

PRZEMYSŁAW WÓJCICKI, ANDRZEJ WINNICKI*

NUMERYCZNY TEST ROZCIĄGANIA ZE ŚCINANIEM WEDŁUG WILLAMA DLA MODELI BETONU RYS ROZMYTYCH DOSTĘPNYCH W PROGRAMIE DIANA

NUMERICAL WILLAM'S TEST OF TENSION WITH SHEAR FOR SMEARED CRACK CONCRETE MODELS AVAILABLE IN DIANA CODE

Streszczenie

Artykuł prezentuje dwa podstawowe modele rys rozmytych dostępne w programie MES DIANA i używane dla analizy konstrukcji betonowych: model rys o ustalonych kierunkach dopuszczający powstanie wielu rys nieortogonalnych w danym punkcie materialnym i model rys obracających się. W artykule przedstawiono podstawy teoretyczne obu modeli i przeanalizowano ich zachowanie na poziomie punktu materialnego w dwóch testach: rozciągania przy wymuszeniu odkształceniowym i testu rozciągania ze ścinaniem (tzw. numeryczny test Willama). W numerycznym teście Willama model materiału jest poddany programowi obciążenia, w którym kierunki odkształceń głównych obracają się. Wyniki symulacji numerycznych prowadzą do wniosku, że żaden z modeli nie opisuje w pełni poprawnie zachowania się betonu w zakresie pokrytycznym.

Słowa kluczowe: beton, rysy rozmyte, rozciąganie, numeryczny test Willama, symulacje numeryczne, MES

Abstract

Paper presents two basic smeared crack models available in the FEM code DIANA and used for an analysis of concrete structures: a fixed crack model allowing creation of many non – orthogonal cracks at a given material point and rotating crack model. In the paper the theoretical backgrounds of both models are presented and their behaviour in two tests at the material point level is analysed: strain driven tension test and tension – shear test (the so called numerical Willam's test). In Willam's test a material model is subjected to a loading programme, in which direction of the principal strains rotate. Results of the numerical simulations lead to a conclusion that neither of those two models describe in a fully proper way behaviour of concrete in post – critical range.

Keywords: concrete, smeared cracks, tension, Willam's test, numerical simulations, FEM

* Mgr inż. Przemysław Wójcicki, dr hab. inż. Andrzej Winnicki, prof. PK, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

Oznaczenia

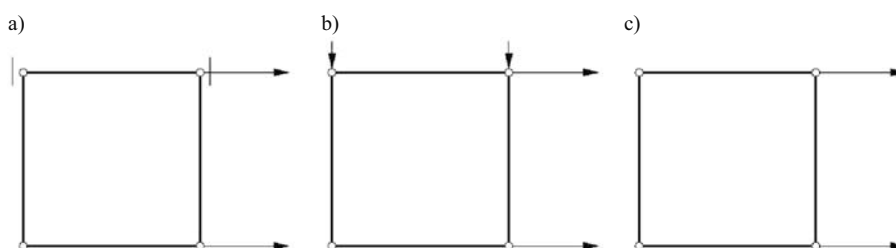
$\boldsymbol{\epsilon}^e$	– odkształcenia sprężyste w układzie globalnym
$\boldsymbol{\epsilon}^{cr}$	– odkształcenia pochodzące od zarysowania w układzie globalnym
\mathbf{e}_1^{cr}	– wektor odkształceń w pierwszej rysie
ϵ_{nn1}^{cr}	– odkształcenie normalne w pierwszej rysie
γ_{nt1}^{cr}	– odkształcenie styczne w pierwszej rysie
σ_{nn1}	– naprężenie normalne w pierwszej rysie
τ_{nt1}	– naprężenie styczne w pierwszej rysie
\mathbf{n}	– wektor jednostkowy normalny
\mathbf{t}	– wektor jednostkowy styczny
\mathbf{N}_1	– macierz transformacji dla pierwszej rysy
\mathbf{s}_1	– wektor naprężeń w pierwszej rysie dla modelu rys o ustalonych kierunkach
σ_1	– maksymalne naprężenie główne
θ	– kąt progowy dla modelu rys o ustalonych kierunkach
N	– liczba aktywnych rys
\mathbf{N}	– zbiorcza macierz transformacji dla modelu rys o ustalonych kierunkach
\mathbf{D}^e	– liniowo sprężysta macierz sztywności
\mathbf{D}^{cr}	– zbiorcza macierz sieczna dla układu N rys
\mathbf{D}_i^{cr}	– macierz sieczna dla i -tej rysy
\mathbf{D}_{sec}	– sieczna macierz sztywności dla betonu zarysowanego
D_{sec}^I	– sztywność normalna dla rysy
D_{sec}^{II}	– sztywność styczna dla rysy
\mathbf{D}_{tang}^{cr}	– zbiorcza macierz styczna dla układu N rys
$\mathbf{D}_{tang,i}^{cr}$	– macierz styczna dla i -tej rysy
\mathbf{D}_{tang}	– styczna macierz sztywności dla betonu zarysowanego
μ	– bezwymiarowy współczynnik opisujący degradację sztywności normalnej
β	– bezwymiarowy współczynnik opisujący degradację sztywności na ścinanie
$\boldsymbol{\sigma}^{pr}$	– całkowite naprężenia główne dla modelu z rysami obracającymi się
$\boldsymbol{\epsilon}^{pr}$	– całkowite odkształcenia główne dla modelu z rysami obracającymi się
\mathbf{D}_{sec}^{pr}	– macierz sieczna dla modelu z rysami obracającymi się w układzie naprężeń głównych
\mathbf{D}_{tang}^{pr}	– macierz styczna dla modelu z rysami obracającymi się w układzie naprężeń głównych
E_1, E_2	– moduły sieczne dla modelu z rysami obracającymi się [GPa]

\mathbf{T}	– macierz transformacji dla modelu z rysami obracającymi się dla wartości całkowitych
\mathbf{T}_1	– macierz transformacji dla modelu z rysami obracającymi się dla wartości przyrostowych
E	– moduł Younga [GPa]
ν	– współczynnik Poissona
f_t	– wytrzymałość na rozciąganie [MPa]
G_f	– energia pęknięcia [N/m]
G	– moduł Kirchoffa [GPa]
ϵ_0	– odkształcenia odpowiadającego naprężeniu $\sigma = f_t$
ϵ_u^{cr}	– końcowe odkształcenie elementu

1. Wstęp

Celem niniejszego artykułu jest analiza zachowania wybranych modeli rys rozmytych opracowanych i zaimplementowanych w programie DIANA na poziomie punktu materialnego dla analizy elementów i konstrukcji betonowych i żelbetowych. Dla zrealizowania celu wybrano dwa testy numeryczne:

1. Test jednoosiowego rozciągania przy wymuszeniu kinematycznym. Zastosowanie wymuszenia kinematycznego jest niezbędne dla osiągnięcia ścieżki pokrytycznej, to znaczy osłabienia materiału po zarysowaniu. Test ten został przeprowadzony w trzech wariantach:
 - a) jednokierunkowe rozciąganie w kierunku osi x przy zadanym przemieszczeniu u_x i jednoczesnym umożliwieniu swobodnego przesuwu w kierunku osi y (rys. 1a);
 - b) jednokierunkowe rozciąganie w kierunku osi x przy zadanym przemieszczeniu u_x i jednoczesnym zadanym przemieszczeniu w kierunku osi y o wartości $u_y = -\nu \cdot u_x$ (rys. 1b);
 - c) jednokierunkowe rozciąganie w kierunku osi x przy zadanym przemieszczeniu u_x i zablokowaniu możliwości przesuwu w kierunku osi y , $u_y = 0$ (rys. 1c).



Rys. 1. Warianty testu rozciągania
Fig. 1. Cases of tension test

2. Numeryczny test Willama:

Numeryczny test Willama został zaproponowany po raz pierwszy przez prof. Kaspára J. Willama i jego zespół z University of Colorado w Boulder i od jego nazwiska

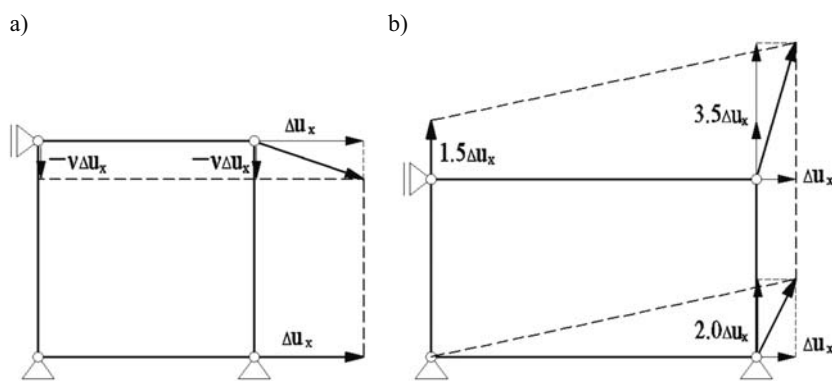
przejął po publikacji w [1] swoją nazwę. Jest on najczęściej stosowany przy weryfikacji modeli materiałowych. Numeryczny test Willama, jak zauważono w [2], okazuje się wyjątkowo przydatny do tego typu zastosowań, gdyż różne modele materiałowe, mimo często dużego podobieństwa w ich sformułowaniu, wykazują odmienne zachowanie w tym teście. Cecha ta była już wielokrotnie wykorzystywana z powodzeniem przez światowe ośrodki naukowe, m.in. do porównywania modeli rys rozmytych o ustalonym kierunku (ang. *fixed smeared cracks*) lub z rysami obracającymi się (ang. *rotating smeared cracks*) [3, 4], modelu kontynualnej mechaniki uszkodzeń z powierzchnią nośności typu Rankina [5] oraz modelu gradientowego mechaniki uszkodzeń połączonej z plastycznością [6].

Numeryczny test Willama przeprowadza się na pojedynczym, 4-węzłowym elemencie skończonym, który poddawany jest wymuszeniu kinematycznemu w dwóch fazach:

- I. Faza jednoosiowego rozciągania w kierunku poziomym z pionową kontrakcją związaną z efektem Poissona (rys. 2a). Poszczególne składniki odkształcenia występują w następującej relacji:

$$\Delta \varepsilon_{xx} : \Delta \varepsilon_{yy} : \Delta \gamma_{xy} = 1 : -\nu : 0$$

Ten schemat obciążenia stosuje się do chwili osiągnięcia przez element granicy wytrzymałości betonu na rozciąganie (f_t). Zapewnia on pozostawanie elementu w stanie jednoosiowego rozciągania w przestrzeni naprężeń. Schemat ten jest identyczny ze schematem 1b testu rozciągania.



Rys. 2. Numeryczny test Willama: a) faza I – jednoosiowe rozciąganie
b) faza II – dwuosiowe rozciąganie ze ścinaniem

Fig. 2. Willam's test: a) Phase I – uniaxial tension
b) Phase II – biaxial tension and shearing

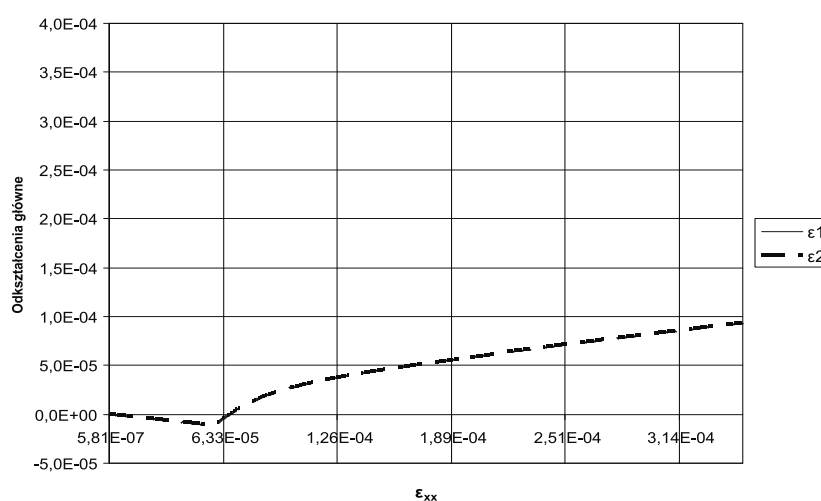
- II. Po osiągnięciu f_t rozpoczyna się faza dwuosiowego rozciągania ze ścinaniem (rys. 2b). W tej fazie obciążenia składników odkształcenia zadane są następująco:

$$\Delta \varepsilon_{xx} : \Delta \varepsilon_{yy} : \Delta \gamma_{xy} = 0.5 : 0.75 : 1$$

Taki schemat obciążenia powoduje rozciąganie elementu w dwóch kierunkach oraz dodatkowo powstanie odkształceń ścinających. Numeryczny test Willama zakłada wy-

muszenie kinematyczne na poziomie odkształceń. W celu jego realizacji za pomocą MES należy zadać odpowiednie przemieszczenia w węzłach rozpatrywanego elementu (rys. 2).

W numerycznym teście Willama w fazie II odkształcenia główne ε_1 i ε_2 są dodatnie (rozciągające) i rosną w procesie obciążenia (rys. 3). Dochodzi przy tym do obrotu kierunków głównych odkształcenia. W fazie I testu (do zarysowania) kierunek odkształcenia ε_1 pokrywa się z osią x . W fazie II kierunek odkształcenia ε_1 zaczyna się obracać przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Prędkość obrotu jest wysoka, ale z czasem zmniejsza się. W granicy (dla $\varepsilon_{xx} \rightarrow +\infty$) kąt obrotu pomiędzy osią ε_1 a osią x wynosi $\alpha_c = 52,018^\circ$.



Rys. 3. Odkształcenia główne w numerycznym teście Willama

Fig. 3. Principal strains in Willam's test

2. Wykorzystane modele betonu

W przeprowadzonych analizach numerycznych wykorzystano dwa podstawowe modele rys rozmytych oferowane przez program DIANA [7]. Pierwszy z nich jest nazywany w instrukcji programu modelem rys rozmytych z dekompozycją odkształceń (ang. *smeared crack model with strain decomposition*). W rzeczywistości model ten należy do rodziny modeli rys rozmytych o ustalonych kierunkach (ang. *fixed crack models*) [4, 8, 9, 10]. W odróżnieniu od pierwotnych sformułowań modeli rys o ustalonych kierunkach, które dopuszczały wyłącznie powstanie jednej rysy rozmytej lub w procesie obciążenia dwóch rys wzajemnie prostopadłych, model ten w sposób oryginalny dopuszcza tworzenie się w danym punkcie materialnym wielu rys wzajemnie nieortogonalnych [11].

Drugi model jest nazywany w instrukcji programu modelem rys sformułowanym w całkowitych odkształceniach (ang. *total strain crack model*). W formie wykorzystanej w artykule model ten należy do rodziny modeli rys rozmytych obracających się [4, 10, 12, 13].

Dalej w artykule pierwszy z przedstawionych modeli będzie nazywany modelem rys rozmytych o ustalonych kierunkach, zaś drugi modelem rys rozmytych z rysami obracającymi się.

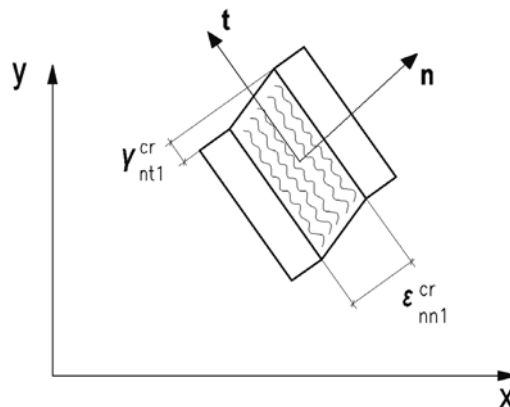
Należy podkreślić, że koncepcja rys rozmytych dla opisu zarysowania betonu powstała dawno temu – pochodzi z roku 1968 od Rashida [14]. Okazała się ona bardzo atrakcyjna numerycznie, wciąż stanowi efektywne narzędzie badawcze i cały czas powstają nowe jej odmiany [15].

2.1. Model rys rozmytych o ustalonych kierunkach

Pierwszy z modeli umożliwia opisanie wielu rys rozmytych w danym punkcie materialnym. Rysy te powstają kolejno w procesie obciążenia – ich ilość nie jest ograniczona, raz ustalony kierunek rysy nie zmienia się później w procesie obciążenia. Model ten zaproponowano w pracach de Borsta i Nauty [11] i de Borsta [16]. Podstawowym założeniem jest dekompozycja całkowitych odkształceń w punkcie materialnym na część sprężystą (ϵ^e) i część pochodzącą od zarysowania (ϵ^{cr}):

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{cr} \quad (1)$$

Należy zauważyć, że w pracy de Borsta [16] model ten jest podany w postaci ogólniejszej przez dodanie do wyrażenia (1) składników reprezentujących odkształcenia plastyczne, pełzania i termiczne.



Rys. 4. Układ lokalny rysy
Fig. 4. Crack local coordinate frame

Część pochodząca od zarysowania (ϵ^{cr}) jest sumą w globalnym układzie odniesienia odkształceń normalnych i stycznych we wszystkich istniejących rysach. Wektor odkształceń e_1^{cr} w pierwszej rysie w układzie lokalnym związanym z tą rysą ma postać:

$$e_1^{cr} = \begin{bmatrix} \epsilon_{nn1}^{cr} \\ \gamma_{nt1}^{cr} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie:

ϵ_{nnl}^{cr} – odkształcenie normalne w rysie,

γ_{ntl}^{cr} – odkształcenie styczne w rysie.

Wprowadzając wektory jednostkowe \mathbf{n} – normalny i \mathbf{t} – styczny, które w sposób jednoznaczny definiują płaszczyznę rysy, o współrzędnych w układzie globalnym:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \quad (3)$$

można transformację odkształceń od zarysowania z układu lokalnego rysy do układu globalnego zapisać jako:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{cr} = \mathbf{N}_1 \mathbf{e}_1^{cr} \quad (4)$$

gdzie:

$\boldsymbol{\epsilon}^{cr}$ – odkształcenie od zarysowania w układzie globalnym w zapisie wektorowym:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{cr} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^{cr} \\ \epsilon_{yy}^{cr} \\ \gamma_{xy}^{cr} \end{bmatrix} \quad (5)$$

\mathbf{N}_1 – macierz transformacji dla pierwszej rysy o postaci:

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x t_x \\ n_y^2 & n_y t_y \\ 2n_x n_y & n_x t_y + n_y t_x \end{bmatrix} \quad (6)$$

Jednocześnie zależność pomiędzy wektorem naprężeń w pierwszej rysie \mathbf{s}_1 a całkowitym stanem naprężenia ma postać:

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{N}_1^T \boldsymbol{\sigma}, \quad (7)$$

gdzie:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{nnl} \\ \tau_{ntl} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Kryterium powstawania pierwszej rysy jest osiągnięcie przez maksymalne naprężenie główne σ_1 wartości wytrzymałości betonu na rozciąganie f_p , lokalny układ współrzędnych (\mathbf{n}, \mathbf{t}) jest współosiowy z kierunkami naprężeń głównych w chwili powstania rysy i pozostaje niezmienny w dalszym procesie obciążenia. Kolejna rysa powstaje w chwili, kiedy ponownie maksymalne naprężenie główne σ_1 osiąga wartość f_p , a jego kierunek jest odchylony od wektora normalnego \mathbf{n} poprzedniej rysy o kąt równy lub

wiekszy od wartości progowej θ . Wprowadzenie kąta progowego θ (np.: $\theta = 30^\circ$) ogranicza możliwą do powstania liczbę rys i zapewnia większą stabilność rozwiązania numerycznego. Dla przypadku istnienia N rys rozmytych w danym punkcie materialnym zamiast związków (4) i (7) obowiązują zależności:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\text{cr}} = \sum_i N_i \mathbf{e}_i^{\text{cr}} \quad (9)$$

oraz

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{N}_i^T \boldsymbol{\sigma}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

Jak widać, w tym przypadku odkształcenie od zarysowania jest sumą odkształceń we wszystkich rysach, zaś stan naprężenia w każdej rysie jest jednoznacznie określony przez całkowite naprężenie w układzie globalnym. Wprowadzając zbiorcze wektory odkształcenia we wszystkich rysach \mathbf{e}^{cr} :

$$\mathbf{e}^{\text{cr}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^{\text{cr}} \\ \mathbf{e}_2^{\text{cr}} \\ \dots \\ \mathbf{e}_N^{\text{cr}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

i naprężenia \mathbf{s} :

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \dots \\ \mathbf{s}_N \end{bmatrix} \quad (12)$$

można zapisać związki (9) i (10) w formie bardziej zwartej:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\text{cr}} = \mathbf{N} \mathbf{e}^{\text{cr}}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (13)$$

gdzie:

\mathbf{N} – zbiorcza macierz transformacji w formie:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_N] \quad (14)$$

Związek fizyczny dla części sprężystej odkształceń przyjmuje się w standardowej formie:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e \boldsymbol{\epsilon}^e, \quad (15)$$

gdzie:

\mathbf{D}^e – liniowo-sprężysta macierz sztywności w postaci:

$$\mathbf{D}^e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Dla układu rys związek fizyczny w ogólnej formie siecznej można sformułować jako:

$$\mathbf{s} = \mathbf{D}^{\text{cr}} \mathbf{e}^{\text{cr}} \quad (17)$$

W rozpatrywanym sformułowaniu zakłada się brak interakcji pomiędzy poszczególnymi rysami, co prowadzi do niezależnych związków fizycznych dla każdej rysy:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{D}_i^{\text{cr}} \mathbf{e}_i^{\text{cr}}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (18)$$

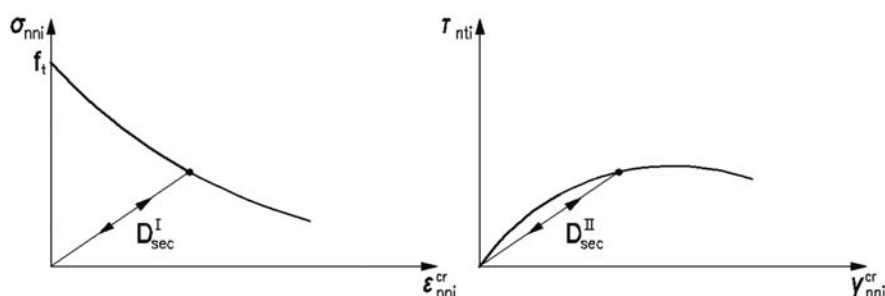
i daje zbiorczą macierz \mathbf{D}^{cr} w postaci diagonalnej:

$$\mathbf{D}^{\text{cr}} = \text{diag}[\mathbf{D}_1^{\text{cr}}, \mathbf{D}_2^{\text{cr}}, \dots, \mathbf{D}_N^{\text{cr}}] \quad (19)$$

Dodatkowym uproszczeniem przyjętym w pracach [11, 16] jest założenie o braku interakcji pomiędzy zachowaniem rysy w kierunku normalnym a kierunkiem stycznym. Prowadzi to do macierzy siecznej dla danej rysy w formie:

$$\mathbf{D}_i^{\text{cr}} = \begin{bmatrix} D_{\text{sec}}^{\text{I}}(\epsilon_{\text{nni}}^{\text{cr}}) & 0 \\ 0 & D_{\text{sec}}^{\text{II}}(\gamma_{\text{nti}}^{\text{cr}}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

Należy podkreślić, że sztywności $D_{\text{sec}}^{\text{I}}$ i $D_{\text{sec}}^{\text{II}}$ są to, odpowiednio, sztywność normalna i ścinająca rysy rozmytej o charakterze siecznym (o wartościach nieujemnych), co umożliwia opis odciążenia od początku układu współrzędnych w sposób analogiczny do przyjętego w kontynualnej mechanice uszkodzeń (rys. 5).



Rys. 5. Związki fizyczne dla rysy rozmytej
Fig. 5. Physical relationships for smeared crack

Sformułowanie w formie (20) jest daleko idącym uproszczeniem i nie uwzględnia zarówno efektu dylatacji, jak i wpływu odkształceń normalnych na degradację sztywności ścinającej [8, 17]. Ten ostatni efekt można uwzględnić, uogólniając sformułowanie (20) do postaci:

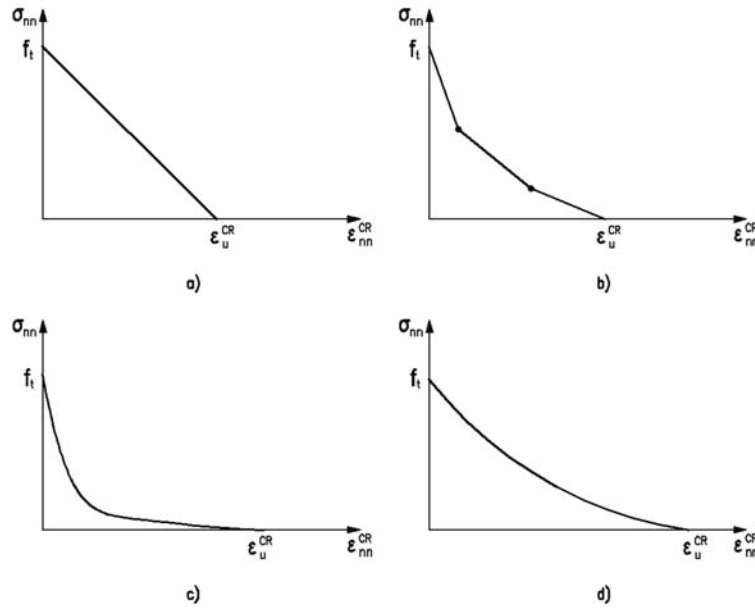
$$\mathbf{D}_i^{\text{cr}} = \begin{bmatrix} D_{\text{sec}}^{\text{I}}(\epsilon_{\text{nni}}^{\text{cr}}) & 0 \\ 0 & D_{\text{sec}}^{\text{II}}(\gamma_{\text{nti}}^{\text{cr}}, \epsilon_{\text{nni}}^{\text{cr}}) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

W programie DIANA oprogramowano kilka zależności $\sigma_{mn} = f(\epsilon_{mn}^{\text{cr}})$ – liniowa (rys. 6a), wieloliniowa (rys. 6b), wg Moelandsa i Reinhardta (rys. 6c) oraz wg Hordijk

i współpracowników (krzywa ta jest uogólnieniem krzywej wykładniczej, rys. 6d). Prowadzą one do odpowiednich wzorów na D_{sec}^I . Szczegóły można znaleźć w [7]. Sztywność na ścinanie D_{sec}^{II} jest zdefiniowana w programie DIANA wyłącznie jako wartość stała, niezależna od γ_{nti}^{cr} i ϵ_{nni}^{cr} ($D_{sec}^{II} = \text{const}$, w szczególnym przypadku $D_{sec}^{II} \rightarrow +\infty$).

Przedstawione związki fizyczne (15), (19) i (20) wraz z formułami transformacyjnymi (13) oraz postulatem addytywności odkształceń (1) stanowią komplet równań konstytutywnych na poziomie punktu materialnego. Poniżej zostanie przedstawione w krótki sposób wyprowadzenie formuły na sieczną macierz sztywności. Zgodnie ze związkami (1) i (15) naprężenia wyrażają się jako:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{CR}) \quad (22)$$



Rys 6. Krzywe osłabienia w programie DIANA
Fig. 6. Softening curves in DIANA code

Wektor naprężenia we wszystkich rysach przyjmuje formę:

$$\mathbf{s} = \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}^T \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{CR}) \quad (23)$$

Przyrównując równanie (23) do zależności (17), otrzymuje się związek:

$$\mathbf{D}^{CR} \mathbf{e}^{CR} = \mathbf{N}^T \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^{CR}) \quad (24)$$

Dodatkowo wykorzystując wzór transformacyjny (13a) dochodzi się do wzoru:

$$\mathbf{D}^{CR} \mathbf{e}^{CR} = \mathbf{N}^T \mathbf{D}^e (\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{N} \mathbf{e}^{CR}) \quad (25)$$

Po uporządkowaniu, ze wzoru (25) otrzymuje się zbiorczy wektor odkształceń we wszystkich rysach \mathbf{e}^{cr} w funkcji całkowitego odkształcenia $\mathbf{\epsilon}$:

$$\mathbf{e}^{cr} = (\mathbf{D}^{cr} + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^e \mathbf{N})^{-1} \cdot \mathbf{N}^T \mathbf{D}^e \mathbf{\epsilon} \quad (26)$$

Wstawiając zależność (26) do wzoru na naprężenia (22) otrzymuje się:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e (\mathbf{\epsilon} - \mathbf{e}^{cr}) = \mathbf{D}^e (\mathbf{\epsilon} - \mathbf{N} \mathbf{e}^{cr}) = \mathbf{D}^e \left[\mathbf{\epsilon} - \mathbf{N} (\mathbf{D}^{cr} + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^e \mathbf{N})^{-1} \cdot \mathbf{N}^T \mathbf{D}^e \mathbf{\epsilon} \right] \quad (27)$$

Po uporządkowaniu wzoru (27) sieczny związek fizyczny przybiera formę:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{sec} \mathbf{\epsilon}, \quad (28)$$

gdzie:

\mathbf{D}_{sec} – symetryczna sieczna macierz sztywności:

$$\mathbf{D}_{sec} = \mathbf{D}^e - \mathbf{D}^e \mathbf{N} (\mathbf{D}^{cr} + \mathbf{N}^T \mathbf{D}^e \mathbf{N})^{-1} \cdot \mathbf{N}^T \mathbf{D}^e \quad (29)$$

Powyższą formę macierzy sztywności (29) podano, m.in. w [11].

Wychodząc od relacji podatności, można związek fizyczny wyprowadzić w prostszy sposób, bez konieczności definiowania zbiorczych wektorów i macierzy \mathbf{e}^{cr} , \mathbf{s} , \mathbf{N} , \mathbf{D}^{cr} . Przyrównując do siebie wyrażenia (10) i (18), otrzymuje się:

$$\mathbf{N}_i^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_i^{cr} \mathbf{e}_i^{cr}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

lub:

$$\mathbf{e}_i^{cr} = (\mathbf{D}_i^{cr})^{-1} \mathbf{N}_i^T \boldsymbol{\sigma}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (31)$$

Zgodnie ze wzorem (9) odkształcenia od zarysowania w układzie globalnym wynoszą:

$$\mathbf{e}^{cr} = \sum_i \mathbf{N}_i \mathbf{e}_i^{cr} = \sum_i \mathbf{N}_i (\mathbf{D}_i^{cr})^{-1} \mathbf{N}_i^T \boldsymbol{\sigma} \quad (32)$$

Dla części sprężystej odkształceń obowiązuje odwrotność związku (15):

$$\mathbf{e}^e = (\mathbf{D}^e)^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (33)$$

Sumując zależności (32) i (33) otrzymuje się całkowite odkształcenia w funkcji naprężeń:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^{cr} = \left[(\mathbf{D}^e)^{-1} + \sum_i \mathbf{N}_i (\mathbf{D}_i^{cr})^{-1} \mathbf{N}_i^T \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (34)$$

Odwrócenie związku (34) prowadzi do szukanej we wzorze (28) relacji naprężenie – odkształcenie, przy czym \mathbf{D}_{sec} przyjmuje postać:

$$\mathbf{D}_{sec} = \left[(\mathbf{D}^e)^{-1} + \sum_i \mathbf{N}_i (\mathbf{D}_i^{cr})^{-1} \mathbf{N}_i^T \right]^{-1} \quad (35)$$

Sformułowania (29) i (35) są oczywiście tożsame, chociaż pokazanie tego wprost nie jest trywialne. W związkach (34) i (35) konieczne jest odwrócenie macierzy \mathbf{D}_i^{cr} ($i = 1, 2, \dots, N$), co jest wykonalne z uwagi na sieczny charakter tych macierzy.

Wychodząc z siecznego związku fizycznego dla danej rysy (18), możliwe jest otrzymanie związku stycznego:

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \mathbf{D}_{\text{tang},i}^{\text{cr}} \dot{\mathbf{e}}_i^{\text{cr}}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (36)$$

gdzie:

$$\mathbf{D}_{\text{tang},i}^{\text{cr}} = \begin{bmatrix} \frac{dD_{\text{sec}}^{\text{I}}}{d\epsilon_{\text{nni}}} \cdot \epsilon_{\text{nni}} + D_{\text{sec}}^{\text{I}} & 0 \\ 0 & \frac{dD_{\text{sec}}^{\text{II}}}{d\gamma_{\text{nti}}} \cdot \gamma_{\text{nti}} + D_{\text{sec}}^{\text{II}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Wzór (37) jest poprawny tylko dla macierzy siecznej \mathbf{D}_i^{cr} danej wzorem (20). W bardziej ogólnym przypadku (21) macierz styczną przybiera postać niesymetryczną [1, 18]:

$$\mathbf{D}_{\text{tang},i}^{\text{cr}} = \begin{bmatrix} \frac{dD_{\text{sec}}^{\text{I}}}{d\epsilon_{\text{nni}}} \cdot \epsilon_{\text{nni}} + D_{\text{sec}}^{\text{I}} & 0 \\ \frac{dD_{\text{sec}}^{\text{II}}}{d\epsilon_{\text{nni}}} \cdot \gamma_{\text{nti}} & \frac{dD_{\text{sec}}^{\text{II}}}{d\gamma_{\text{nti}}} \cdot \gamma_{\text{nti}} + D_{\text{sec}}^{\text{II}} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Wprowadzając zbiorczą macierz styczną $\mathbf{D}_{\text{tang}}^{\text{cr}}$ w postaci diagonalnej (analogicznie do wzoru (19)):

$$\mathbf{D}_{\text{tang}}^{\text{cr}} = \text{diag}[\mathbf{D}_{\text{tang},1}^{\text{cr}}, \mathbf{D}_{\text{tang},2}^{\text{cr}}, \dots, \mathbf{D}_{\text{tang},N}^{\text{cr}}] \quad (39)$$

i pamiętając, że związek styczną dla części sprężystej odkształceń ma standardową formę:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{\text{e}} \dot{\mathbf{e}}^{\text{e}}, \quad (40)$$

gdzie \mathbf{D}^{e} jest dane wzorem (16) za pomocą przekształceń analogicznych do wzorów (22)–(26) można otrzymać styczną związek fizyczny w postaci:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{\text{tang}} \dot{\mathbf{e}} \quad (41)$$

gdzie:

$$\mathbf{D}_{\text{tang}} = \mathbf{D}^{\text{e}} - \mathbf{D}^{\text{e}} \mathbf{N} (\mathbf{D}_{\text{tang}}^{\text{cr}} + \mathbf{N}^{\text{T}} \mathbf{D}^{\text{e}} \mathbf{N})^{-1} \cdot \mathbf{N}^{\text{T}} \mathbf{D}^{\text{e}} \quad (42)$$

Praktyczna przydatność macierzy styczną jest oczywiście wątpliwa, ponieważ zwykle nie jest ona dodatnio określona.

Najprostszym przypadkiem jest obecność wyłącznie jednej rysy rozmytej prostopadłej do kierunku osi x w układzie globalnym. Wówczas wektory normalne i styczną \mathbf{n} i \mathbf{t} do płaszczyzny rysy mają postać:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Zbiorcza macierz transformacji \mathbf{N} jest w tym przypadku tożsama z macierzą \mathbf{N}_I i ma formę:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Macierz podatności według wzoru (34) otrzymuje wówczas bardzo prostą postać:

$$(\mathbf{D}^e)^{-1} + \sum_i \mathbf{N}_i (\mathbf{D}_i^{cr})^{-1} \mathbf{N}_i^T = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{D_{sec}^I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D_{sec}^{II}} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Jak widać ze wzoru (45), łączna macierz podatności jest sumą macierzy podatności sprężystej i podatności rysy rozmytej. Jest więc to model szeregowy łączący odpowiedź sprężystą materiału nieuszkodzonego i zachowanie rysy rozmytej. Szeregowy charakter modelu wynika wprost z koncepcji rozbicia całkowitych odkształceń na sumę części sprężystej i części pochodzącej od zarysowania według wzoru (1). Identyczne sformułowanie, tożsame ze wzorem (45), zaproponowali Bažant i Oh [9].

Dla jednowymiarowego modelu szeregowego o dwóch elementach prawdziwy jest wzór:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{E} + \frac{1}{D_{sec}} \quad (46)$$

Całkowita sztywność D wynosi wówczas:

$$D = \frac{ED_{sec}}{D_{sec} + E} = \mu \cdot E, \quad \mu = \frac{D_{sec}}{D_{sec} + E} \quad (47)$$

Analogicznie do przypadku jednowymiarowego celowe jest wprowadzenie dwóch zmiennych bezwymiarowych: μ dla rozciągania i β dla ścinania:

$$\mu = \frac{D_{sec}^I}{D_{sec}^I + E} \quad (48)$$

$$\beta = \frac{D_{sec}^{II}}{D_{sec}^{II} + G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (49)$$

Związki odwrotne, wyrażające D_{sec}^I i D_{sec}^{II} jako funkcje μ i β mają formę:

$$D_{sec}^I = \left(\frac{\mu}{1-\mu} \right) E, \quad D_{sec}^{II} = \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right) G \quad (50)$$

Przy wykorzystaniu μ i β macierz podatności (45) może być zapisana jako:

$$(\mathbf{D}^e)^{-1} + \sum_i \mathbf{N}_i (\mathbf{D}_i^{cr})^{-1} \mathbf{N}_i^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1-\mu}{\mu E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\beta}{\beta G} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Macierz sztywności \mathbf{D}_{sec} dla przypadku jednej rysy prostopadłej do kierunku osi x może być otrzymana albo bezpośrednio ze wzoru (29) przy użyciu macierzy \mathbf{N} w formie (44) i wykorzystaniu zależności (50) lub przez odwrócenie macierzy danej wzorem (51) (co odpowiada wzorowi (35)). Oba podejścia prowadzą do wzoru:

$$\mathbf{D}_{sec} = \begin{bmatrix} \frac{\mu E}{1-\mu\nu^2} & \frac{\nu\mu E}{1-\mu\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu\mu E}{1-\mu\nu^2} & \frac{E}{1-\mu\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \quad (52)$$

Identyczna postać jest podana w pracy Bażanta i Oha [9]. Z postaci macierzy sztywności (52) wyraźnie widać, że współczynnik μ opisuje degradację sztywności normalnej, podczas gdy β opisuje degradację sztywności na ścinanie. W przypadku materiału w pełni zdegradowanego dla $D_{sec}^I = 0$ jest $\mu = 0$ i analogicznie dla $D_{sec}^{II} = 0$ jest $\beta = 0$. Materiał w pełni sprężysty (nieuszkodzony) może być odzyskany dla $\mu = 1$ i $\beta = 1$, co odpowiada $D_{sec}^I \rightarrow +\infty$ i $D_{sec}^{II} \rightarrow +\infty$. Ciekawa jest obserwacja, że w trakcie rozwoju uszkodzeń normalnych, kiedy to $D_{sec}^I : +\infty \rightarrow 0$ i w konsekwencji $\mu : 1 \rightarrow 0$ człony macierzy sztywności poza diagonalą dążą do zera i sprzężenie kierunków normalnego i prostopadłego (w stanie sprężystym wywołane współczynnikiem Poissona) znika.

W programie DIANA dane wejściowe są przyjmowane w sposób nie do końca spójny – wybiera się zależność $\sigma_{nn} = f(\epsilon_{nn}^{cr})$ co automatycznie definiuje D_{sec}^I i μ według wzoru (48), z kolei nie ma możliwości zdefiniowania krzywej $\tau_{nt} = f(\gamma_{nt}^{cr})$, nie definiuje się również jawnie stałej wartości D_{sec}^{II} . Program wymaga wprowadzenia bezpośrednio stałej wartości $0 \leq \beta < 1$, należy domniemywać, że wartość D_{sec}^{II} jest w programie wyliczana wg wzoru (50b).

2.2. Model rys rozmytych z rysami obracającymi się

Model rys rozmytych z rysami obracającymi się jest koncepcyjnie znacznie prostszy od modelu przedstawionego powyżej. Zakłada się w nim współosiowość kierunków głównych naprężenia i odkształcenia, a osłabienie materiału następuje wyłącznie współosiowo z tymi kierunkami. W sensie fizycznym oznacza to, że osłabienie materiału „obraca się”, dostosowując się do zmiany kierunków głównych w procesie obciążenia – jest to inny sposób uwzględnienia tworzenia się nowych rys i zamykania się starych przy zmianie kierunków głównych. Dodatkowo, w sformułowaniu użytym w programie DIANA, nie wprowadza się rozbieżności odkształceń na część sprężystą i związaną z zarysowaniem, tylko formułuje się wprost zależność całkowite naprężenie – całkowite odkształcenie zarówno w zakresie wzmocnienia, jak i osłabienia materiału. Tak więc zależność naprężenie – odkształcenie w układzie kierunków głównych może być zapisana:

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{pr}} = \mathbf{D}_{\text{sec}}^{\text{pr}} \boldsymbol{\epsilon}^{\text{pr}}, \quad (53)$$

gdzie:

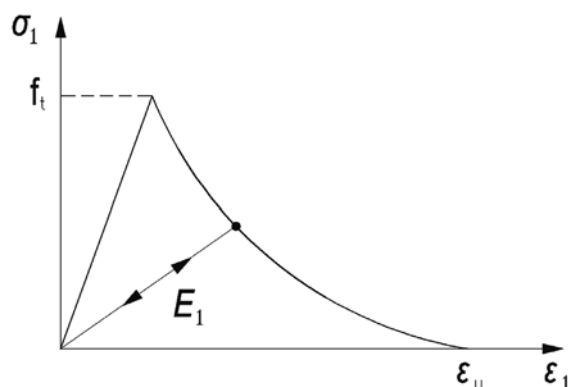
$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{pr}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \quad \text{– naprężenia główne,}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\text{pr}} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} \quad \text{– odkształcenia główne.}$$

Macierz sieczna jest dana wzorem:

$$\mathbf{D}_{\text{sec}}^{\text{pr}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Moduły sieczne E_1 i E_2 opisują zarówno zachowanie się liniowe do zarysowania, jak i osłabienie materiału.



Rys. 7. Krzywa naprężenie – odkształcenie dla modelu rys rozmytych z rysami obracającymi się

Fig. 7. Stress – strain curve for rotating crack model

Wybór odpowiednich krzywych $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ i $\sigma_2 = f(\varepsilon_2)$ oferowany w programie DIANA odpowiada zależnościom $\sigma_{nn} = f(\varepsilon_{nn}^{CR})$ prezentowanym w poprzednim punkcie [7]. Ponieważ pierwszy czynnik macierzy \mathbf{D}_{sec} nie daje sprzężeń pomiędzy kierunkami 1 i 2, został wprowadzono drugi czynnik zawierający współczynnik Poissona. Dzięki niemu dla $E_1 = E_2 = E$ macierz \mathbf{D}_{sec} wg (54) zamienia się w standardową macierz sztywności dla materiału liniowo-sprężystego. Należy jednak zauważyć, że w odróżnieniu od poprzedniego modelu sprzężenie to nie zanika wraz ze wzrostem uszkodzenia – powoduje to, że nawet w przypadku jednoosiowego rozciągania o stałym kierunku oba modele dają istotnie różne odpowiedzi. W celu praktycznego zastosowania należy macierz \mathbf{D}_{sec}^{pr} przetransformować do układu globalnego, korzystając ze wzoru (28) oraz zależności:

$$\mathbf{D}_{sec} = \mathbf{T}^T \mathbf{D}_{sec}^{pr} \mathbf{T} \quad (55)$$

Macierz transformacji \mathbf{T} przekształcająca odkształcenia w układzie globalnym $\boldsymbol{\varepsilon}$ do układu kierunków głównych $\boldsymbol{\varepsilon}^{pr}$ ma postać:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & n_x n_y \\ t_x^2 & t_y^2 & t_x t_y \end{bmatrix} \quad (56)$$

gdzie wektory \mathbf{n} i \mathbf{t} (patrz wzór (3) i rys. 4) tym razem wyznaczają kierunki główne 1 i 2. Ponieważ w układzie kierunków głównych nie ma odkształceń i naprężeń ścinających, macierz transformacji \mathbf{T} ma wymiary 2×3 , a lokalna macierz sztywności \mathbf{D}_{sec}^{pr} wynosi 2×2 i nie posiada członu reprezentującego sztywność na ścinanie.

Wyprowadzenie wzoru na macierz styczną jest rzeczą nietrywialną. Należy uwzględnić fakt, że przyrosty odkształceń i naprężeń w istniejącym układzie kierunków głównych mogą mieć składowe styczne (co wiąże się ze zmianą kierunków głównych w procesie obciążenia):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{pr} = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_{12} \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pr} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (57)$$

W związku ze zmianą kierunków głównych również pochodna macierzy transformacji po czasie jest różna od zera:

$$\dot{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{T}}{d\varepsilon_{xx}} \dot{\varepsilon}_{xx} + \frac{d\mathbf{T}}{d\varepsilon_{yy}} \dot{\varepsilon}_{yy} + \frac{d\mathbf{T}}{d\varepsilon_{xy}} \dot{\varepsilon}_{xy} \neq \mathbf{0} \quad (58)$$

Poprawny tok wyprowadzenia stycznej macierzy sztywności uwzględniający powyższe czynniki był szeroko dyskutowany i został przedstawiony między innymi w pracach [1, 4, 18]. Poniżej podany zostanie tylko końcowy rezultat:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{tang} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (59)$$

$$\mathbf{D}_{\text{tang}} = \mathbf{T}_1^T \mathbf{D}_{\text{tang}}^{\text{pr}} \mathbf{T}_1 \quad (60)$$

$$\mathbf{D}_{\text{tang}}^{\text{pr}} = \begin{bmatrix} \frac{dE_1}{d\varepsilon_1} \cdot \varepsilon_1 + E_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dE_2}{d\varepsilon_2} \cdot \varepsilon_2 + E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{1-v^2} & \frac{v}{1-v^2} & 0 \\ \frac{v}{1-v^2} & \frac{1}{1-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Z uwagi na postać przyrostów odkształceń i naprężeń głównych (57) macierz \mathbf{T}_1 musi mieć wymiary 3×3 i ma postać:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & n_x n_y \\ t_x^2 & t_y^2 & t_x t_y \\ n_x t_x & n_y t_y & n_x t_y + n_y t_x \end{bmatrix} \quad (62)$$

Na szczególną uwagę zasługuje sztywność na ścinanie w macierzy $\mathbf{D}_{\text{tang}}^{\text{pr}}$ dana przez czynnik $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$. Można dowieść [1, 4, 18, 19], że tylko taka postać sztywności na

ściananie dla macierzy stycznej zapewnia współosiowość kierunków głównych naprężenia i odkształcenia dla każdej chwili czasu przy dowolnym programie obciążeń.

3. Dane materiałowe

Do symulacji numerycznych przyjęto element skończony o wymiarach 10×10 cm oraz grubości $h = 10$ cm.

Dane materiałowe ustalono jak dla betonu C25/30 według normy EN 1992-1-1 [20], tj.:

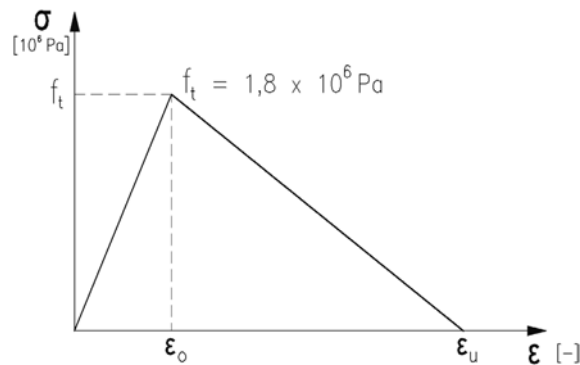
- $E = 31 \cdot 10^9$ Pa;
- $\nu = 0,2$;
- $f_t = 1,8 \cdot 10^6$ Pa.

Dla tak przyjętych wartości E i f_t przy założeniu liniowo sprężystych właściwości materiału otrzymuje się odkształcenie w chwili zarysowania równe: $\varepsilon_0 = f_t / E = 0,058 \cdot 10^{-3}$.

Do analiz numerycznych wybrano trzy modele rys rozmytych oferowane przez program DIANA:

- 1) model rys rozmytych o ustalonych kierunkach przy przyjęciu liniowego wykresu funkcji osłabienia materiału $\sigma_{nn} - \varepsilon_{nn}^{\text{cr}}$ (patrz rys. 6a),
- 2) model rys rozmytych z rysami obracającymi się również z liniowym osłabieniem materiału w zakresie pokrytycznym,

- 3) model rys rozmytych z rysami obracającymi się z nieliniowym osłabieniem materiału wg funkcji wykładniczej lub Hordijka i współprawników (krzywa ta jest uogólnieniem krzywej wykładniczej) [7].



Rys. 8. Zależność σ - ϵ .

Fig. 8. σ - ϵ relationship

W przypadku 1) jedynym dodatkowym parametrem materiałowym wymaganym przez program DIANA jest graniczne odkształcenie ϵ_u^{cr} odpowiadające spadkowi naprężeń do 0 na ścieżce podkrytycznej (rys. 6a). Wartość tę przyjęto jako $\epsilon_u^{cr} = 5\epsilon_0 = 0,290 \cdot 10^{-3}$. Przyjęte wartości odpowiadają wykresowi naprężenie – odkształcenie przy jednoosiowym rozciąganiu jak na rys. 8.

W przypadkach 2) i 3) nie jest możliwe zadeklarowanie przez użytkownika bezpośrednio wartości ϵ_u . Zamiast tego program wymaga bezpośrednio podania wartości energii pęknięcia G_f . Jak wiadomo [18, 21], przy jednoosiowym rozciąganiu energia pęknięcia może być obliczona jako:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma d\epsilon \cdot h_{cr} \quad (63)$$

przy założeniu stałego rozkładu naprężeń i odkształceń w paśmie uszkodzenia o szerokości h_{cr} . Przy analizowaniu elementów niezbrojonych MES dla modeli rys rozmytych szerokość h_{cr} jest zwykle utożsamiana z długością pojedynczego elementu. W ten sposób dla utrzymania stałej wartości G_f wartość ϵ_u zmienia się od elementu do elementu, w zależności od ich wymiarów [4]. Taki sposób postępowania zwykle przynosi dobre rezultaty w praktyce, jest jednak dużym uproszczeniem – dla danego przypadku rzeczywista szerokość pasma uszkodzenia i stąd dysypowana energia może być ustalona wyłącznie *a posteriori*.

W programie DIANA, idąc za pracą Rotsa [4], przyjęto ogólnie $h_{cr} = \sqrt{A}$, gdzie A – pole powierzchni elementu, zaś dla elementów 4-węzłowych $h_{cr} = \sqrt{2A}$. Dla przypadku liniowego osłabienia ogólny wzór (63) prowadzi do rezultatu:

$$G_f = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_u \cdot f_t \cdot h_{cr} \quad (64)$$

zaś dla funkcji Hordijka i współpracowników [7] daje rezultat:

$$G_f = \frac{1}{5,130} \cdot \varepsilon_u \cdot f_t \cdot h_{cr} \quad (65)$$

Algorytm stosowany przez program DIANA należy rozumieć w ten sposób, że dla podanej przez użytkownika wartości G_f i wyliczonej przez program dla danego elementu wartości $h_{cr} = \sqrt{A}$ lub $h_{cr} = \sqrt{2A}$ ze wzoru (64) lub (65) jest wyliczana żądana wartość ε_u , która w pełni definiuje kształt i nachylenie funkcji naprężenie – odkształcenie w zakresie pokrytycznym.

Dla modelu 1) w próbie jednoosiowego rozciągania rzeczywista szerokość strefy osłabienia była równa długości 10 cm. Tak więc energia pęknięcia G_f dysypowana w procesie obciążenia dla modelu 1) wynosiła: $G_f = \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 10^6 \cdot 0,290 \cdot 10^{-3} \cdot 0,10 = 26,1$ N/m. Umowna wartość energii pęknięcia obliczona wg zasad przyjętych w programie DIANA wyniosłaby: $G_f = \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 10^6 \cdot 0,290 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{2 \cdot 0,10^2} = 37,0$ N/m. Eksperyment numeryczny wykazał z kolei, że dla modelu 2) w celu osiągnięcia dokładnie wartości $\varepsilon_u = 0,290 \cdot 10^{-3}$ dla jednoosiowego rozciągania należy jako daną wyjściową zadać $G_f = 37,3$ N/m.

Ostatecznie w przykładach numerycznych prezentowanych w następnym punkcie przyjęto jako dane wejściowe:

- dla modelu 1) $\varepsilon_u^{cr} = 0,290 \cdot 10^{-3}$,
- dla modeli 2) i 3) $G_f = 37,3$ N/m.

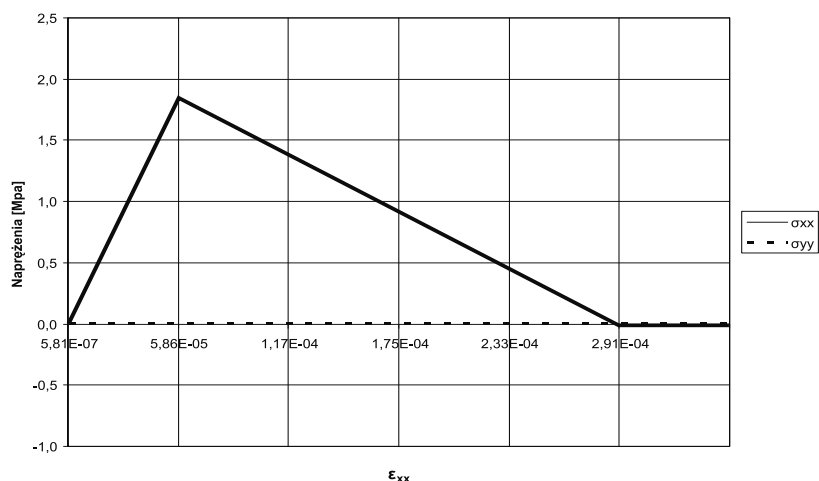
W artykule ograniczono się do testów numerycznych na poziomie punktu materialnego. W związku z tym nie jest omawiane zjawisko lokalizacji odkształceń występujące w rzeczywistych problemach brzegowych. Należy zwrócić uwagę, że przyjmowana w programie DIANA zależność dla wartości h_{cr} jako funkcji wielkości elementu skończonego ($h_{cr} = \sqrt{A}$) może dawać jednoznaczną zależność przemieszczenie – odkształcenie w zakresie pokrytycznym niezależnie od zagęszczenia siatki elementów skończonych, ale nie gwarantuje otrzymania prawidłowej szerokości strefy lokalizacji odkształceń. W celu otrzymania w pełni poprawnego opisu zachowania materiału w zakresie pokrytycznym konieczne jest stosowanie odpowiednich metod regularyzacji, np. typu gradientowego lub całkowego [22, 23].

4. Symulacje numeryczne

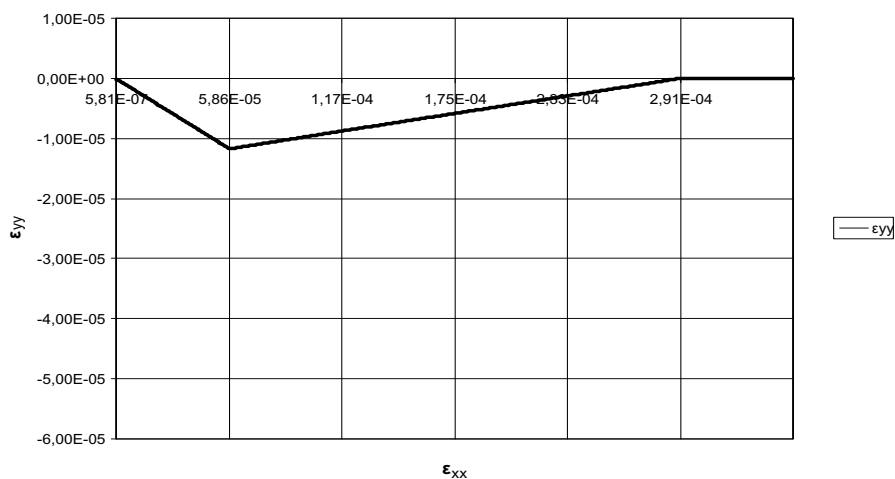
4.1. Próba rozciągania

Tak jak to przedstawiono w punkcie 1, próbę rozciągania przeprowadzono w 3 wariantach wymuszenia kinematycznego (patrz rys. 1). Rysunki 9–12 przedstawiają wyniki

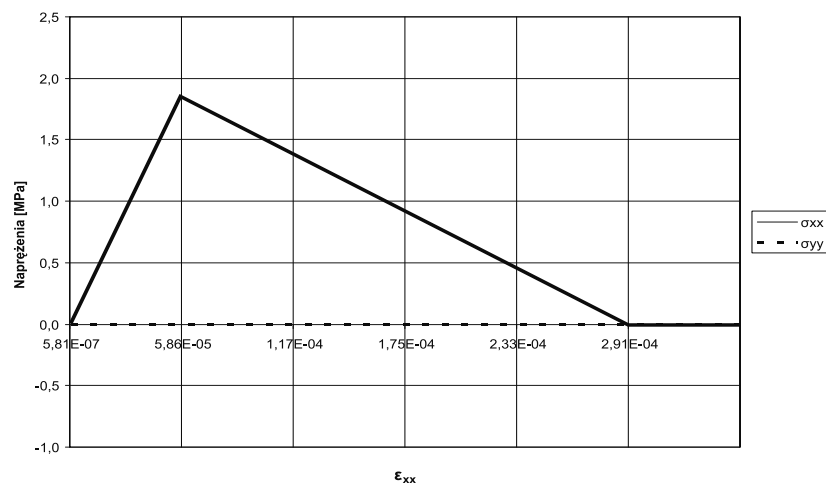
dla modelu rys rozmytych o ustalonych kierunkach, a rys. 13–16 wyniki dla modelu rys rozmytych z rysami obracającymi się. W obu przypadkach założono liniową funkcję osłabienia.



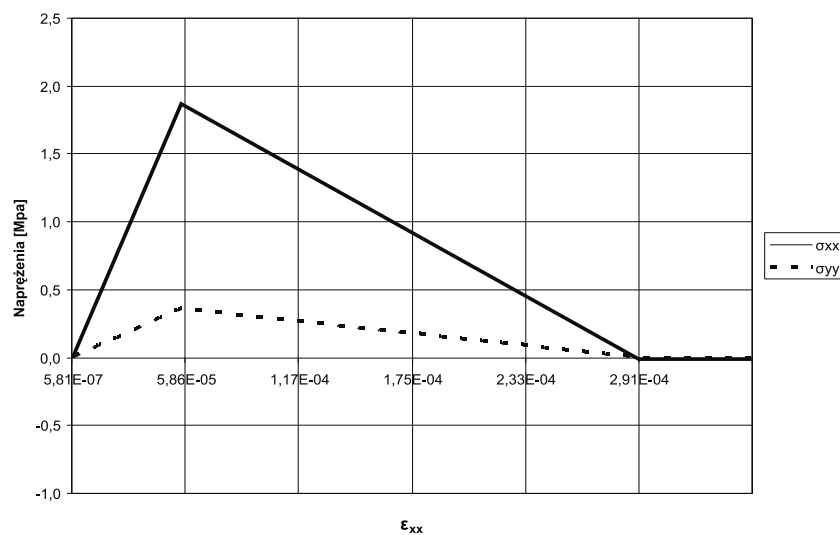
Rys. 9. Rozciąganie, wariant 1a, naprężenia – model rys rozmytych o ustalonych kierunkach
Fig. 9. Tension, case 1a, stresses – model with strain decomposition



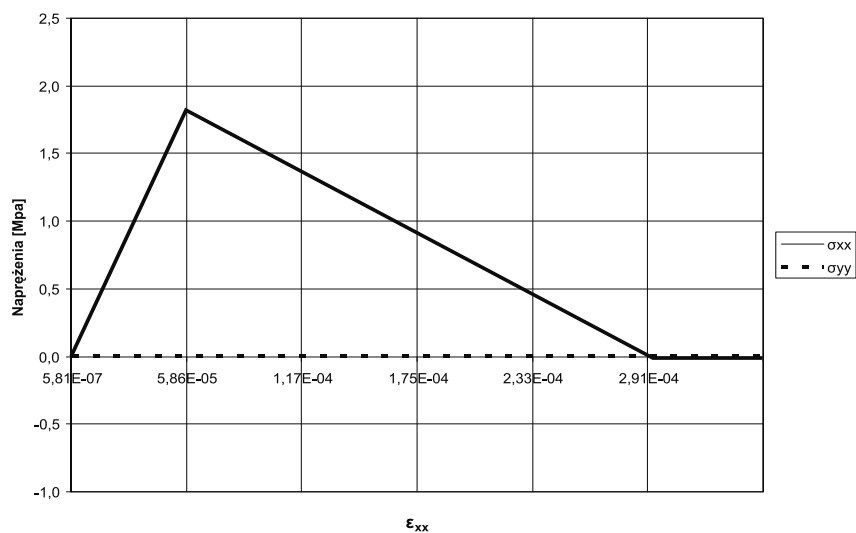
Rys. 10. Rozciąganie, wariant 1a, odkształcenia poprzeczne – model rys rozmytych o ustalonych kierunkach
Fig. 10. Tension, case 1a, lateral strains – model with strain decomposition



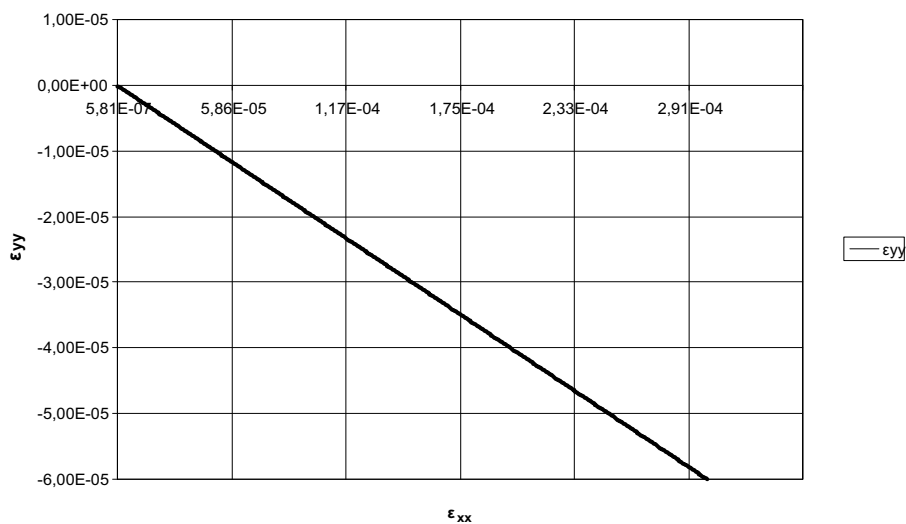
Rys. 11. Rozciąganie, wariant 1b – model rys rozmytych o ustalonych kierunkach
 Fig. 11. Tension, case 1b – model with strain decomposition



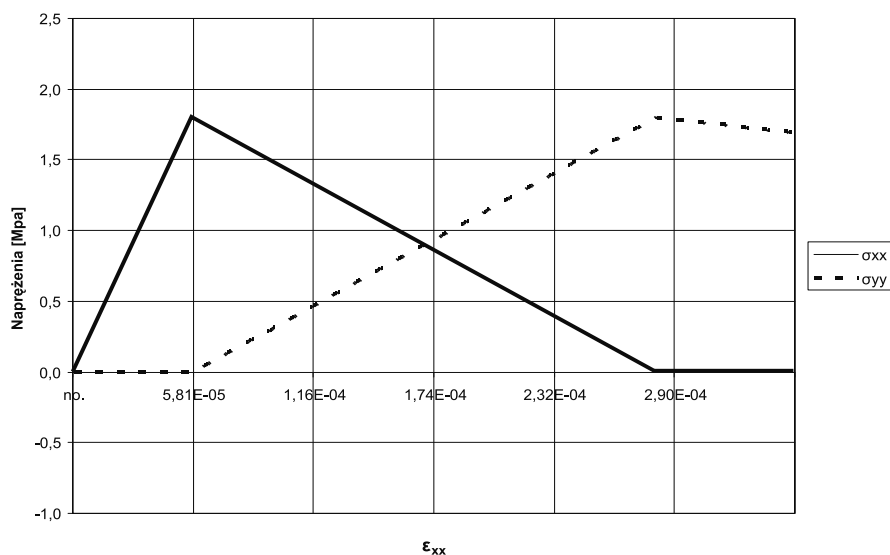
Rys. 12. Rozciąganie, wariant 1c – model rys rozmytych o ustalonych kierunkach
 Fig. 12. Tension, case 1c – model with strain decomposition



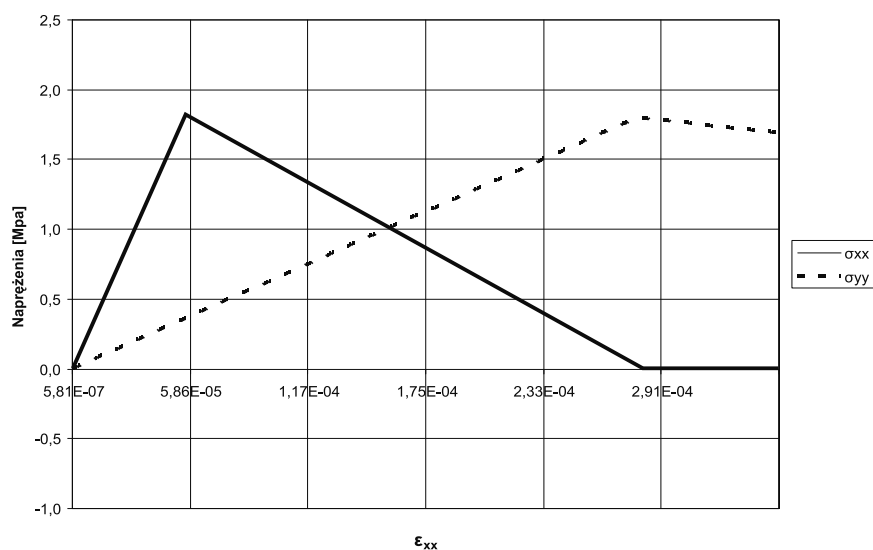
Rys. 13. Rozciąganie, wariant 1a – model rys rozmytych z rysami obracającymi się
Fig. 13. Tension, case 1a – rotating crack model



Rys. 14. Rozciąganie, wariant 1a, odkształcenia poprzeczne – model rys rozmytych z rysami obracającymi się
Fig. 14. Tension, case 1a, lateral strains – rotating crack model



Rys. 15. Rozciąganie, wariant 1b – model rys rozmytych z rysami obracającymi się
Fig. 15. Tension, case 1b – rotating crack model



Rys. 16. Rozciąganie, wariant 1c – model rys rozmytych z rysami obracającymi się
Fig. 16. Tension, case 1c – rotating crack model

Rysunek 9 pokazuje, że dla jednoosiowego (w przestrzeni naprężeń) rozciągania – wariant 1a, model materiału zachowuje się zgodnie z przyjętymi założeniami. Naprężenie σ_{xx} rośnie wprawdzie do wartości f_t , a po zarysowaniu spada stopniowo do zera, naprężenie σ_{yy} pozostaje cały czas równe zero. Rysunek 10 przedstawia odkształcenia poprzeczne ε_{yy} . Zgodnie ze wzorem (45) są one spowodowane współczynnikiem Poissona dla części sprężystej odkształceń, a część odkształceń spowodowana zarysowaniem nie posiada sprzężenia pomiędzy kierunkami x i y . W związku z tym po zarysowaniu, kiedy naprężenie σ_{xx} maleje i część sprężysta ulega odciążeniu, odkształcenie poprzeczne maleje jako wartość bezwzględna i dla naprężenia $\sigma_{xx} = 0$ osiąga się $\varepsilon_{yy} = 0$.

Takie zachowanie jest zgodne z intuicją i wydaje się być poprawne fizycznie. To stopniowe rozseparowanie odpowiedzi w kierunkach x i y w zakresie pokrytycznym (widoczne również w strukturze macierzy \mathbf{D}_{sec} – wzór (52)) prowadzi do tego, że w wariacie obciążenia 1b – przyjęcie odkształceń poprzecznych $u_y = -v u_x$ zapewnia pozostawanie $\sigma_{yy} = 0$ nie tylko w zakresie sprężystym, ale też na ścieżce pokrytycznej – rys. 11. Także pełne skrępowanie odkształceń poprzecznych – wariant 1c, prowadzi do powstania niewielkich naprężeń rozciągających $\sigma_{yy} = v \sigma_{xx}$, które maleją do zera w zakresie pokrytycznym (rys. 12).

Dla modelu rys rozmytych z rysami obracającymi się przebieg naprężeń σ_{xx} i σ_{yy} dla przypadku 1a jest identyczny jak dla modelu rys rozmytych o ustalonych kierunkach – rys. 13. Całkowicie różny jest natomiast przebieg odkształceń ε_{yy} – rosną one (jako wartość bezwzględna) również w zakresie pokrytycznym – rys. 14. Jest to spowodowane strukturą wzoru (54), dzięki któremu sprzężenie między kierunkami x i y nie zależy od stopnia uszkodzenia. W przypadku jednoosiowego rozciągania przebieg odkształceń poprzecznych może wydawać się nieistotny, jednak sprzężenie między kierunkami x i y nabiera znaczenia dla przypadków, kiedy odkształcenia poprzeczne są skrępowane. Jak pokazują rys. 15 i 16 dla przypadków 1b i 1c przebieg naprężeń dla modelu rys rozmytych z rysami obracającymi się jest istotnie różny od modelu rys rozmytych o ustalonych kierunkach (rys. 11 i 12). W obu przypadkach brak rozseparowania odpowiedzi w kierunkach x i y w zakresie pokrytycznym prowadzi do narastania naprężeń σ_{yy} aż do osiągnięcia wartości f_t i poprzecznego wtórnego zarysowania. Zjawisko to jest w pełni zgodne z przyjętym modelem, ale w opinii autorów nie opisuje poprawnie rzeczywistości. Autorzy nie znają wyników doświadczalnych dla wariantów wymuszenia kinematycznego 1b i 1c, ale w ich opinii powstawanie poprzecznego wtórnego zarysowania (patrz wykresy σ_{yy} – rys. 15 i 16) nie ma żadnego umotywowania fizycznego.

4.2. Numeryczny test Willama

Numeryczny test Willama przedstawiony w punkcie 1 (rys. 2) zrealizowano dla modelu rys rozmytych o ustalonych kierunkach dla 4 różnych wartości współczynnika $\beta = 0,95, 0,5, 0,20$ i $0,001$. W każdym przypadku analizowano wpływ kąta progowego θ pomiędzy ostatnim zaistniałym zarysowaniem a nową tworzącą się rysą, przyjmując wartości $\theta = 90^\circ, 45^\circ, 30^\circ$. Przyjęto liniową funkcję osłabienia. Dla modelu rys rozmytych z rysami obracającymi się wykonano obliczenia w trzech wariantach – dla liniowej, wykładniczej i przyjętej według Hordijka i współpracowników funkcji osłabienia. Na wszystkich rysunkach

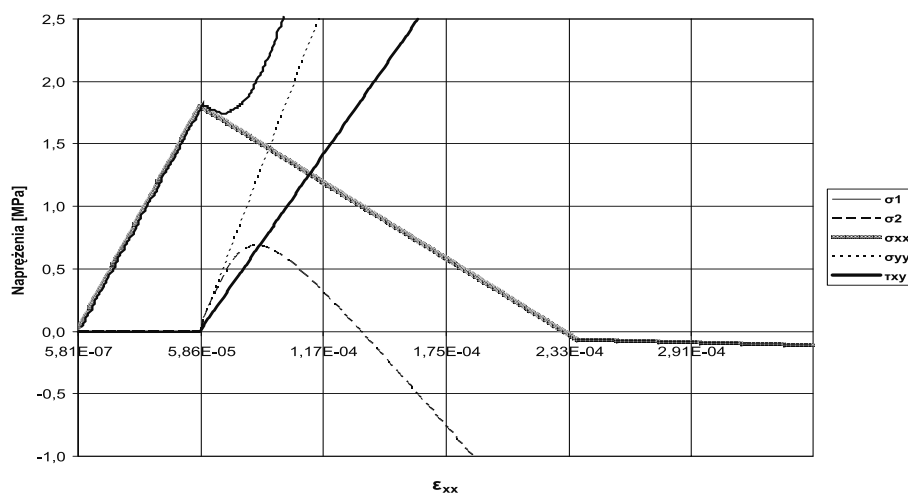
przedstawiono naprężenia w układzie globalnym σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} oraz naprężenia główne σ_1 , σ_2 w funkcji stale rosnących odkształceń ε_{xx} .

Rysunki 17–19 przedstawiają wyniki dla modelu rys rozmytych o ustalonych kierunkach dla parametru $\beta = 0,95$ i wartości θ równych odpowiednio 90° , 45° i 30° . Dla przypadku $\theta = 90^\circ$ (rys. 17) utworzenie drugiej (prostopadłej) rysy nie jest możliwe. To w połączeniu ze stałą sztywnością na ścinanie prowadzi do liniowej zależności $\tau_{xy} - \varepsilon_{xx}$ i stale rosnącego naprężenia stycznego τ_{xy} . W konsekwencji naprężenia główne σ_1 rosną także do nieskończoności, a naprężenie σ_2 przybiera wartości ujemne. Dla przypadku $\theta = 45^\circ$ (rys. 18) można zaobserwować utworzenie się kolejno trzech rys. Przed utworzeniem się drugiej rysy naprężenie σ_1 przekracza wartość f_t , co powoduje nagły skok naprężenia w chwili zarysowania. Przed utworzeniem się trzeciej rysy następuje zamknięcie się rysy wtórnej, co widać na wykresie naprężeń σ_{yy} . Dla przypadku $\theta = 30^\circ$ (rys. 19) tworzą się kolejno trzy rysy, nie obserwuje się zamykania istniejących rys. W tym przypadku naprężenie σ_1 nie przekracza wartości f_t i nie ma skoków naprężenia. Należy zauważyć, że w końcowej fazie procesu obciążenia, zarówno dla $\theta = 45^\circ$, jak i $\theta = 30^\circ$ sztywność na ścinanie nie dąży do zera, co z kolei powoduje, że naprężenia główne σ_1 i σ_2 także nie dążą do zera.

Rysunki 20–22 przedstawiają wyniki dla parametru $\beta = 0,5$ i wartości θ równych odpowiednio 90° , 45° i 30° . Rezultaty są zbieżne z przedstawionymi powyżej, oczywiście przy mniejszej sztywności na ścinanie. Dla $\theta = 90^\circ$ naprężenie główne σ_1 rośnie nieograniczenie. Przyjęcie $\theta = 45^\circ$ lub $\theta = 30^\circ$ powoduje, że naprężenie σ_1 nie przekracza f_t , tworzą się kolejno dwie lub trzy rysy, obserwuje się również zamykanie rysy (widoczne na wykresie σ_{yy}). W końcowej fazie obciążenia naprężenia główne σ_1 i σ_2 nie zmierzają do zera.

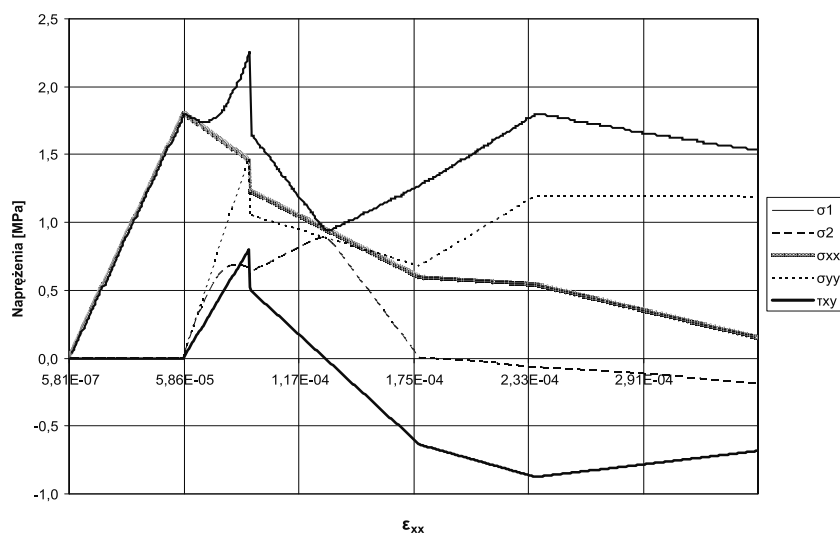
Rysunki 23–24 przedstawiają wyniki dla parametru $\beta = 0,2$ i wartości θ równych 90° , 45° i 30° (dla wartości 45° i 30° osiągnięto identyczne przebiegi naprężeń pokazane na rys. 24). Również w tym przypadku rezultaty są analogiczne z przedstawionymi na rys. 17–19. Dla $\theta = 90^\circ$ naprężenie główne σ_1 rośnie nieograniczenie, sztywność na ścinanie jest, oczywiście, mniejsza niż dla przypadku $\beta = 0,5$. Dla $\theta = 45^\circ$ obserwuje się utworzenie kolejno trzech rys, po utworzeniu się drugiej rysy następuje zamknięcie się pierwszej rysy (co jest widoczne na wykresie σ_{xx}). W końcowej fazie obciążenia naprężenia główne σ_1 i σ_2 dalekie są od zera.

Rysunki 25–26 przedstawiają wyniki dla parametru $\beta = 0,001$ i wartości θ równych 90° , 45° i 30° (dla wartości 45° i 30° osiągnięto identyczne przebiegi naprężeń pokazane na rys. 26). Wyniki uzyskane w tym przypadku są istotnie różne od poprzednich. Praktycznie zerowa sztywność na ścinanie sprawia, że naprężenie styczne τ_{xy} jest bardzo bliskie zero, a wykresy naprężeń σ_{xx} i σ_1 oraz σ_{yy} i σ_2 pokrywają się. Świadczy to o tym, że dla tego przypadku kierunki naprężeń głównych pokrywają się cały czas z układem odniesienia $x - y$ i obrotowi kierunków głównych odkształceń nie towarzyszy obrót naprężeń. Dla kąta $\theta = 90^\circ$ tworzy się wyłącznie jedna rysa i naprężenie $\sigma_{yy} \approx \sigma_2$ dąży w procesie obciążenia do nieskończoności. Dla dowolnego kąta $\theta < 90^\circ$ tworzy się druga rysa (o normalnej równoległej do osi y) prostopadła do pierwszej. W procesie obciążenia jest przez cały czas $\sigma_1 \leq f_t$, $\sigma_2 \leq f_t$ a na końcu procesu naprężenia główne spadają do zera. Jak widać, dla $\beta = 0,001$ i wartości $\theta < 90^\circ$, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach upraszcza się do modelu rys ortogonalnych o ustalonym kierunku z zerową sztywnością na ścinanie.



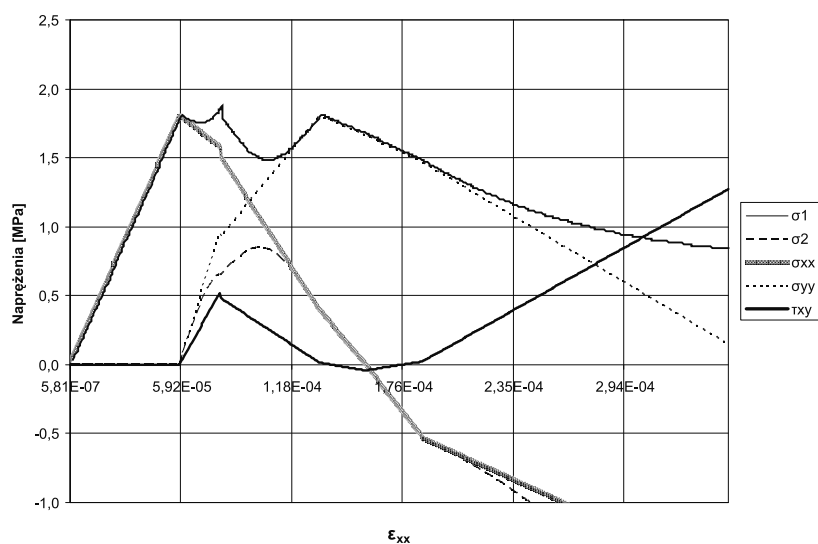
Rys. 17. Test Willama, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach,
 $\beta = 0,95, \theta = 90^\circ$

Fig. 17. Willam's test, model with strain decomposition $\beta = 0,95, \theta = 90^\circ$



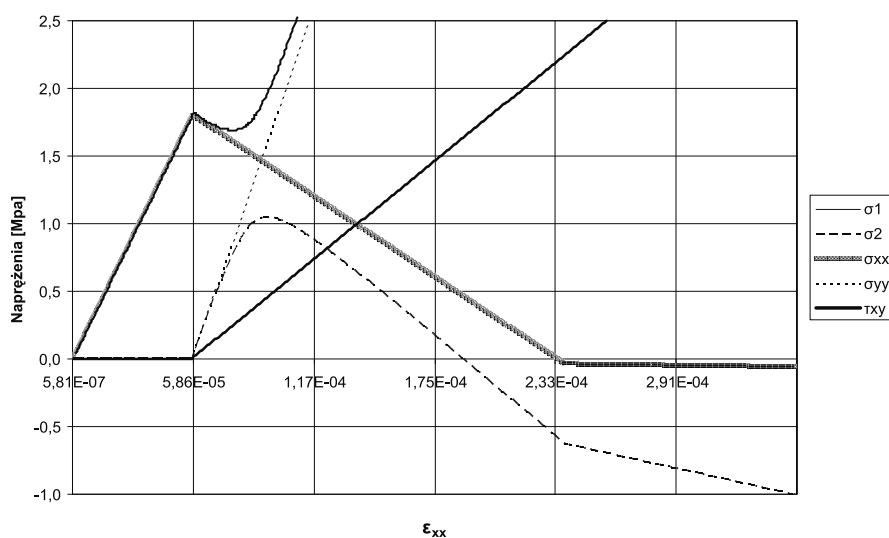
Rys. 18. Test Willama, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach,
 $\beta = 0,95, \theta = 45^\circ$

Fig. 18. Willam's test, model with strain decomposition $\beta = 0,95, \theta = 45^\circ$.



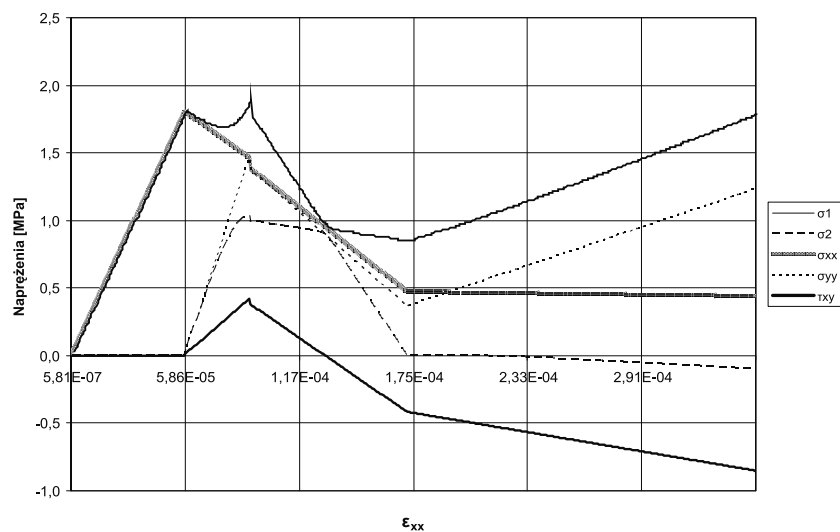
Rys. 19. Test Willama, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach,
 $\beta = 0.95$, $\theta = 30^\circ$

Fig. 19. Willam's test, model with strain decomposition $\beta = 0.95$, $\theta = 30^\circ$



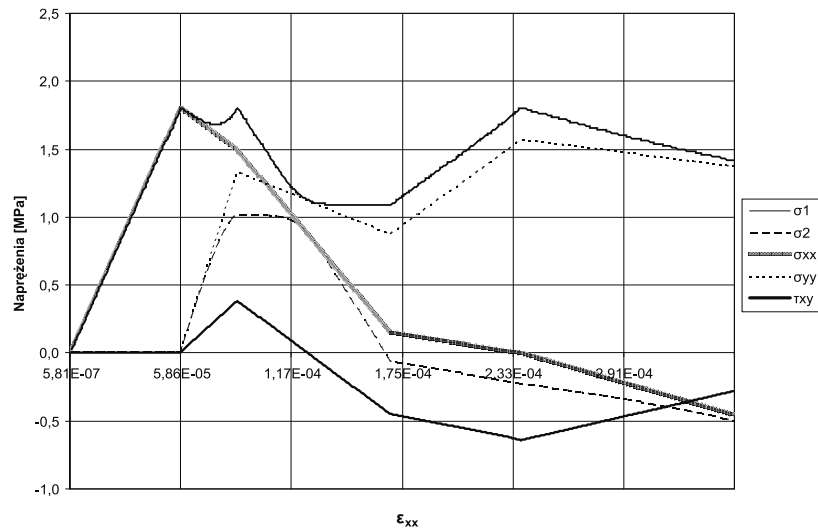
Rys. 20. Test Willama, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach,
 $\beta = 0.5$, $\theta = 90^\circ$

Fig. 20. Willam's test, model with strain decomposition $\beta = 0.5$, $\theta = 90^\circ$



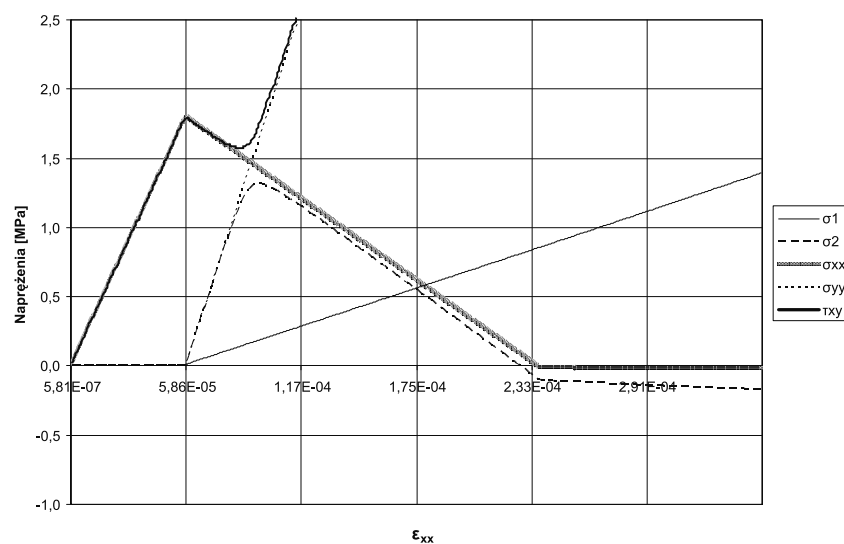
Rys. 21. Test Willama, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach,
 $\beta = 0,5$, $\theta = 45^\circ$

Fig. 21. Willam's test, model with strain decomposition $\beta = 0,5$, $\theta = 45^\circ$



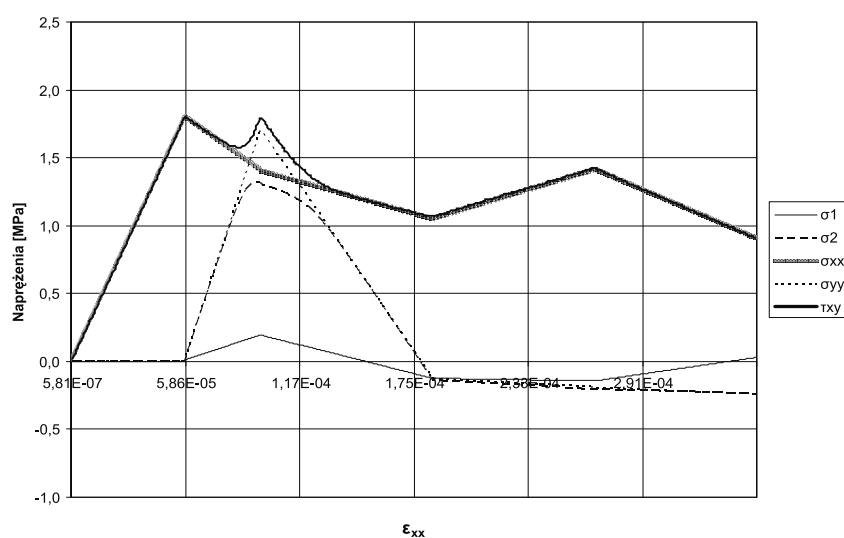
Rys. 22. Test Willama, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach,
 $\beta = 0,5$, $\theta = 30^\circ$

Fig. 22. Willam's test, model with strain decomposition $\beta = 0,5$, $\theta = 30^\circ$



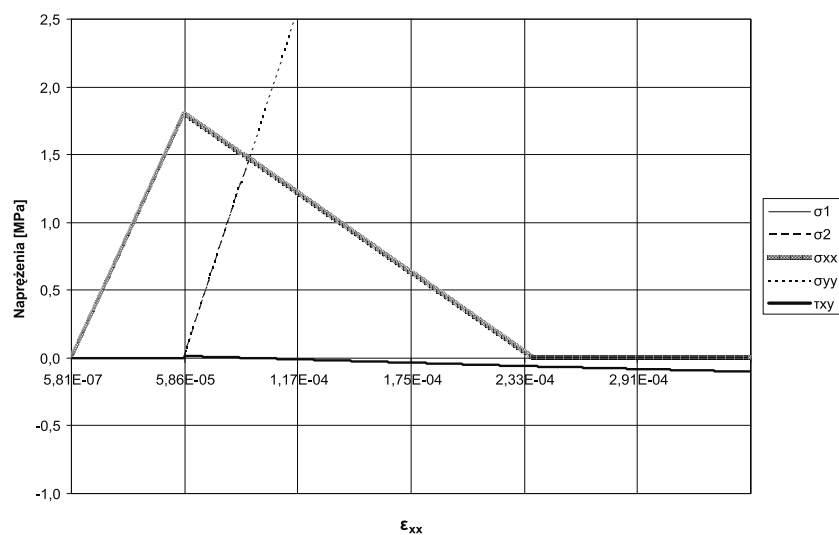
Rys. 23. Test Willama, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach,
 $\beta = 0,2$, $\theta = 90^\circ$

Fig. 23. Willam's test, model with strain decomposition $\beta = 0,2$, $\theta = 90^\circ$



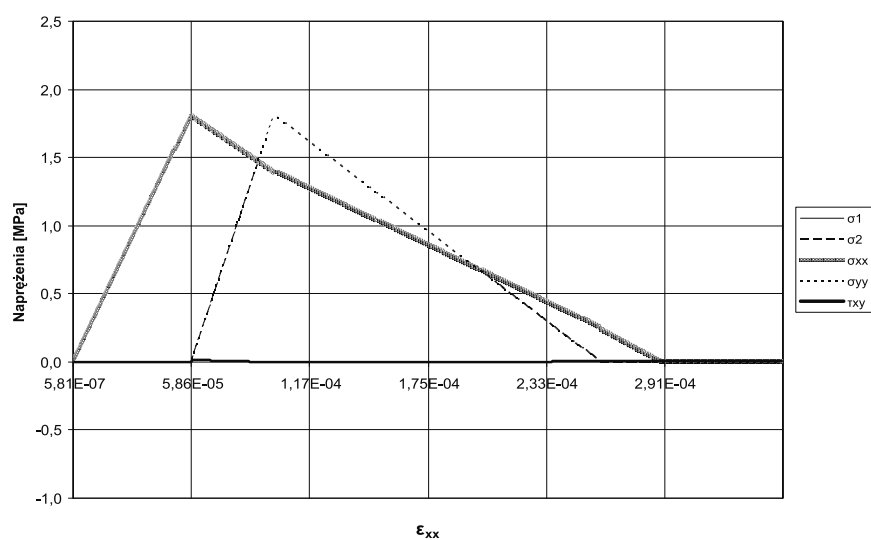
Rys. 24. Test Willama, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach,
 $\beta = 0,2$, $\theta = 45^\circ$ lub $\theta = 30^\circ$

Fig. 24. Willam's test, model with strain decomposition $\beta = 0,2$, $\theta = 45^\circ$ lub $\theta = 45^\circ$



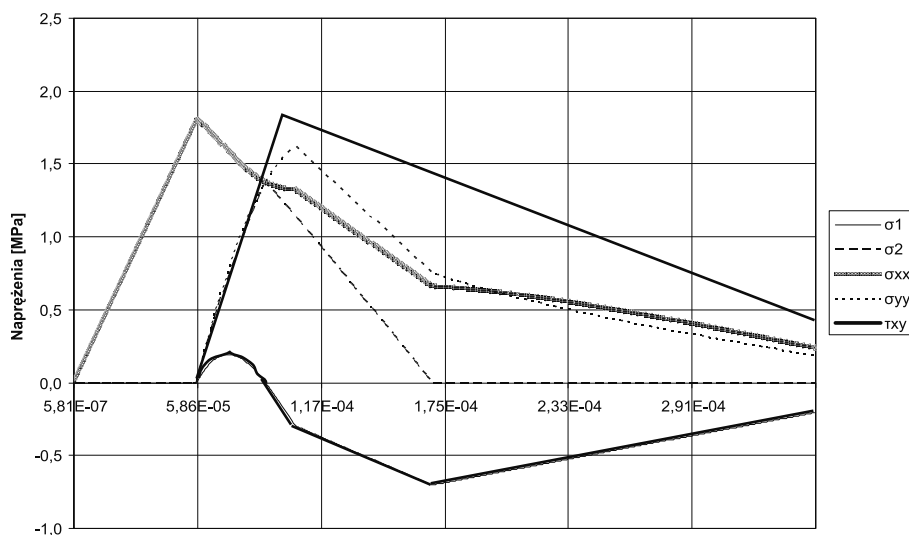
Rys. 25. Test Willama, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach,
 $\beta = 0,001$, $\theta = 90^\circ$

Fig. 25. Willam's test, model with strain decomposition $\beta = 0,001$, $\theta = 90^\circ$



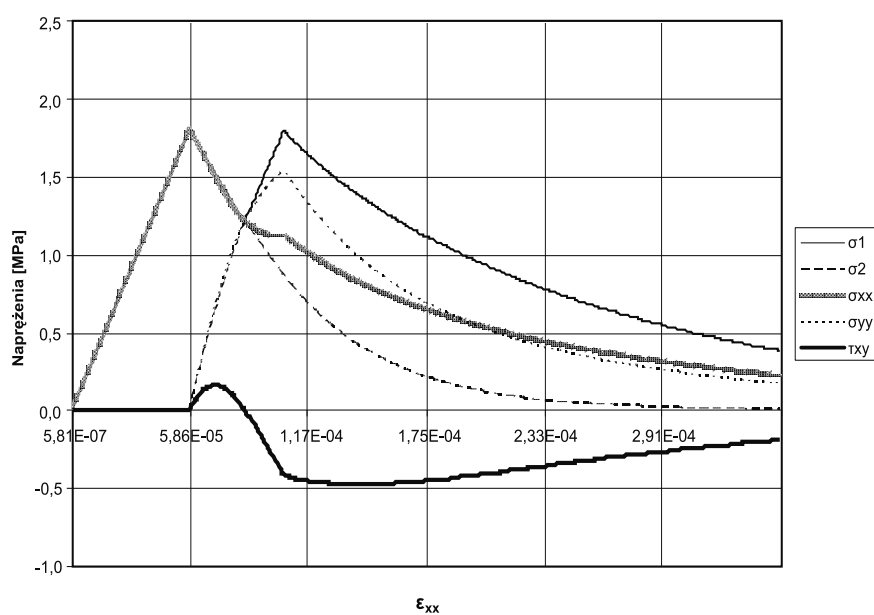
Rys. 26. Test Willama, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach,
 $\beta = 0,001$, $\theta = 45^\circ$ lub $\theta = 30^\circ$

Fig. 26. Willam's test, model with strain decomposition $\beta = 0,001$, $\theta = 45^\circ$ lub $\theta = 30^\circ$



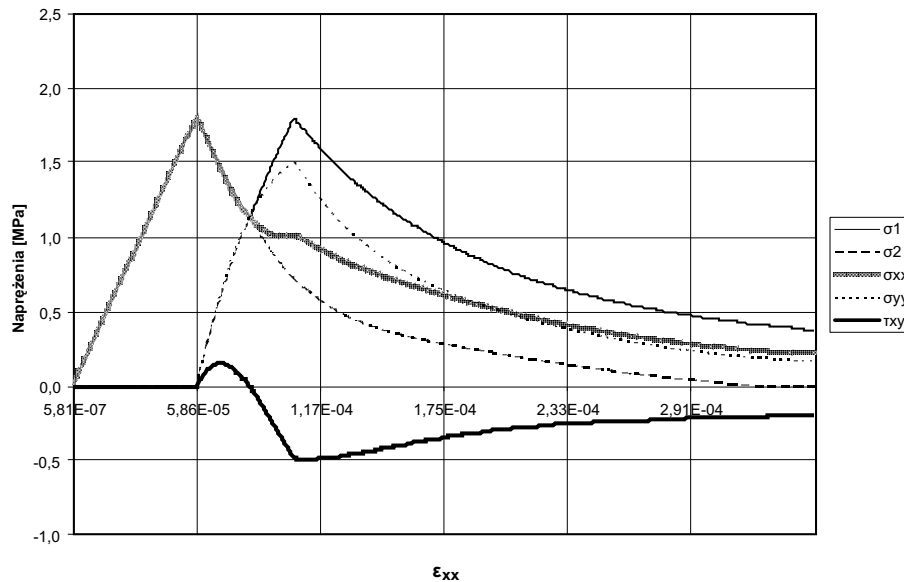
Rys. 27. Test Willama, model rys rozmytych z rysami obracającymi się,
liniowa funkcja osłabienia

Fig. 27. Willam's test, rotating crack model, linear softening function



Rys. 28. Test Willama, model rys rozmytych z rysami obracającymi się,
wykładnicza funkcja osłabienia

Fig. 28. Willam's test, rotating crack model, exponential softening function



Rys. 29. Test Willama, model rys rozmytych z rysami obracającymi się, funkcja osłabienia wg Hordijka i współpracowników

Fig. 29. Willam's test, rotating crack model, softening function according to Hordijk et al.

Rysunki 27–29 przedstawiają wyniki dla modelu rys rozmytych z rysami obracającymi się z odpowiednio liniową, wykładniczą i przyjętą wg Hordijka i współpracowników funkcją osłabienia [7]. We wszystkich trzech przypadkach obserwuje się najpierw powstanie pierwszej rysy (która oczywiście zmienia swój kierunek w procesie obciążenia), a następnie drugiej prostopadłej rysy. Powstanie drugiej rysy jest związane z efektem sprzężenia obserwowanym na rys. 15 i 16, ponieważ odkształcenia ε_2 w procesie obciążenia przybierają znacznie mniejsze wartości niż ε_1 . Przez cały czas w procesie obciążenia zachodzi $\sigma_1 \leq f_t$, $\sigma_2 \leq f_t$. Wykresy σ_1 i σ_2 w procesie obciążenia w zakresie pokrytycznym mają charakter liniowy (rys. 27), wykładniczy (rys. 28) i wg Hordijka i współpracowników [7] (rys. 29). We wszystkich przypadkach na końcu procesu obciążenia naprężenia główne σ_1 i σ_2 zmierzają do zera. Zgodnie ze wzorem (61) sieczna sztywność na ścinanie początkowo maleje, przechodząc na stronę ujemną, a następnie po utworzeniu drugiej rysy zaczyna rosnąć, zmierzając do zera od strony ujemnej.

Zgodnie z opiniami wyrażonymi w [6, 24] wynik numerycznego testu Willama można uznać za pozytywny, jeśli zostały spełnione dwa warunki:

1. Naprężenia główne w procesie obciążenia nie przekraczają f_t ($\sigma_1 \leq f_t$, $\sigma_2 \leq f_t$),
2. Naprężenia główne w procesie obciążenia w zakresie pokrytycznym zmierzają stopniowo do zera.

Oba postulaty wynikają bezpośrednio z przesłanek fizycznych – w badaniach doświadczalnych nie obserwuje się dla betonu w złożonych stanach naprężenia wytrzymałości na rozciąganie większej niż wytrzymałość jednoosiowa f_t , a postępująca degradacja materiału w procesie obciążenia redukuje możliwość przenoszenia naprężeń.

Wyniki przedstawione w artykule pokazują, że model rys rozmytych o ustalonych kierunkach spełnia pierwszy warunek dla $\beta = 0,95$ dopiero dla wartości $\theta \leq 30^\circ$, dla mniejszych wartości $\beta = 0,5$ i $\beta = 0,2$ wystarczy ograniczenie $\theta \leq 45^\circ$. Drugi warunek nie jest spełniony – przynajmniej w zakresie badanych odkształceń. Osobnym przypadkiem jest model z $\beta = 0,001$ – wówczas dla $\theta < 90^\circ$ spełnione są oba warunki. Należy jednak zauważyć, że w tym przypadku sieczna sztywność na ścinanie jest zerowa – zachowanie takie nie opisuje poprawnie właściwości betonu i może powodować poważne kłopoty numeryczne przy obliczeniach na poziomie konstrukcji. Model rys rozmytych z rysami obracającymi się we wszystkich analizowanych przypadkach spełnia oba postulaty.

W artykule nie przedstawiono porównania otrzymanych wyników dla numerycznego testu Willama z wynikami innych autorów. Dość obszerne omówienie wyników otrzymanych przy użyciu innych modeli można znaleźć m.in. w pracy Wosatki [6]. Dla większości modeli plastycznych zachowanie się jest zbliżone jakościowo do wyników prezentowanych na rys. 27–29 (to znaczy do wyników dla modelu z rysami obracającymi się), jakkolwiek z dużymi różnicami ilościowymi, powodowanymi przez różny dobór parametrów materiałowych.

5. Wnioski

W artykule przedstawiono podstawy teoretyczne dwóch podstawowych modeli rys rozmytych stosowanych w programie DIANA (pkt. 2), a następnie przeanalizowaniu ich zachowania w dwóch elementarnych testach numerycznych opisujących zachowanie materiału na poziomie punktu materialnego (pkt. 4).

Model rys rozmytych o ustalonych kierunkach nie potrafi opisać poprawnie zachowania materiału przy zmianie kierunków głównych odkształcenia i nie spełnia żadnego z dwóch postulatów dla numerycznego testu Willama [1, 4]. Zaproponowany nieco później model rys rozmytych z rysami obracającymi się spełnia oba postulaty numerycznego testu Willama, ale założenie współosiowości kierunków głównych odkształcenia i naprężenia w zakresie pokrytycznym (co prowadzi do „zapomnienia” wcześniejszych uszkodzeń) budziło wiele kontrowersji [11, 10]. Model rys rozmytych o ustalonych kierunkach zaproponowany przez de Borsta i Nautę [11, 16], a następnie zaimplementowany do programu DIANA, miał w opinii jego autorów stanowić rozwiązanie problemu. Dopuszcza on tworzenie się wielu rys w danym punkcie materialnym – w ten sposób z jednej strony zachowuje się pamięć o wcześniejszych uszkodzeniach materiału, z drugiej strony uwzględnia się nowe uszkodzenia materiału współosiowe ze zmienionymi kierunkami naprężeń głównych. Przeprowadzone w artykule analizy numeryczne wskazują wyraźnie, że model ten nie spełnia oczekiwań. Tylko pierwszy postulat dla numerycznego testu Willama jest spełniony. Dodatkowo należy zwrócić uwagę, że standardowo przyjmowana przez program DIANA wartość $\theta = 60^\circ$ jest za duża i prowadzi do tego, że również pierwszy postulat dla numerycznego testu Willama może być niespełniony.

W zakresie odkształceń analizowanych w artykule nie udało się spełnić drugiego postulatu. Możliwe, że stopniowa redukcja do zera współczynnika β w funkcji odkształceń normalnych do rysy ε_{nn}^{cr} mogłyby poprawić sytuację [25]. Z uwagi na negatywny

wynik numerycznego testu Willama, zdaniem autorów, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach nie powinien być stosowany do analizy problemów, gdzie występują znaczne zmiany kierunków głównych naprężenia i odkształcenia w procesie obciążenia.

Model rys rozmytych z rysami obracającymi się spełnia numeryczny test Willama bardzo dobrze. W modelu tym jednak sprzężenie pomiędzy kierunkiem maksymalnego naprężenia rozciągającego σ_1 a kierunkiem poprzecznym σ_2 jest opisane w fizycznie niepoprawny sposób. Manifestuje się to przez utworzenie wtórnej rysy prostopadłej do rysy pierwotnej zarówno w teście skrupowanego rozciągania, jak i numerycznym teście Willama.

Przeprowadzone analizy numeryczne wykazały, że dwa główne modele rys rozmytych oferowane przez program DIANA nie opisują zachowania materiału w sposób w pełni wiarygodny, a ich potencjalny użytkownik powinien mieć tego świadomość. Jako alternatywę program DIANA oferuje możliwość opisanie rys rozmytych za pomocą teorii plastyczności z osłabieniem przy użyciu powierzchni plastyczności typu Rankina. Autorzy zamierzają w przyszłości przeanalizować zachowanie tego modelu w przedstawionych testach numerycznych.

Niezależnie od analizy zachowania danego modelu materiału na szczelbu punktu materialnego konieczna jest jego weryfikacja dla wybranych problemów brzegowych w celu ustalenia, czy dany model potrafi wiarygodnie odtworzyć przestrzenny rozwój rys i/lub stref lokalizacji w złożonych stanach naprężenia. W przypadku betonu niezbrojonego celowa jest analiza doświadczalnych testów ścinania – rozciągania [26, 27].

Autorzy składają podziękowania dr inż. A. Wosatce i dr inż. Sz. Serędze za cenne rady i pomoc udzieloną przy prowadzeniu symulacji numerycznych.

Literatura

- [1] Willam K., Pramono E., Sture S., *Fundamental issues of smeared crack models*, Proc. SEM-RILEM Int. Conf. On Fracture of Concrete and Rock, S. Shah and S. Swartz, Eds., Society of Engineering Mechanics, Bethel Connecticut 1987, 142-153.
- [2] Winnicki A., Cichoń Cz., *Numerical analysis of the plain concrete model prediction for nonproportional loading paths*, Advances in Finite Element Technology, B. Topping, Ed., Civil-Comp Press, Edinburgh 1996, 331-339.
- [3] Feenstra P.H., *Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete*, praca doktorska, Delft University of Technology, Delft 1993.
- [4] Rots J.G., *Computational modeling of concrete fracture*, praca doktorska, Delft University of Technology, Delft 1988.
- [5] Carol I., Rizzi E., Willam K., *On the formulation of anisotropic elastic degradation*, II Generalized pseudo-Rankine model for tensile damage, Int. J. Solids Struct. 38, z. 4/2001, 519-546.

- [6] Wo s a t k o A., *Finite-element analysis of cracking in concrete using gradient damage-plasticity*, praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 2008.
- [7] TNO Diana-8.1 Manual, Second ed., May 16, 2003.
- [8] Suidan M., Schnobrich W.C., *Finite element analysis of reinforced concrete*, ASCE J. Struct. Div., 1973, 2109-2122.
- [9] Ba ž a n t Z.P., Oh B., *Crack band theory for fracture of concrete*, RILEM Mat. Struct., Vol. 16, 1983, 155-177.
- [10] Crisfield M.A., Wills J., *Analysis of R/C panels using different concrete models*, J. Eng. Mech. Div., ASCE 115, z. 3/1989, 578-597.
- [11] De Borst R., Nauta P., *Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model*, Engineering Computations 2, 1985, 35-46.
- [12] Gupta A.K., Akbar H., *Cracking in reinforced concrete analysis*, ASCE J. Struct. Div., Vol. 110, z. 8/1985, 1735-1746.
- [13] Milford R.V., Schnobrich W.C., *Application of rotating crack model to R/C shells*, Computer and Structures, Vol. 20, 1985, 225-239.
- [14] Rashid Y.R., *Analysis of prestressed concrete pressure vessels*, Nucl. Eng. and Design, Vol. 7, 1968, 334-344.
- [15] Broujerdian V., Kazemi M.T., *Smeared rotating crack model for reinforced concrete membrane elements*, ACI Struct. Journal, z. 7/2010, 411-418.
- [16] De Borst R., *Smeared cracking, plasticity, creep, and thermal loading – a unified approach*, Computer Methods in Applied Mech. and Eng., Vol. 62, 1987, 89-110.
- [17] Walraven J.C., Reinhardt H.W., *Theory and experiments on the mechanical behaviour of cracks in plain and reinforced concrete subjected to shear loading*, Heron 26, z. 1/1981, 5-68.
- [18] Szarliński J., Winnicki A., Podleś K., *Konstrukcje z betonu w płaskich stanach: komputerowe wspomaganie analizy i projektowania*, Politechnika Krakowska, Kraków 2002.
- [19] Ba ž a n t Z.P., *Comment on orthotropic models for concrete and geomaterials*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 109, z. 3/1983, 849-865.
- [20] Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General – Common rules for building and civil engineering structures.
- [21] Reinhardt H.W., *Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete*, Heron 29, z. 2/1984.
- [22] Rolshoven S., *Nonlocal plasticity models for localized failure*, praca doktorska, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Lausanne 2003.
- [23] Pamin J., *Gradient-Enhanced Continuum Models: Formulation, Discretization and Applications*, Monograph 301, Series Civil Engineering, Politechnika Krakowska, Kraków 2004.
- [24] Pivonka P., Ožbolt J., Lackner R., Mang H.A., *Comparative studies of 3d-constitutive models of concrete: application to mixed-mode fracture*, Int. J. Numer. Meth. Engng, Vol. 60, 2004, 549-570.
- [25] Kranz S., *Lokale Schwind- und Temperaturgradienten in bewehrten, oberflächennahen Zonen von Betonstrukturen*, Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie, Heft 35, Karlsruhe 1999.

- [26] Nooru-Mohammed M.B., *Mixed-mode fracture of concrete: an experimental approach*, praca doktorska, Delft University of Technology, Delft 1992.
- [27] Hassanzadeh M., *Behavior of fracture process zones in concrete influenced by simultaneously applied normal and shear displacements*, praca doktorska, Lund Institute of Technology, Lund 1991.