

PIOTR KORDZIKOWSKI*

PORÓWNANIE ANALITYCZNYCH WYNIKÓW OBLICZEŃ Z ENERGETYCZNEGO KRYTERIUM WYTEŻENIA RYCHLEWSKIEGO Z DOSTĘPNYMI DANYMI DOŚWIADCZALNYMI DLA MATERIAŁÓW KOMÓRKOWYCH

COMPARISON OF ANALYTICAL RESULTS OF RYCHLEWSKI ENERGY – BASED CRITERION OF MATERIAL EFFORT WITH AVAILABLE EXPERIMENTAL DATA FOR CELLULAR MATERIALS

Streszczenie

Celem artykułu jest porównanie wyników analitycznych obliczeń uzyskanych z energetycznego kryterium wyteżenia dla sprzężonych sprężystych stanów własnych na przykładzie wybranych materiałów anizotropowych z wykorzystaniem wyników badań doświadczalnych. W pracy [1] wyznaczono powierzchnie graniczne odpowiadające energetycznemu kryterium J. Rychlewskiego [2, 3] na przykładzie struktur o powtarzającym się elemencie: sześcioku, prostopadłości, pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego i sześciokąta foremnego. Przyjęto struktury komórkowe o powtarzającym się regularnym układzie prętów połączonych w sztywnym węźle. W artykule przedstawiono porównanie otrzymanych powierzchni granicznych dla rozważanych struktur komórkowych z dostępnymi z literatury danymi doświadczalnymi.

Słowa kluczowe: energetyczne kryterium wyteżenia, anizotropowe materiały, materiały komórkowe

Abstract

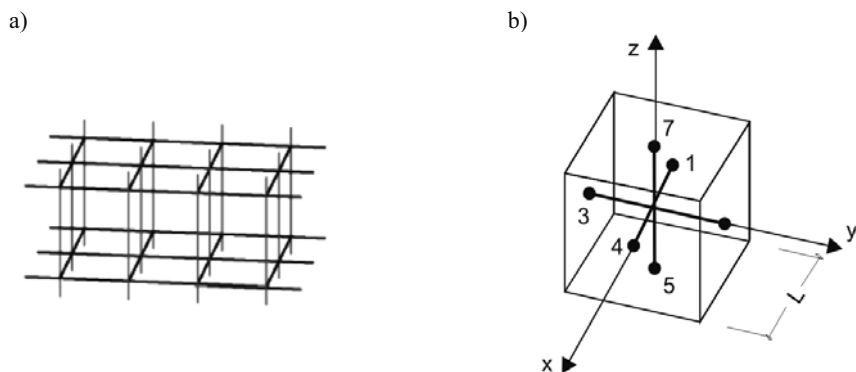
The aim of the paper is to compare the results of analytical calculations made on the basis of energy-based criterion of material effort for coupled elastic eigen-states. Some examples of chosen anisotropic materials with available experimental data are applied by that. In [1] the limit surfaces corresponding to the energy-based criterion of elastic limit proposed by J. Rychlewski [2, 3] for certain examples of regular cellular structures with repeating unit cell of the skeleton in the form of a cube, a cuboid, a simple prism with the base of equilateral triangle, and a simple prism with the base of regular hexagon were determined. The morphology of the skeleton in a particular unit cell was modelled by means of the struts joined in a rigid node. The paper deals with comparison of the elastic limit surfaces obtained from the own calculations for considered cellular materials having the regular cell structures with the available in the literature experimental data.

Keywords: energy-based criterion of material effort, anisotropic materials, cellular materials

* Dr inż. Piotr Kordzikowski, Zakład Wytrzymałości Materiałów, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

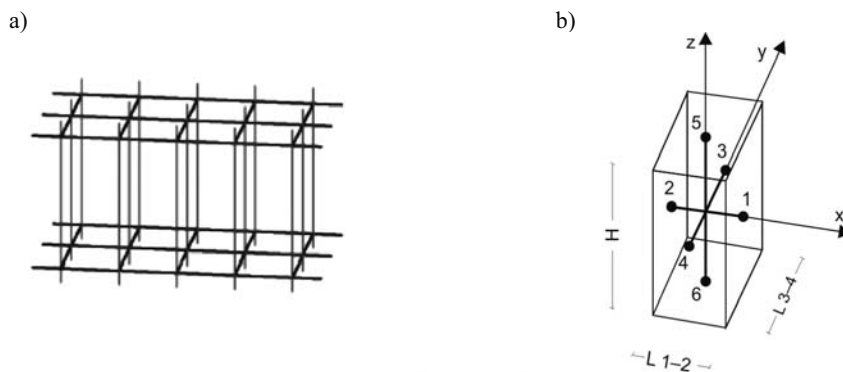
1. Wstęp

Zaproponowane przez J. Rychlewskiego energetyczne kryterium stanu granicznego dla sprzężonych stanów własnych dało podstawę do stworzenia teorii wyężenia materiałów, które w ogólności wykazują anizotropię własności mechanicznych [2, 3, 4, 5]. W kryterium energetycznym należy określić graniczne energie dla poszczególnych sprzężystych stanów własnych, których może być co najwyżej sześć. Te graniczne energie można wyznaczyć doświadczalnie lub obliczyć. Propozycję obliczania granicznych energii podano w [6] i dyskutowano dokładniej w [7, 8]. Obliczenie granicznych energii dla modelu efektywnego przy pomocy którego można przewidywać sprzężyste zachowanie się materiału na podstawie teoretycznego opisu jego struktury – dokładnie przedstawiono w pracach [1, 8–12].



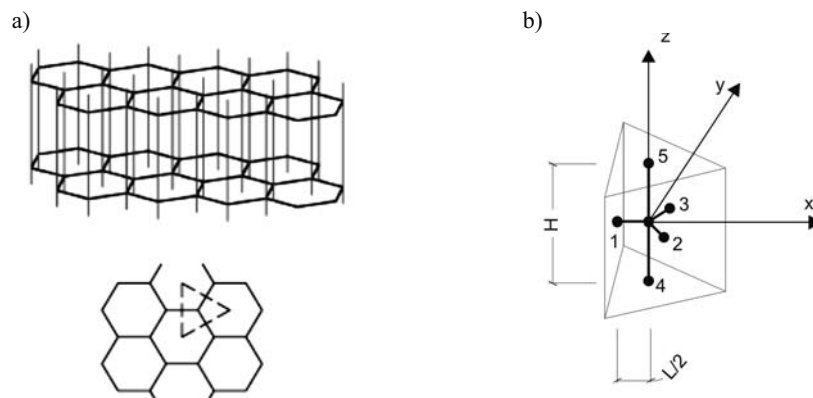
Rys. 1. a) Sześcienne struktura komórkowa [11], b) reprezentatywna komórka sześcienne, L – wymiar elementów belkowych (szkieletu)

Fig. 1. a) A cube cellular structure [11], b) A representative cube cell, L – the dimension of a beam element (skeleton)



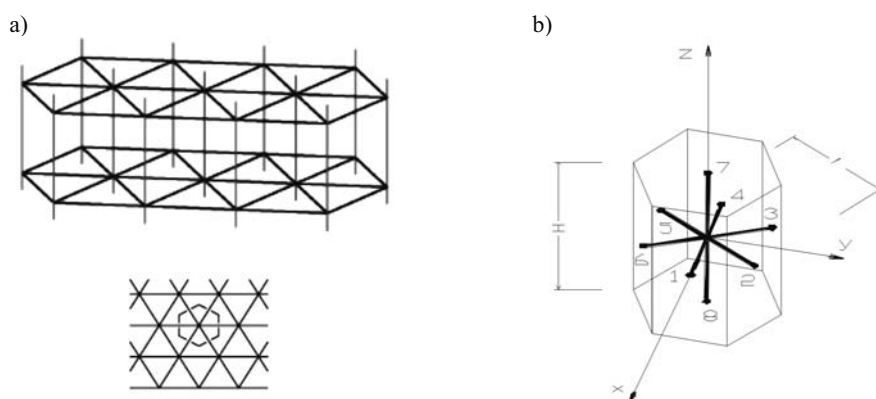
Rys. 2. a) Prostopadłościenna struktura komórkowa [11], b) reprezentatywna komórka prostopadłościenna, L_{1-2} , L_{3-4} , H – wymiary elementów belkowych (szkieletu)

Fig. 2. a) A cuboid cellular structure [11], b) A representative cuboid cell, L_{1-2} , L_{3-4} , H – the dimensions of beam elements (skeleton)



Rys. 3. a) Struktura komórkowa typu plaster miodu (*honeycomb*) [11], b) reprezentatywna komórka w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego, L, H ($L \leq H$) – wymiary elementów belkowych (szkieletu)

Fig. 3. a) A honeycomb cellular structure [11], b) A representative cell in the shape of a simple prism with base of equilateral triangle, L, H ($L \leq H$) – the dimensions of beam elements (skeleton)



Rys. 4. a) Struktura komórkowa [11], b) reprezentatywna komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego, L, H ($L \leq H$) – wymiary elementów belkowych (szkieletu)

Fig. 4. a) A cellular structure [11], b) A representative cell in a shape of a simple prism with the base of regular hexagon, L, H ($L \leq H$) – the dimensions of beam elements (skeleton)

Celem artykułu jest porównanie energetycznego kryterium wyężenia dla sprzężonych stanów własnych na przykładzie wybranych materiałów anizotropowych z wykorzystaniem wyników badań doświadczalnych. Wyznaczone zostaną powierzchnie graniczne odpowiadające energetycznemu kryterium J. Rychlewskiego [2, 3] dla sprzężonych stanów własnych na przykładzie struktur o powtarzającym się elemencie: sześciianu foremnego (rys. 1), dowolnego prostopadłościanu (rys. 2), pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego (rys. 3)

oraz pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego (rys. 4). Podstawą porównania dla przyjętych struktur komórkowych o powtarzającym się regularnym układzie prętów połączonych w sztywnym węźle są prace [13–25], w których wyznaczono wartości naprężeń granicznych lub powierzchnie graniczne.

2. Kryteria energetyczne dla struktur komórkowych

Rychlewski, wprowadzając koncepcję sprężystych stanów własnych, energetycznie ortogonalnych oraz energetycznego iloczynu skalarnego [2, 3], udowodnił, że dla ciała liniowo-sprężystego o dowolnej anizotropii energię sprężystą można rozłożyć jednoznacznie na co najwyżej sześć rozłącznych części. Kryterium J. Rychlewskiego będące kryterium dla sprzężonych stanów własnych można zapisać w postaci:

$$\frac{\Phi(\sigma_1)}{\Phi_1^{\text{gr}}} + \dots + \frac{\Phi(\sigma_p)}{\Phi_p^{\text{gr}}} \leq 1, \quad p \leq 6 \quad (1)$$

gdzie:

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_p$ – rozkład tensora naprężenia na p stanów własnych,

Φ_p^{gr} – graniczna wartość gęstości energii sprężystej w stanie własnym p .

Graniczną wartość gęstości energii sprężystej Φ_p^{gr} należy wyznaczyć eksperymentalnie lub, jak zaproponowano w [6, 7], obliczyć z teoretycznego modelu uwzględniającego strukturę materiału. Propozycję tę zastosowano w [8] w odniesieniu do pianek metalicznych oraz w pracach [1, 9, 10, 12] w odniesieniu do materiałów komórkowych. Przez stan graniczny dla materiałów komórkowych rozumiemy osiągnięcie granicy liniowej sprężystości.

3. Gęstości energii granicznych w kolejnych stanach własnych

Wartości granicznych energii sprężystych Φ_p^{gr} otrzymujemy w wyniku realizacji wspomnianych stanów własnych dla kolejnych struktur komórkowych. Dokładny sposób wyznaczenia tych zależności dla struktur o powtarzającym się elemencie: sześciianu, prostopadłościanu, pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego i sześciokąta foremnego podano w pracach [1, 9, 12]. Ze względu na długie i skomplikowane procedury wyznaczania Φ_p^{gr} poniżej przedstawione zostaną końcowe zależności analityczne wyrażające gęstość energii granicznych dla przytoczonych w pracy elementarnych komórek.

Komórka sześcienna (rys. 1), wartości granicznych energii sprężystych Φ_p^{gr} na podstawie [9, 12]:

$$\begin{aligned}
2 \Phi_I^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_I} (\boldsymbol{\sigma}_I \cdot \boldsymbol{\sigma}_I) = 3 \frac{1}{\lambda_I} \left(\frac{A R_e}{L^2} \right)^2, \\
2 \Phi_{II}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{II}} (\boldsymbol{\sigma}_{II} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{II}) = \frac{2}{3} \frac{1}{\lambda_{II}} \left(\frac{A R_e}{L^2} \right)^2, \\
2 \Phi_{III}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{III}} (\boldsymbol{\sigma}_{III} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{III}) = 6 \frac{1}{\lambda_{III}} \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L^6},
\end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

- R_e – granica plastyczności elementu belkowego,
- h – maksymalna odległość włókien górnych i dolnych elementu belkowego,
- A – pole przekroju elementu belkowego,
- I – moment bezwładności elementu belkowego,
- λ_p – wartość własna tensora sztywności nazywana modułem Kelvina, analityczny sposób wyznaczenia pokazano w [1, 9, 12].

Komórka prostopadłościenna (rys. 2), wartości granicznych energii sprężystych Φ_p^{gr} na podstawie [1, 12]:

$$\begin{aligned}
2 \Phi_I^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_I} (\boldsymbol{\sigma}_I \cdot \boldsymbol{\sigma}_I) = \frac{1}{\lambda_I} \left(\frac{A R_e}{L_{3-4} H} \right)^2, \\
2 \Phi_{II}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{II}} (\boldsymbol{\sigma}_{II} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{II}) = \frac{1}{\lambda_{II}} \left(\frac{A R_e}{L_{1-2} H} \right)^2, \\
2 \Phi_{III}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{III}} (\boldsymbol{\sigma}_{III} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{III}) = \frac{1}{\lambda_{III}} \left(\frac{A R_e}{L_{1-2} L_{3-4}} \right)^2, \\
2 \Phi_{IV}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{IV}} (\boldsymbol{\sigma}_{IV} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{IV}) = 8 \frac{1}{\lambda_{IV}} \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2}, \\
2 \Phi_V^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_V} (\boldsymbol{\sigma}_V \cdot \boldsymbol{\sigma}_V) = 8 \frac{1}{\lambda_V} \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2}, \\
2 \Phi_{VI}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{VI}} (\boldsymbol{\sigma}_{VI} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{VI}) = 8 \frac{1}{\lambda_{VI}} \frac{I^2 R_e^2}{h^2 L_{1-2}^2 L_{3-4}^2 H^2},
\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie:

- L_{i-j}, H – długość elementu belkowego.

Komórka w postaci pryzmy o podstawie trójkąta równobocznego (rys. 3), wartości granicznych energii sprężystych Φ_p^{gr} na podstawie [1, 12]:

$$\begin{aligned}
 2 \Phi_I^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_I} (\boldsymbol{\sigma}_I \cdot \boldsymbol{\sigma}_I) = \frac{2}{3} \frac{1}{\lambda_I} \frac{A^2 R_e^2}{L^2 H^2}, \\
 2 \Phi_{II}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{II}} (\boldsymbol{\sigma}_{II} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{II}) = \frac{16}{27} \frac{1}{\lambda_{II}} \frac{A^2 R_e^2}{L^4}, \\
 2 \Phi_{III}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{III}} (\boldsymbol{\sigma}_{III} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{III}) = \frac{2}{9} \frac{1}{\lambda_{III}} \frac{I^2 A^2 R_e^2 (61 - 8\sqrt{3})}{H^2 L^2 (4I + LhA)^2}, \\
 2 \Phi_{IV}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{IV}} (\boldsymbol{\sigma}_{IV} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{IV}) = \frac{64}{27} \frac{1}{\lambda_{IV}} \frac{I^2 R_e^2}{H^2 L^4 h^2}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Komórka w postaci pryzmy o podstawie sześciokąta foremnego (rys. 4), wartości granicznych energii sprężystych Φ_p^{gr} na podstawie [1, 12]:

$$\begin{aligned}
 2 \Phi_I^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_I} (\boldsymbol{\sigma}_I \cdot \boldsymbol{\sigma}_I) = 6 \frac{1}{\lambda_I} \frac{A^2 R_e^2}{L^2 H^2}, \\
 2 \Phi_{II}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{II}} (\boldsymbol{\sigma}_{II} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{II}) = \frac{4}{3} \frac{1}{\lambda_{II}} \frac{A^2 R_e^2}{H^2 L^2}, \\
 2 \Phi_{III}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{III}} (\boldsymbol{\sigma}_{III} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{III}) = 30 \frac{1}{\lambda_{III}} \frac{(s_{nL} + 2s_{\tau L})^2 R_e^2 A^2 I^2}{H^2 L^2 (4s_{nL}I + Ls_{\tau L}hA)^2}, \\
 2 \Phi_{IV}^{\text{gr}} &= \frac{1}{\lambda_{IV}} (\boldsymbol{\sigma}_{IV} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{IV}) = \frac{16}{3} \frac{1}{\lambda_{IV}} \frac{I^2 R_e^2}{H^2 L^4 h^2}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

4. Porównanie otrzymanych z wzorów analitycznych wartości naprężeń granicznych oraz powierzchni granicznych z danymi prezentowanymi w literaturze

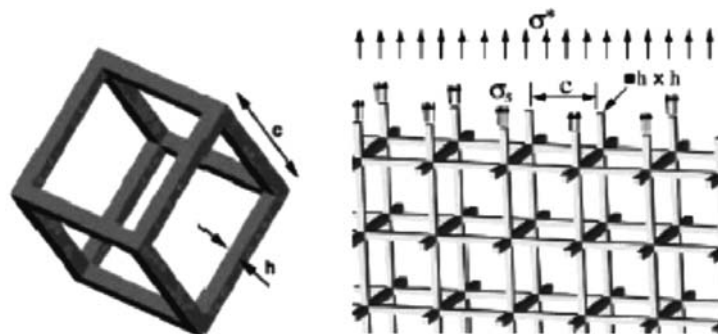
W celu weryfikacji otrzymanych rezultatów porównane będą wartości graniczne uzyskane z omawianego energetycznego kryterium z wartościami granicznymi prezentowanymi w literaturze.

4.1. Porównanie na poziomie tego samego modelu belkowego

Choi oraz Sankar w [13, 14] stosują model sześcienną strukturę komórkową dla piany węglowej (rys. 5).

Wymiary i charakterystyki materiałowe elementów reprezentatywnej komórki (szkieletu): $c = L = 1,810 \cdot 10^{-3}$ m, $h = 0,4096 \cdot 10^{-3}$ m, $E_s = 2,6$ GPa, $G_s = 1,04$ GPa, $\nu_s = 0,17$, $\sigma_s = R_e = 69,5$ MPa.

Rozwiązanie analityczne wg [13, 14]: $E^* = 134,632$ GPa, $G^* = 3,486$ GPa, $\sigma^* = \sigma^{gr} = 3,599$ MPa (przez „*” oznaczono parametry odnoszące się do materiału ze strukturą szkieletową, $\sigma^* = \sigma^{gr}$ jest naprężeniem granicznym dla materiału ze strukturą szkieletową).



Rys. 5. Model sześcienny piany węglowej wg [13, 14]

Fig. 5. The cube model of a carbon foam according to [13, 14]

Wyniki doświadczalne wg [13, 14]: $E^* = 124$ GPa, $\sigma^* = \sigma^{gr} = 3,5805$ MPa.

Rozwiązania analityczne wg obliczeń (1) na podstawie (2): $E^* = 134,632$ GPa, $G^* = 2,919$ GPa, $\sigma^* = \sigma^{gr} = 3,414$ MPa.

Z porównania widać, że proponowana metoda określania wartości naprężenia granicznego w oparciu o energetyczne kryterium J. Rychlewskiego (1) daje dobre rezultaty. Błąd oceny naprężenia granicznego otrzymanego z energetycznego kryterium J. Rychlewskiego (1) w stosunku do doświadczenia wynosi: $\frac{3,5805 - 3,414}{3,5805} 100\% = 4,6\%$. Błąd

oceny naprężenia granicznego otrzymanego z rozwiązania podanego przez [13, 14] w porównaniu z wynikami doświadczalnymi jest równy: $\frac{3,5805 - 3,599}{3,5805} 100\% = -0,5\%$. Znak

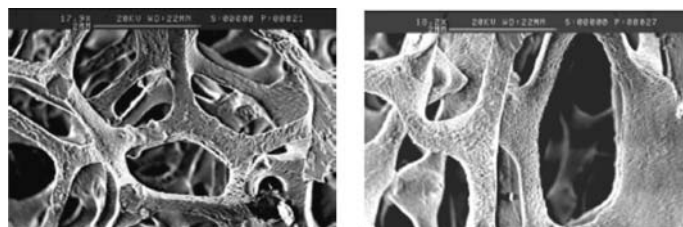
minus oznacza, że rozwiązanie podane przez [13, 14] zawyża wartość naprężenia granicznego.

Kwon Y.W., Cooke R.E., Park C. [15] rozważają piankę aluminiową (rys. 6). W pracy tej przedstawiono porównanie wytrzymałości pianki aluminiowej, stosując różne metody jej określenia. Autorzy porównali wyniki otrzymane z zastosowania modelu w postaci czternastościanu (rys. 7) z danymi z eksperymentu oraz z modelem proponowanym przez [16].

Wymiary i charakterystyki materiałowe elementów reprezentatywnej komórki: $E_s = 70$ GPa, $\sigma_s = R_e = 240$ MPa, $\nu_s = 0,3$, $\rho_s = 2,70$ g cc^{-1} . Porównano pianki aluminiowe

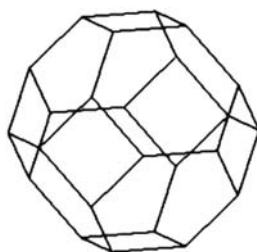
o trzech gęstościach względnych: $\frac{\rho^*}{\rho_s} = 0,061$, $\frac{\rho^*}{\rho_s} = 0,068$, $\frac{\rho^*}{\rho_s} = 0,077$ (przez „s” ozna-

czono parametry odnoszące się do szkieletu natomiast przez „*” oznaczono parametry odnoszące się do materiału ze strukturą szkieletową).



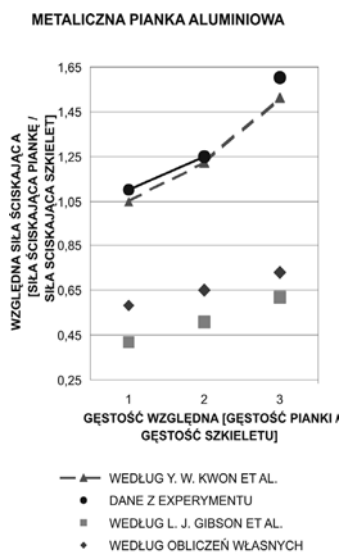
Rys. 6. Struktura pianki aluminiowej wg [15]

Fig. 6. The structure of aluminium foam according to [15]



Rys. 7. Model pianki aluminiowej w postaci czternastościanu wg [15]

Fig. 7. The model of aluminium foam in the shape of tetrakaidehedron according to [15]



Rys. 8. Porównanie względnej siły ściskającej¹

Fig. 8. The comparison of the relative compression force

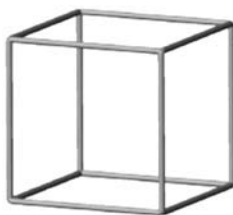
¹ Względną siłę ściskającą należy rozumieć jako jej wartość.

Z porównania przedstawionego na rysunku 8 widać, że proponowany model określenia wartości naprężenia granicznego w oparciu o energetyczne kryterium J. Rychlewskiego (1) daje rozwiązanie bliskie rozważaniom teoretycznym przedstawionym w pracy [16] dla reprezentatywnej komórki sześcienniej. Z rysunku 8 widać, że dla pianki aluminiowej, która wykazuje własności izotropowe, lepszym modelem od komórki sześcienniej (por. Warren W.E., Kraynik A.M. [17]) jest model w postaci czternastościanu.

4.2. Porównanie modelu belkowego z innymi modelami

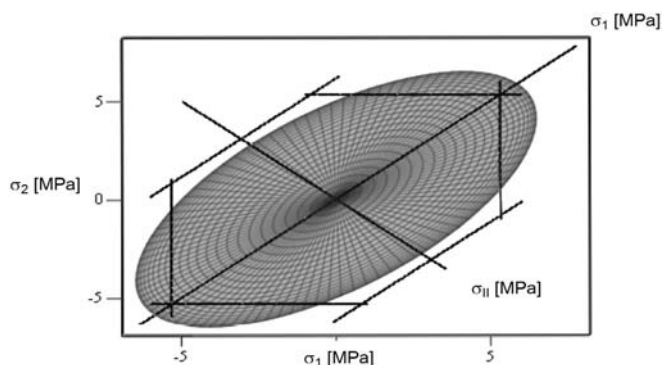
W pracy [18] stosowane są różne przykłady struktur (np. rys. 9) do opisu materiałów komórkowych. Rozważania dotyczące wytrzymałości materiałów komórkowych nie są prowadzone na bazie dyskretnego modelu belkowego, lecz z wykorzystaniem metody HFGMC (*High Fidelity Generalized Method of Cell*) opartej na homogenizacji dla periodycznych kompozytów. Wyniki prezentowane w tej pracy zostały również porównane z obliczeniami własnymi na podstawie (1) i (2).

Porównano rozwiązania otrzymane dla reprezentatywnej komórki sześcienniej w płaskim stanie naprężenia dla następujących danych dotyczących materiału szkieletu – aluminium: $E_s = 55 \text{ GPa}$, $\nu_s = 0,3$, objętość względna $V_f = 0,16$, $G_s = \frac{E_s}{2(1+\nu_s)}$.



Rys. 9. Model sześcienniej struktury komórkowej wg [18]

Fig. 9. The model of a cubic cellular structure according to [18]



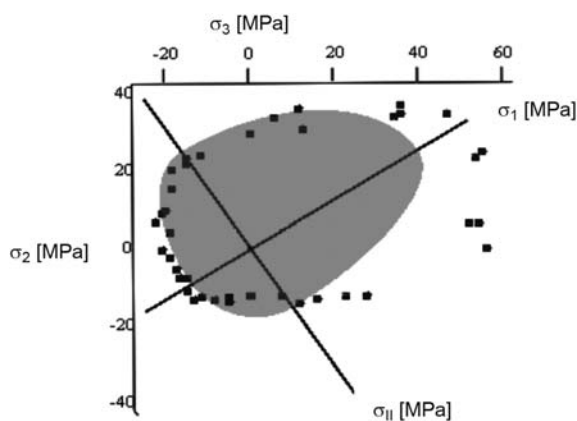
Rys. 10. Porównanie powierzchni granicznych wg obliczeń własnych [1] z wartościami prezentowanymi w pracy [18]

Fig. 10. The comparison of limit surfaces according to own [1] calculations with that one presented in [18]

Na rysunku 10 porównano obszar graniczny przedstawiony w pracy [18] – czarny kontur oraz obszar graniczny uzyskany z obliczeń własnych – szara elipsa. Formuła leżąca u podstawy rysunku 10 została dokładnie omówiona w pracach [1, 12].

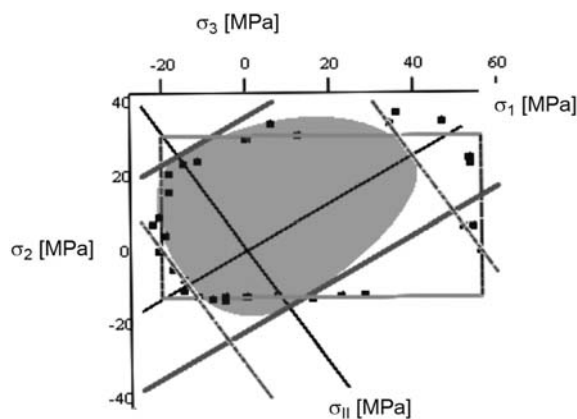
4.3. Porównanie obliczeń analitycznych z doświadczeniem

Wykorzystując dane doświadczalne podane w literaturze (por. [19], [20] i [21]), na rysunku 11 i 12 pokazano, jak wpisują się punkty z eksperymentu w powierzchnię graniczną z obliczeń własnych. Na rysunku 11 przedstawiono powierzchnię graniczną uzyskaną z energetycznego kryterium J. Rychlewskiego (1) oraz dane doświadczalne (punkty



Rys. 11. Porównanie obliczeń analitycznych z danymi z eksperymentu na przykładzie tektury

Fig. 11. The comparison of the results of analytical calculations with the experimental data on the example of a cardboard



Rys. 12. Porównanie obliczeń analitycznych z danymi z eksperymentu na przykładzie tektury

Fig. 12. The comparison of the results of analytical calculations with the experimental data on the example of a cardboard

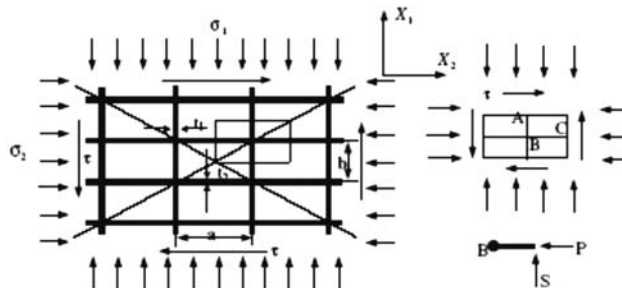
z eksperymentu). Natomiast na rysunku 12 przedstawiono dodatkowo kryterium proponowane w pracy [19] – obszar ograniczony prostymi.

Z rysunków 11 i 12 widać, że obszary graniczne uzyskane z energetycznego kryterium J. Rychlewskiego (1) i z kryterium zaproponowanego w pracy [19] w dużym stopniu pokrywają się ze sobą. Problem porównania dokładnie dyskutowano w pracy [23]. Również z rysunków tych widać, że punkty z eksperymentu w dużym stopniu wpisują się w obszar graniczny uzyskany z energetycznego kryterium J. Rychlewskiego, jak i z kryterium zaproponowanego w pracy [19].

4.4. Zastosowanie modelu belkowego dla materiałów o strukturze plastra miodu

W pracach [23, 24], przedstawiono analityczne rozważania dla materiałów o strukturze plastra miodu.

Model wg [23, 24] dla plastra miodu o podstawie kwadratu (dla kwadratu przyjęto model o podstawie prostokąta, przyjmując $a = b = l$, $t_1 = t_2 = t$):



Rys. 13. Model plastra miodu o podstawie prostokąta ($a = b = l$, $t_1 = t_2 = t$)

Fig. 13. The model of a honeycomb with a base of rectangle ($a = b = l$, $t_1 = t_2 = t$)

Równanie powierzchni granicznej [23, 24]:

$$\max \left\{ \left[\frac{b}{a} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{ys}} \right)^2 + 2 \frac{|\tau|}{\sigma_{ys}} - \frac{(t_2)^2}{ab} \right], \left[\frac{a}{b} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}} \right)^2 + 2 \frac{|\tau|}{\sigma_{ys}} - \frac{(t_1)^2}{ab} \right] \right\} = 0, \quad (6)$$

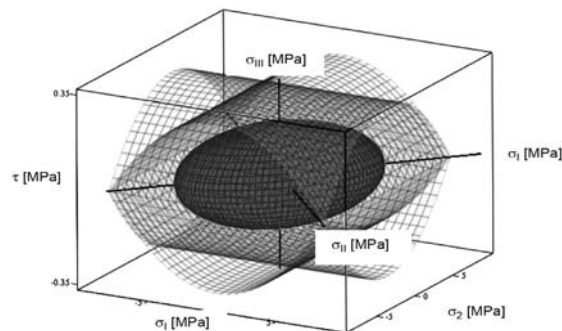
gdzie: $a = b = l$, $t_1 = t_2 = t$.

Prezentowany w niniejszej pracy model belkowy można stosować dla wybranej grupy *plastrów miodu*, z tym, że należy pamiętać o uwzględnieniu reprezentatywnego pasma. Należy również pamiętać, że zastąpienie modelu płytowego modelem belkowym powoduje utratę kilku efektów, np. współczynnika Poissona w kierunku prostopadłym do kierunku rozciągania płyty.

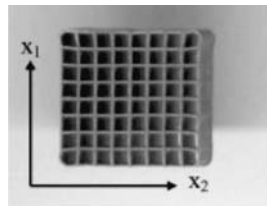
Uwzględniając równanie (6) i (1), otrzymujemy porównanie powierzchni granicznych na rysunku 14. Elipsoida odpowiada kryterium Rychlewskiego (1) z uwzględnieniem (2), natomiast powierzchnie walcowe odpowiadają kryterium (6).

Do narysowania powierzchni granicznych wykorzystano charakterystyki materiałowe stopu Cu-1% Ni $E_s = 117$ GPa, $G_s = 45$ GPa, $R_e = 112$ MPa, $L = 2000$ μ m, $d = 150$ μ m, pasmo o szerokości $H = 2000$ μ m.

Porównując wartość naprężenia granicznego otrzymanego z eksperymentu (por. [25]) dla stopu 18 Ni (350) pokazanego na rysunku 15 otrzymujemy: rozwiązanie analityczne [23, 24]: $\sigma^* = \sigma^{\text{gr}} = 200$ MPa, wyniki doświadczalne wg. [25]: $\sigma^* = \sigma^{\text{gr}} = 68$ MPa, rozwiązania analityczne wg obliczeń własnych: $\sigma^* = \sigma^{\text{gr}} = 67,251$ MPa, (przez „*” oznaczono parametry odnoszące się do materiału ze strukturą szkieletową, $\sigma^* = \sigma^{\text{gr}}$ jest naprężeniem granicznym dla materiału ze strukturą szkieletową).



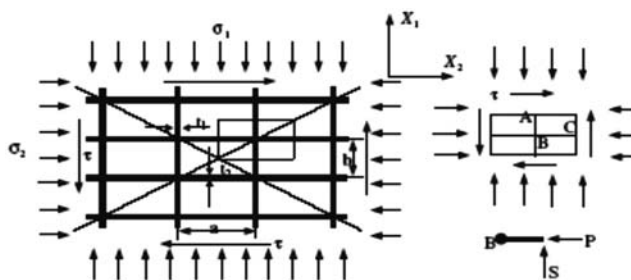
Rys. 14. Porównanie powierzchni granicznych wg równań (6) i (1)
Fig. 14. The comparison of limit surfaces according to equations (6) and (1)



Rys. 15. Doświadczalny materiał w postaci stopu 18 Ni (350) [25]
Fig. 15. The testing material of an alloy 18 Ni (350) [25]

Z porównania widać, że proponowana metoda określania wartości naprężenia granicznego w oparciu o energetyczne kryterium J. Rychlewskiego dla modelu belkowego daje dobre rozwiązanie.

Model wg [23, 24] dla plastra miodu o podstawie prostokąta:



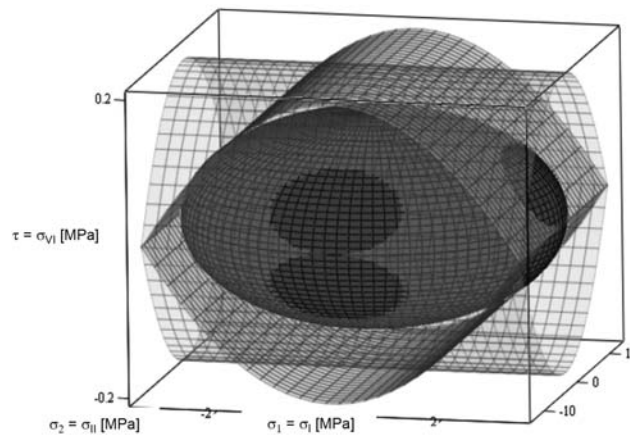
Rys. 16. Model plastra miodu o podstawie prostokąta ($a \neq b, t_1 \neq t_2$)
Fig. 16. The model of a honeycomb with a base of rectangle ($a \neq b, t_1 \neq t_2$)

Równanie powierzchni granicznej [23, 24]:

$$\max \left\{ \left[\frac{b}{a} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{ys}} \right)^2 + 2 \frac{|\tau|}{\sigma_{ys}} - \frac{(t_2)^2}{ab} \right], \left[\frac{a}{b} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}} \right)^2 + 2 \frac{|\tau|}{\sigma_{ys}} - \frac{(t_1)^2}{ab} \right] \right\} = 0, \quad (7)$$

gdzie: ($a \neq b, t_1 \neq t_2$).

Uwzględniając równanie (7) i (1), otrzymujemy porównanie powierzchni granicznych na rysunku 17. Elipsoida odpowiada kryterium Rychlewskiego (1) z uwzględnieniem (3), natomiast powierzchnie walcowe odpowiadają kryterium (7).

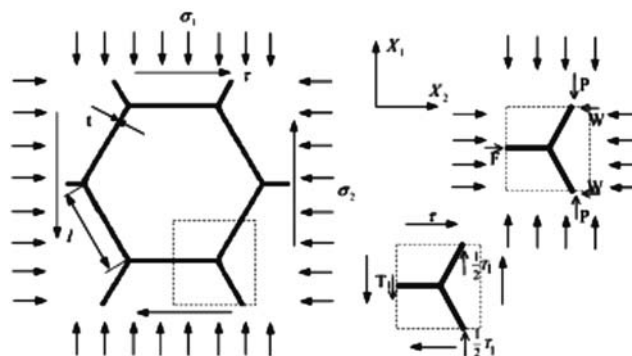


Rys. 17. Porównanie powierzchni granicznych wg równań (7) i (1)

Fig. 17. The comparison of limit surfaces according to equations (7) and (1)

Do narysowania powierzchni granicznych wykorzystano charakterystyki materiałowe stopu Cu-1% Ni $E_s = 117$ GPa, $G_s = 45$ GPa, $R_e = 112$ MPa, $L_{1-2} = 1000$ μm , $L_{3-4} = 4000$ μm , $d = 120$ μm , pasmo o szerokości $H = 1000$ μm . Powierzchnie graniczne uzyskane z równań (7) i (1) w dużym stopniu pokrywają się.

Model [23, 24] dla plastra miodu o podstawie sześciokąta foremnego.



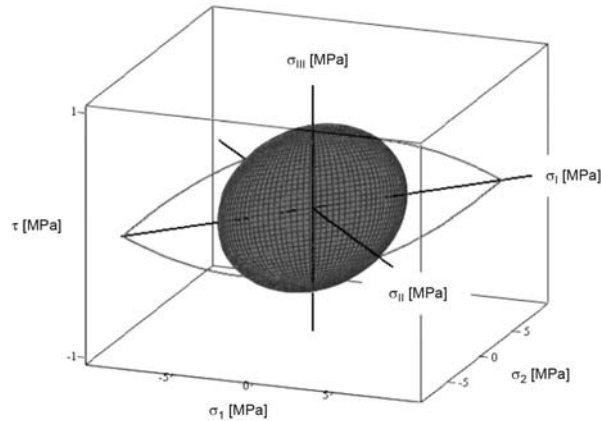
Rys. 18. Model plastra miodu o podstawie sześciokąta foremnego

Fig. 18. The model of honeycomb with the base of the base of regular hexagon

Równanie powierzchni granicznej [23, 24]:

$$\max \left\{ \left[\frac{3(3(\sigma_1 + \tau) + \sigma_2)^2}{16(\sigma_{ys})^2} + \frac{3|\sigma_2 - (\sigma_1 + \tau)|}{2\sigma_{ys}} - \frac{t^2}{l^2} \right], \left[3 \frac{(\sigma_1)^2}{(\sigma_{ys})^2} + 2\sqrt{3} \frac{|\tau|}{\sigma_{ys}} - \frac{t^2}{l^2} \right] \right\} = 0. \quad (8)$$

Uwzględniając równanie (8) i (1), otrzymujemy porównanie powierzchni granicznych na rysunku 19. Obszar kołowy odpowiada kryterium Rychlewskiego (1) z uwzględnieniem (4), natomiast dwie krzywe odpowiadają kryterium (8).



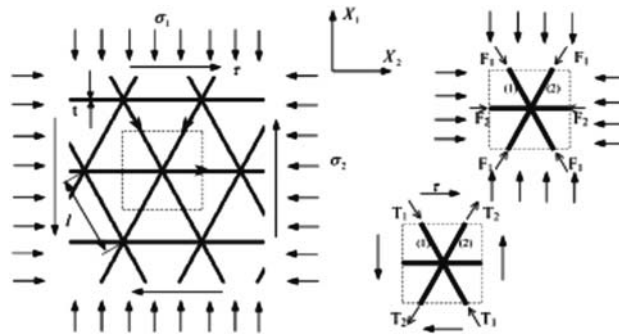
Rys. 19. Porównanie powierzchni granicznych wg równań (8) i (1)

Fig. 19. The comparison of limit surfaces according to equations (8) and (1)

Do narysowania powierzchni granicznych wykorzystano charakterystyki materiałowe stopu Cu–1% Ni $E_s = 117$ GPa, $G_s = 45$ GPa, $R_e = 112$ MPa, $L = 2000$ μ m, $d = 260$ μ m, pasmo o szerokości $H = 2000$ μ m.

Powierzchnie graniczne uzyskane z równań (8) i (1) pokrywają się tylko częściowo, co świadczy o ograniczonym zakresie stosowania modelu belkowego dla materiału ze strukturą plastra miodu o podstawie sześciokąta foremnego.

Model wg [23, 24] dla plastra miodu o podstawie trójkąta równobocznego:



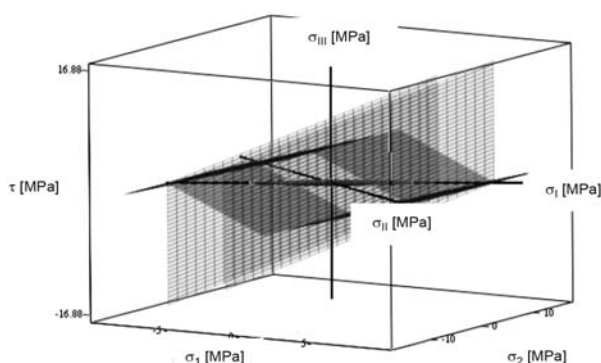
Rys. 20. Model plastra miodu o podstawie trójkąta równobocznego

Fig. 20. The model of honeycomb with the base of equilateral triangle

Równanie powierzchni granicznej [23, 24]:

$$\max \left\{ \left[\left| \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}} - \frac{\tau}{\sigma_{ys}} \right| - \frac{t}{l} \right], \left[\left| \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}} + \frac{\tau}{\sigma_{ys}} \right| - \frac{t}{l} \right], \left[\left| \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_2}{\sigma_{ys}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{\sigma_1}{\sigma_{ys}} \right| - \frac{t}{l} \right] \right\} = 0. \quad (9)$$

Uwzględniając równanie (9) i (1), otrzymujemy porównanie powierzchni granicznych na rysunku 21. Wąska elipsoida odpowiada kryterium Rychlewskiego (1) z uwzględnieniem (5), natomiast płaty powierzchniowe odpowiadają kryterium (9).



Rys. 21. Porównanie powierzchni granicznych wg równań (9) i (1)
Fig. 21. Te comparison of limit surfaces according to equations (9) and (1)

Do narysowania powierzchni granicznych wykorzystano charakterystyki materiałowe stopu Cu-1%Ni $E_s = 117$ GPa, $G_s = 45$ GPa, $R_e = 112$ MPa, $L = 2000$ μm , $d = 87$ μm , pasmo o szerokości $H = 2000$ μm .

Powierzchnie graniczne uzyskane z równań (9) i (1) pokrywają się w bardzo małym stopniu, co świadczy o ograniczonym zakresie stosowania modelu belkowego dla materiału ze strukturą plastra miodu o podstawie trójkąta równobocznego.

5. Wnioski

Ważnym i otwartym problemem jest określenie kryterium wyężenia dla materiałów komórkowych. Pojęcie wyężenia jest pojmowane zazwyczaj intuicyjnie jako osłabienie mechanicznych własności materiału, spowodowane obciążeniem ciała i łączy się z poszukiwaniem miary wyężenia, tzn. pewnej funkcji składowych naprężenia lub odkształcenia, której wartość mierzy odległość od przyjętego stanu granicznego.

Wyznaczenie analitycznej postaci wzorów dla granicznych energii sprężystych pozwala modelować rozkłady sztywności struktury z punktu widzenia wytrzymałości w zależności od zadanych parametrów mikrostruktury i morfologii szkielet. Daje to możliwość projektowania materiałów z uwzględnieniem przyjętych własności mechanicznych wynikających z założonej funkcji, które mają spełniać.

Proponowane w artykule podejście daje możliwość budowania fizycznych podstaw teorii wyężenia materiałów anizotropowych.

Literatura

- [1] Kordzikowski P., Janus-Michalska M., Pęcherski R.B., *Specification of energy-based criterion of elastic limit states for cellular materials*, Archives of Metallurgy and Materials, Vol. 50, 3/2005, 621-634.
- [2] Rychlewski J., *Elastic energy decomposition and limit criteria*, Uspekhi Mekh. – Advances in Mech., 1984, t. 7, 51-80 (po rosyjsku).
- [3] Rychlewski J., *Unconventional approach to linear elasticity*, Arch. Mech., 1995, t. 47, 149-171.
- [4] Kowalczyk K., Ostrowska-Maciejewska J., Pęcherski R.B., *An-energy based yield criterion for solids of cubic elasticity and orthotropic limit state*, Arch. Mech., 2003, t. 55, 2003, 431-448.
- [5] Kowalczyk-Gajewska K., Ostrowska-Maciejewska J., *Energy-based limit criteria for anisotropic elastic materials with constraints*, Arch. Mech. 2005, t. 57.
- [6] Nalepka K., Pęcherski R.B., *Fizyczne podstawy energetycznego kryterium wyężenia monokryształów*, XXX Szkoła Inżynierii Materiałowej, Kraków–Ustroń–Jaszowiec, 1–4 X 2002, (ed. J. Pacyno), AGH, Kraków 2002, 311-316.
- [7] Nalepka K., Pęcherski R.B., *Energetyczne kryteria wyężenia. Propozycja obliczania granicznych energii z pierwszych zasad*, Rudy i Metale Nieżelazne 2003, r. 48, 533-536.
- [8] Janus-Michalska M., Pęcherski R.B., *Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling*, Technische Mechanik, 2003, t. 23, 234-244.
- [9] Kordzikowski P., Janus-Michalska M., Pęcherski R.B., *Analiza wpływu wytrzymałości prętów sześcienniej struktury komórkowej na rozkład granicznych energii*, Rudy i Metale Nieżelazne 2004, R 49, Nr 3, 114-120.
- [10] Janus-Michalska M., Kordzikowski P., Pęcherski R.B., *Energy-based approach to limit state criteria of cellular materials*, International Symposium on Developments in Plasticity and Fracture-Centenary of M. T. Huber Criterion, 12–14 August 2004, Kraków – poster prezentowany na wyżej wymienionej konferencji.
- [11] Janus-Michalska M., *Effective models describing elastic behaviour of cellular materials*, Archives of Metallurgy and Materials, Vol. 50, 3/2005, 595-608.
- [12] Kordzikowski P., *Podstawy teorii wyężenia materiałów komórkowych w oparciu o energetyczne kryteria stanów granicznych*, praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 2006.
- [13] Choi S., Sankar B.V., *Fracture toughness of carbon foam*, Journal of Composite Materials, Vol. 37, No. 23/2003.
- [14] Choi S., Sankar B.V., *A micromechanical method to predict the fracture toughness of cellular materials*, International Journal of Solids and Structures 42 (2005), 1797-1817.

- [15] Kwon Y.W., Cooke R.E., Park C., *Representative unit-cell models open-cell metal foams with or without elastic filler*, Materials Science & Engineering A, 2003, 343, 63-70.
- [16] Gibson L.J., Ashby M.F., *Cellular solids: Structure and properties*, Cambridge University Press 1997.
- [17] Warren W.E., Kraynik A.M., *The linear elastic properties of open-cell foams*, Journal of Applied Mechanics 1988, Vol. 55, 341-346.
- [18] Aboudi J., Gilat R., *Micromechanical analysis of lattice blocks*, International Journal of Solids and Structures 42, 2005, 4372-4392.
- [19] Arramon Y.A., Mehrabadi M.M., Martin D.W., Cowin S.C., *A multi-dimensional anisotropic strength criterion based on Kelvin modes*, International Journal of Solids and Structures 37, 2000, 2915-2935.
- [20] Suhling J.C., Rowlands R.E., Johnson M.W., Gunderson D.E., *Tensorial Strength Analysis of Paperboard*, Exp. Mech. 1985, 75-84.
- [21] Biegler M.W., Mehrabadi M.M., *An energy-based constitutive model for anisotropic solids subject to damage*, Mechanics of Materials 19, 1995, 151-164.
- [22] Kordzikowski P., Pęcherski R.B., *Porównanie energetycznych kryteriów wyężenia dla sprężonych i rozłącznych sprężystych stanów własnych na przykładzie wybranych materiałów anizotropowych*, Rudy i Metale Nieżelazne, R 50, Nr 10-11, 2005, 566-571.
- [23] Wang A.J., McDowell D.L., *In-Plane Stiffness and Yield Strength of Periodic Metal Honeycombs*, Journal of Engineering Materials and Technology 2004.
- [24] Wang A.J., McDowell D.L., *Yield surfaces of various periodic metal honeycombs at intermediate relative density*, International Journal of Plasticity 2005.
- [25] Hayes A.M., Wang A., Dempsey B.M., McDowell D.L., *Mechanics of linear cellular alloys*, Mechanics of Materials 36, 2004, 691-713.