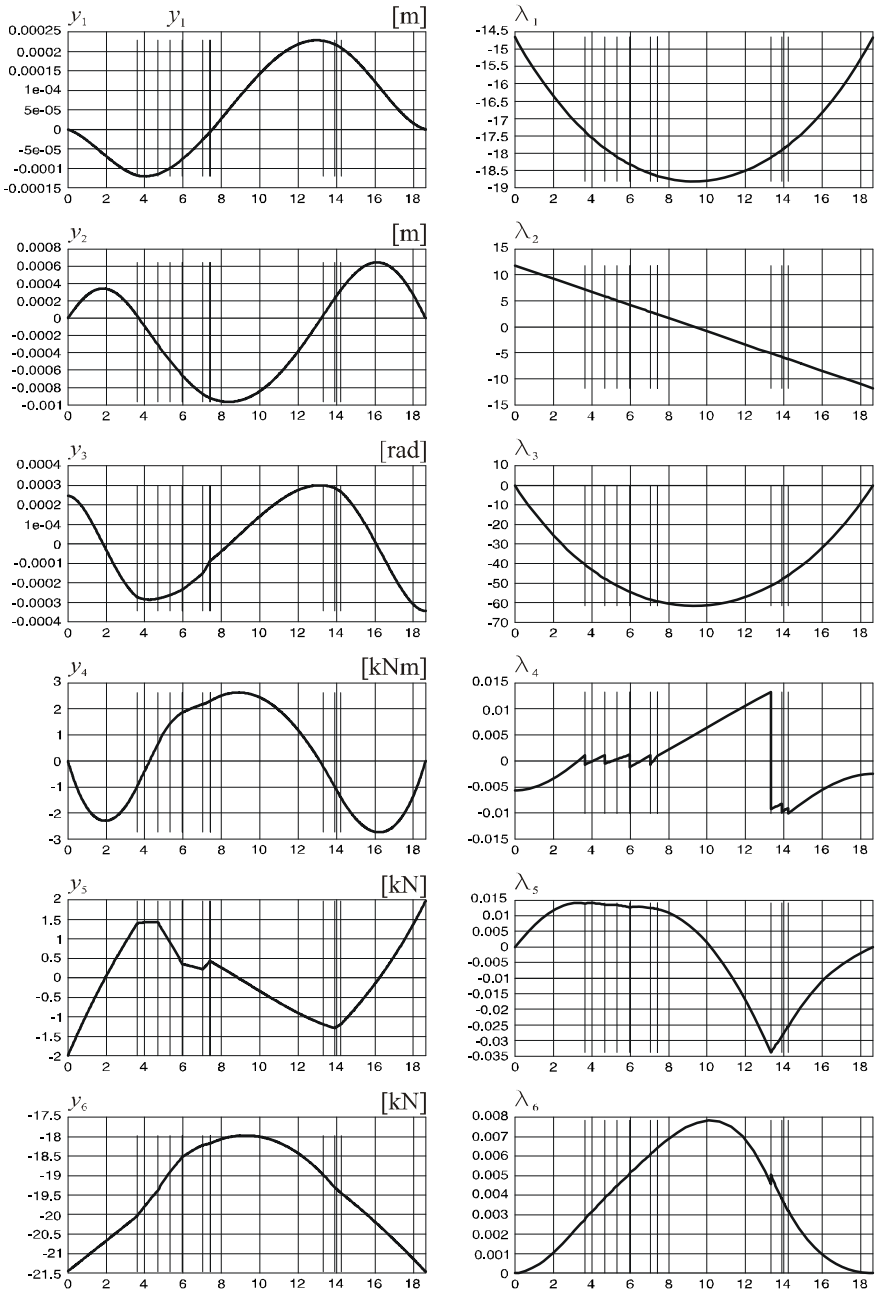
Uzyskane rozwiązanie optymalne odcinkowo stałe przedstawiono na rysunku 7c), także i w tym przypadku aktywne są tylko (punktowo) ograniczenia na naprężenia normalne. Wykresy zmiennych stanu, funkcji sprzężonych, funkcji Hamiltona i ograniczeń zamieszczono na rys. 2–7.

Wartość funkcji celu wynosi obecnie J = 0,602567, potwierdza to znaną prawidłowość, że uwzględnienie w zadaniu optymalizacji dodatkowych ograniczeń powoduje zawsze wzrost funkcji celu.

5. Podsumowanie

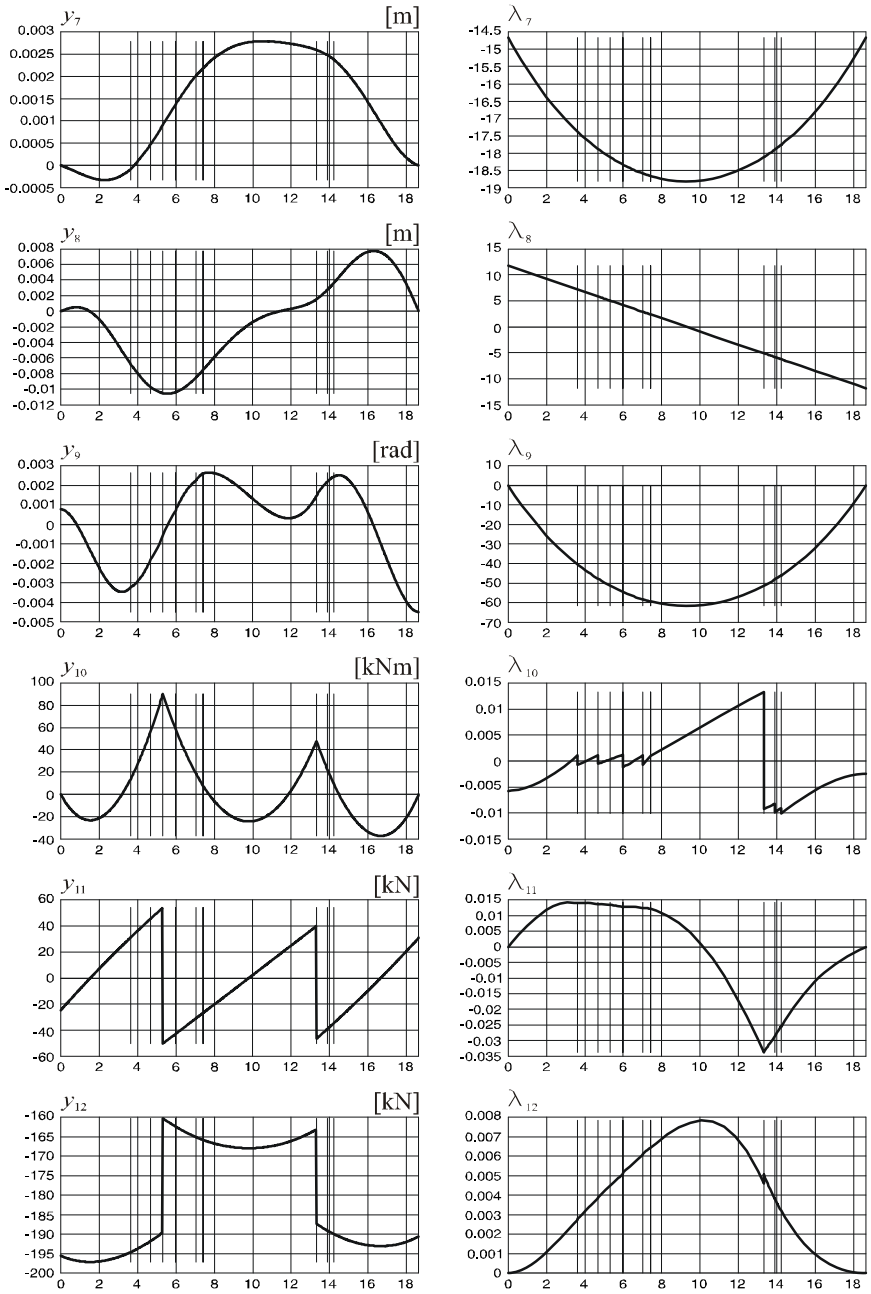
Stosując konsekwentnie zasadę maksimum, uzyskano rozwiązania sformułowanego zadania optymalnego kształtowania. Warunki konieczne rozwiązania optymalnego zestawiono jako WPPB, który następnie rozwiązano numerycznie za pomocą programu Dircol-2.1. W niniejszym artykule prezentujemy wyniki numerycznego ścisłego rozwiązania optymalnego.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ



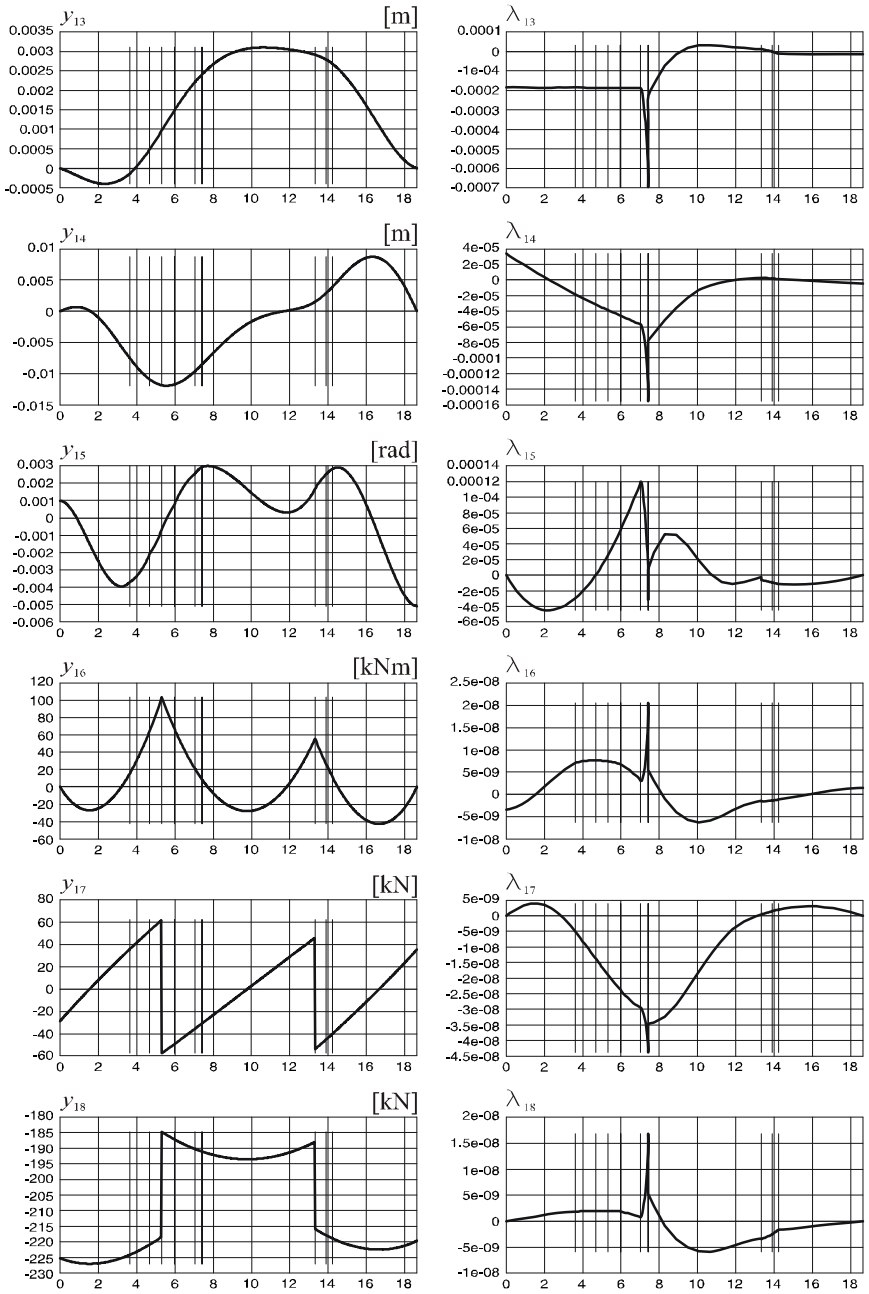
Rys. 2. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w stanie 0
Fig. 2. State variables and adjoint variables in the state 0

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ



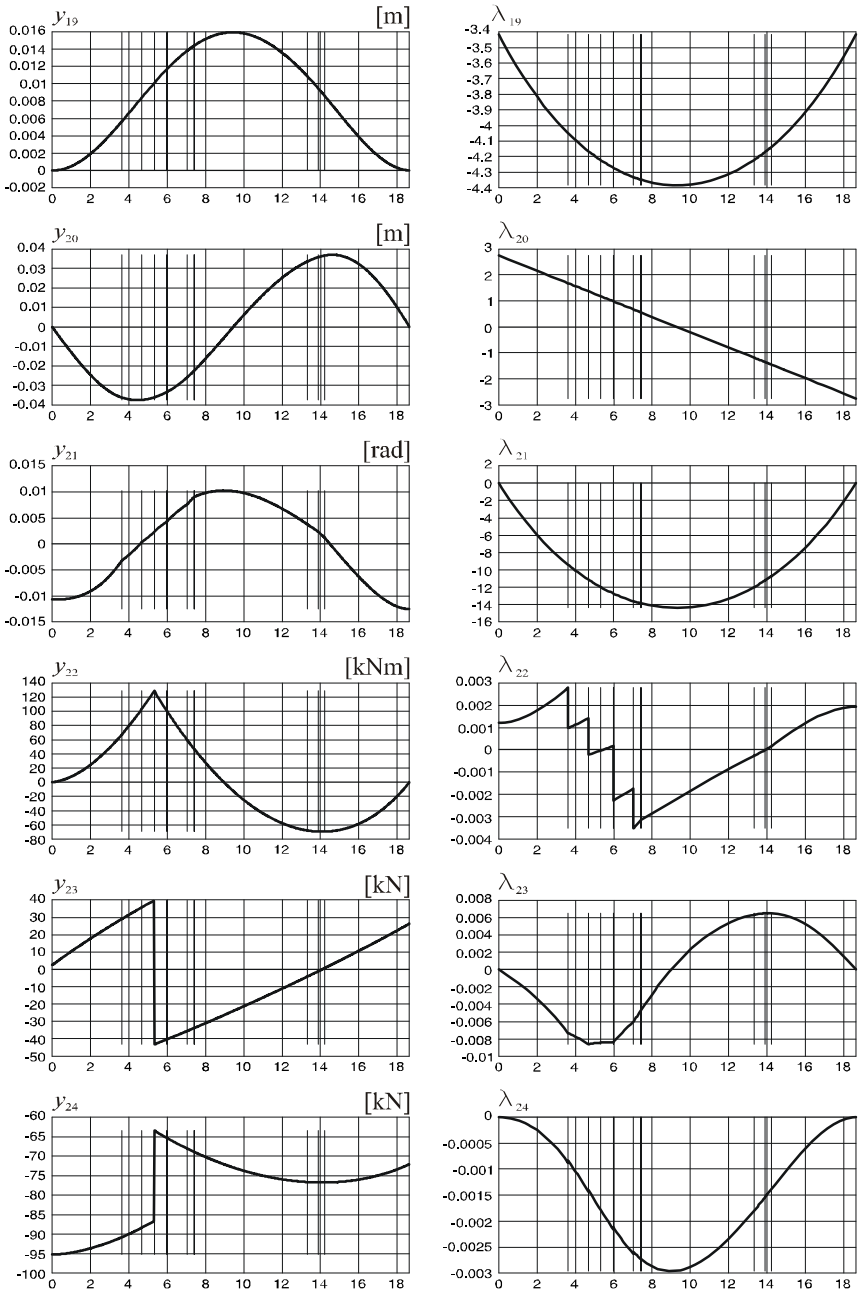
Rys. 3. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w stanie 1
Fig. 3. State variables and adjoint variables in the state 1

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ



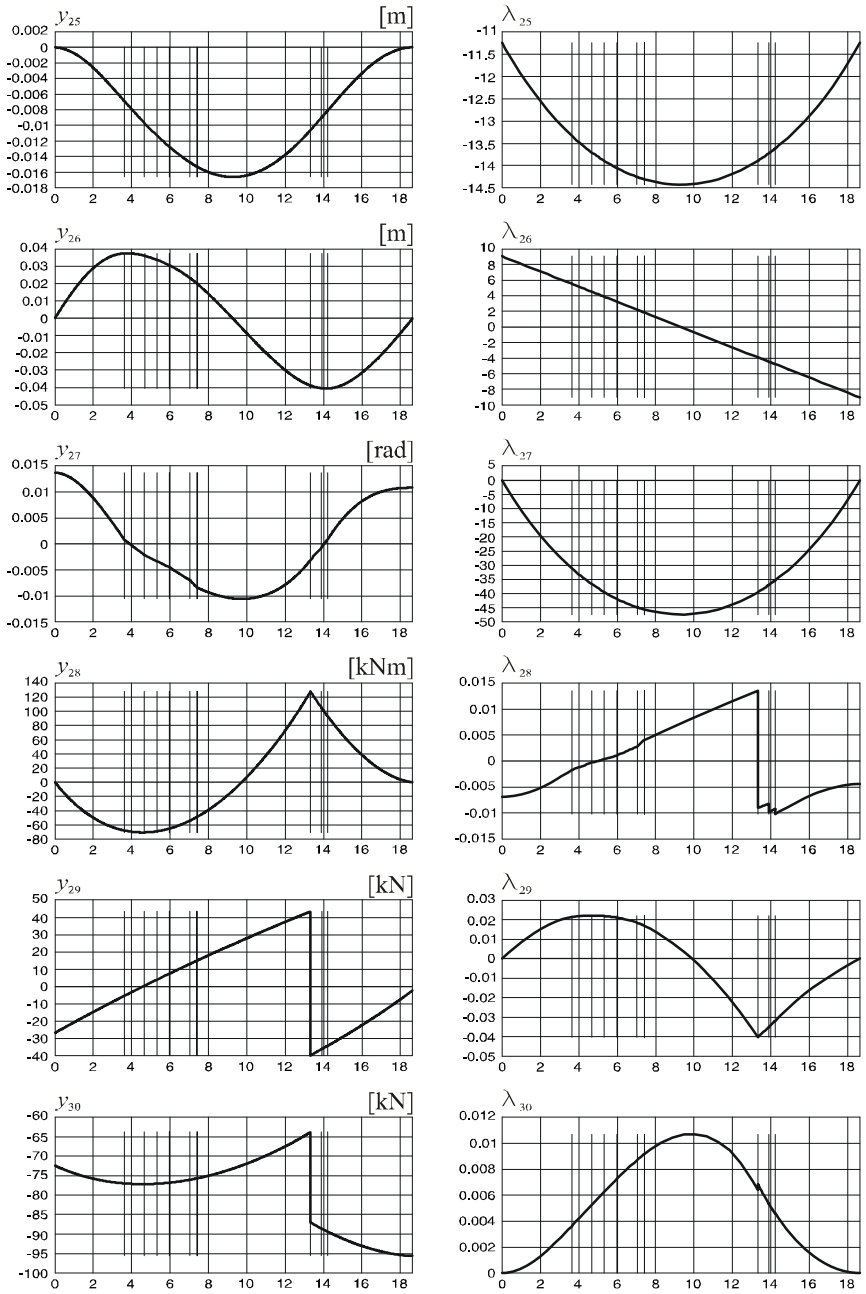
Rys. 4. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w stanie 2
Fig. 4. State variables and adjoint variables in the state 2

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ



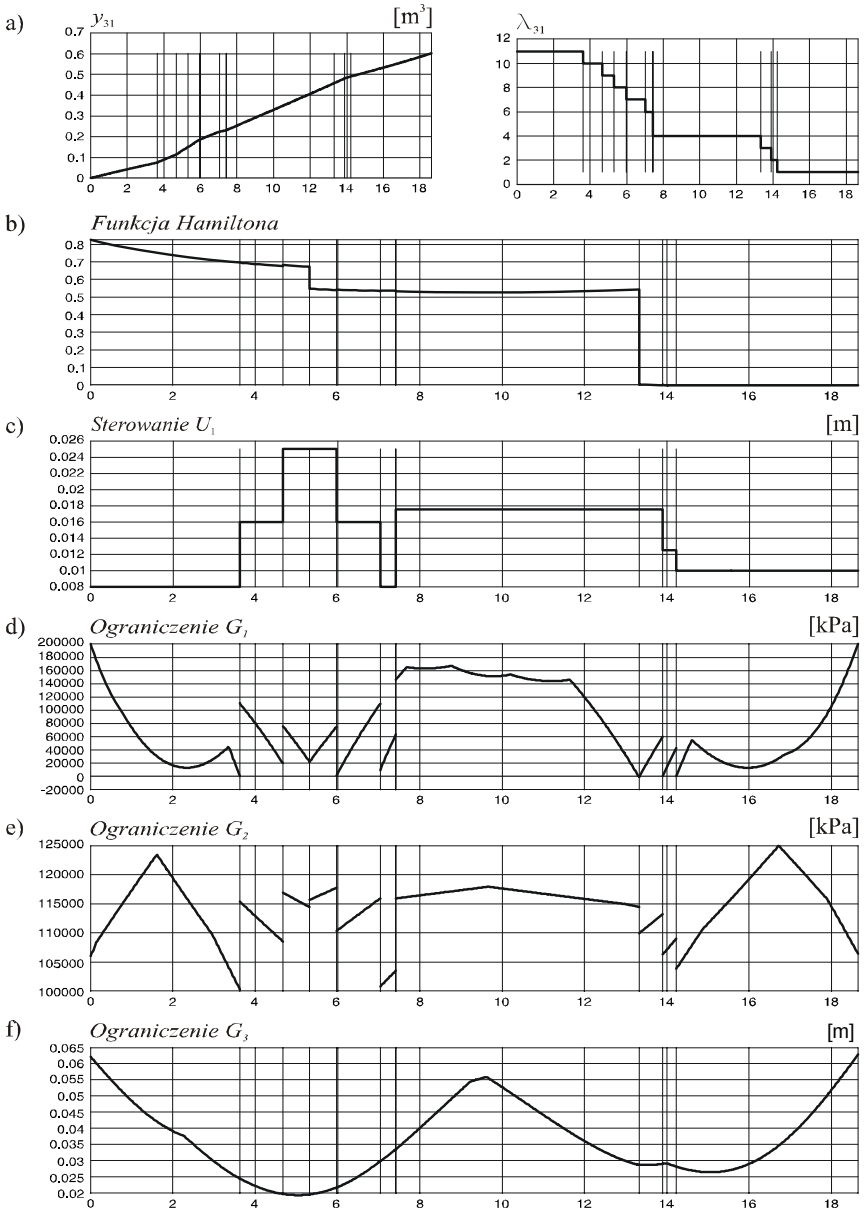
Rys. 5. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w stanie 3
Fig. 5. State variables and adjoint variables in the state 3

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ



Rys. 6. Zmienne stanu i zmienne sprzężone w stanie 4
Fig. 6. State variables and adjoint variables in the state 4

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ



Rys. 7. a) Objętość i zmienna sprzężona, b) funkcja Hamiltona, c) rozwiązanie optymalne, d) ograniczenie G_1, e) ograniczenie G_2, f) ograniczenie G_3

Fig. 7. a) Volume and adjoint variable, b) Hamilton function, c) optimal solution, d) rectriction G_1, e) rectriction G_2, f) rectriction G_3

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Uzyskane rozwiązanie optymalne dla wielorakich stanów obciążeń pozwala wyznaczyć także rozwiązania optymalne odcinkowo stałe akceptowane w praktyce inżynierskiej. Otrzymane rozwiązanie optymalne jest możliwe w praktycznej realizacji, a ograniczenia nośności i użytkowania nie są przekroczone w każdym stanie obciążenia. Prezentowany przykład optymalnego kształtowania łuku pozwala stwierdzić, że metody sterowania optymalnego mogą być stosowane w praktyce lub być miarą praktycznego projektowania.

Wielce Szanownemu Panu Profesorowi zw. dr. hab. inż. Antoniemu Ostoji-Gajewskiemu, wieloletniemu Dyrektorowi Instytutu Fizyki Politechniki Krakowskiej, absolwentowi Wydziału Budownictwa Lądowego PK dedykujemy ten artykuł, w którym nawiązujemy do problematyki badawczej Jubilata i wyrażamy podziękowanie za wieloletnią współpracę.

Literatura

[1] Bulirsch R., Montrone F., Pesch H.J., *Abort Landing in the Presence of a Windshear as a Minimax Optimal Control Problem*, *Part:1 Necessary Conditions*, Journal of Optimization. Theory and Applications 70, 1991 A, 1-23.

[2] Gajewski A., Życzkowski M., *Optimal structural design under constraints*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London 1988.

[3] Gajewski A., Życzkowski M., *Optymalne kształtowanie ustrojów prętowych przy warunkach stateczności*, *Wybrane zagadnienia stateczności konstrukcji*, 1987.

[4] Laskowski H., Mikulski L., Ostaficzuk J., *Rozwiązania teoretyczne i ich praktyczne zastosowania w optymalizacji konstrukcji*, Pomiary, Automatyka, Kontrola 8, 2007, 38-43.

[5] Mikulski L., *Teoria sterowania w problemach optymalizacji konstrukcji i systemów*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007, 1-194.

[6] Stryk O. von, *User's Guide DIRCOL A Direct Collocation Method For The Numerical Solution of Optimal Control Problems*, Technische Universität Darmstadt, Fachgebiet Simulation und Systemoptimierung (SIM), Version 2.1, April 2002.

BPK BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ