ŚRODOWISKO
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
ENVIRONMENTAL ENGINEERING
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
2-Ś/2011
ZESZYT 6
ROK 108
ISSUE 6
YEAR 108

WOJCIECH Z. CHMIELOWSKI, RENATA URYGA*

STEROWANIE SYSTEMEM ZBIORNIKÓW RETENCYJNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM PRZERZUTÓW MIĘDZYZBIORNIKOWYCH PRZY OKREŚLONYCH WARUNKACH NA TRAJEKTORIACH STANÓW. CZĘŚĆ II

CONTROL OF A SYSTEM OF STORAGE RESERVOIRS UNDER THE DETERMINED CONDITIONS ON STATE TRAJECTORY AND WATER TRANSFERS AMONG RESERVOIRS. PART II

Streszczenie

Artykuł zawiera sformułowanie i rozwiązanie problemu optymalizacyjnego dotyczącego sterowania odpływami z systemu zbiorników retencyjnych, które zaopatrują w wodę odbiorców. W systemie dopuszczono możliwość przerzutów wody między zbiornikami systemu. Przyjęte zostały sztywne warunki początkowe i związane równaniem warunki końcowe na trajektoriach stanów. Czas rozpoczęcia lub zakończenia optymalizacji jest swobodny.

Słowa kluczowe: *gospodarka wodna, system zbiorników retencyjnych, optymalizacja, sterowanie*

Abstract

The paper presents formulation and optimal solution to the problem dealing with control of outflow from a system of storage reservoirs supplying users with water. Water transfers among reservoirs are allowed in the system. In a given time horizon there were assumed rigid initial conditions for reservoir capacity and final conditions for state trajectories which are then interrelated by the equation. Moments of starting or ending simulation procedure are unbounded.

Keywords: *water management, water reservoirs system, optimization, control*

* Dr hab. inż. Wojciech Z. Chmielowski, prof. PK, mgr inż. Renata Uryga, doktorantka, Instytut Inżynierii i Gospodarki Wodnej, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

1. Wstęp

Pojęcie swobodnego czasu optymalizacji może odnosić się do przypadków poszukiwania:

– swobodnego czasu początkowego (nieustalonego optymalnego czasu rozpoczęcia procesu optymalizacji, przy ustalonym czasie jej zakończenia) – **C**zas**P**oczątkowy**S**wobodny,
– swobodnego czasu końcowego (nieustalonego optymalnego czasu zakończenia procesu optymalizacji , przy znanym czasie jej rozpoczęcia)– **C**zas**K**ońcowy**S**wobodny.

W zagadnieniach wspomagania decyzji sterowania odpływami ze zbiorników, wyżej wymienione przypadki swobodnego czasu z kombinacjami warunków brzegowych mają szerokie zastosowanie. Z uwagi na rozliczne warianty warunków brzegowych nie jest bez znaczenia chwila rozpoczęcia lub zakończenia optymalizacji.

W artykule przedstawione zostaną warianty optymalizacji pracy systemu zbiorników ze swobodnym czasem optymalizacji

– CPS – **C**zas**P**oczątkowy**S**wobodny,
– CKS – **C**zas**K**ońcowy**S**wobodny

i przypadkiem warunków brzegowych na trajektoriach stanów w postaci:

– LWU – lewe warunki na trajektoriach stanów ustalone,
– PWZ – prawe warunki na trajektoriach stanów związane równaniem.

Integralną częścią omawianych warunków będzie wyznaczenie:

– optymalnego czasu rozpoczęcia optymalizacji $\hat{t}_0^*$, dla ustalonego czasu zakończenia optymalizacji T lub
– optymalnego czasu zakończenia optymalizacji $\hat{T}^*$, przy ustalonym czasie rozpoczęcia optymalizacji t_0.

Zatem dla wektora prognozowanych dopływów do systemu zbiorników sens fizyczny wskaźnika jakości (1) łączy jak w części I, trzy zadania:

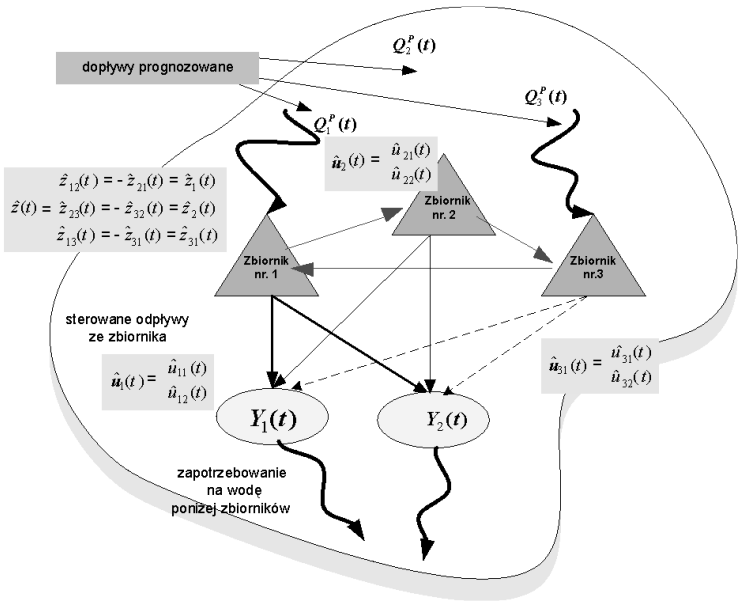
– uzyskanie (na koniec horyzontu optymalizacji T lub $\hat{T}^*$) wektora wypełnień zbiorników $\hat{\boldsymbol{x}}(T)$ spełniającego równanie warunków końcowych,
– zapewnienie takiego wektora odpływów ze zbiorników $\hat{\boldsymbol{u}}(t)_{(+)}$, $\forall t \in [\hat{t}_0^*, T]$ lub $t \in \left\lfloor t_0, \hat{T}^* \right\rfloor$, który w sposób minimalny odbiegać będzie od wektora, którego elementami są częściowe zapotrzebowania na wodę przypadające na zbiorniki systemu $\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}$, $\forall t \in [\hat{t}_0^*, T]$ lub $t \in \left\lfloor t_0, \hat{T}^* \right\rfloor$,
– zrealizowanie powyższych celów przy ewentualnych przerzutach międzyzbiornikowych i w aspekcie minimalnej wartości ww. wskaźnika.

Przedziałowe ograniczenia dotyczące wektora sterowań i wektora stanów ustalone zostały analogicznie jak w części I.

2. Początkowy czas optymalizacji swobodny (CPS)

Rozpatrzmy wariant sterowania odpływami z trzech zbiorników zasilających dwóch odbiorców wody, przy swobodnym czasie rozpoczęcia optymalizacji t_0^*.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ



Rys. 1. System trzech zbiorników, dwóch odbiorców wody (CPS)
Fig. 1. System of three reservoirs and two water users (CPS)

Wskaźnik jakości

W systemie współpracujących zbiorników (rys. 1) wskaźnik jakości otrzyma postać:

$$F = 0,5 \cdot \int_{t_0}^{T} \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \boldsymbol{u}(t)]_{(+)}^{T} \cdot \\ \cdot \mathbf{A}_1 \cdot [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \boldsymbol{u}(t)]_{(+)} + \boldsymbol{z}^T(t) \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \boldsymbol{z}(t) \end{array} \right\} dt \tag{1}$$

Równanie stanu systemu przyjmuje postać:

$$f : \dot{\boldsymbol{x}}(t)_{(3*1)} = \boldsymbol{Q}^P(t - \tau^P(t))_{(3*1)} - \mathbf{S}_{1(3*3_{(1*2)})} \cdot \boldsymbol{u}(t)_{(3*1_{(2*1)})} + \mathbf{S}_{2(3*3)} \cdot \boldsymbol{z}(t)_{(3*1)} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0^*) \tag{3}$$

Końcowe wypełnienia zbiorników muszą spełniać prawy warunek na trajektoriach stanów np. w postaci:

$$h(T): \quad \boldsymbol{S}_3(T) \cdot \boldsymbol{x}(T) - D(T) = 0 \tag{4}$$

gdzie:

$\boldsymbol{S}_3 = \lfloor s_{3_1}(T) \quad s_{3_2}(T) \quad s_{3_3}(T) \rfloor$ – wektor współczynników odpowiadający stanom zbiorników w chwili T kończącej optymalizację,

$\boldsymbol{x}(T) = [x_1(T) \quad x_2(T) \quad x_3(T)]$ – stany zbiorników w chwili T kończącej optymalizację,

$D(T)$ – sumaryczna objętość wody w zbiornikach systemu w chwili T.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Przedstawione poniżej rozwiązanie zadania pozwala określić:

– $\hat{t}_0^*$, tj. optymalny czas rozpoczęcia optymalizacji,
– wektor sterowań $\hat{\boldsymbol{u}}(t)_{(3*1_{(2*1)})_{(+)}}$, $\forall t \in [\hat{t}_0^*, T]$ (sterowanych odpływów ze zbiorników do aglomeracji) oraz
– wektor przerzutów międzyzbiornikowych $\boldsymbol{z}(t)_{(3*1)}$, $\forall t \in \left\lfloor \hat{t}_0^*, T \right\rfloor$, które zminimalizują wskaźnik jakości (1) przy równaniu stanu systemu (2), (3) i warunku (4).

Rozwiązanie zadania optymalizacji

Funkcja Hamiltona dla układu równań (1), (2), (3) przyjmuje postać:

$$H = -f_0 + \boldsymbol{\eta}^T \cdot \boldsymbol{f}$$

$$\begin{aligned} H = {} & -0,5 \cdot \left\{ [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \boldsymbol{u}(t)]_{(+)}^T \cdot \mathbf{A}_1 \cdot [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \boldsymbol{u}(t)]_{(+)} + \boldsymbol{z}^T(t) \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \boldsymbol{z}(t) \right\} + \\ & + \boldsymbol{\eta}(t)^T \cdot [\boldsymbol{Q}^P(t - \tau^P(t)) - \mathbf{S}_1 \cdot \boldsymbol{u}(t) + \mathbf{S}_2 \cdot \boldsymbol{z}(t)] \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie:

f_0 – funkcja podcałkowa wskaźnika (1),
$\boldsymbol{f}$ – równanie stanu zbiornika (2),
$\boldsymbol{\eta}(t)_{(3*1)}$ – zmienna sprzężona, wektor[3*1].

Układ równań dla funkcji Hamiltona (5) przedstawiono w punktach 1–4:

1. $[(\nabla_u H)_{\hat{u},\hat{z},\hat{x},\hat{\eta}}]^T = \mathbf{0}$

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t)_{(+)} = \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) \tag{6}$$

2. $[(\nabla_z H)_{\hat{u},\hat{z},\hat{x},\hat{\eta}}]^T = \mathbf{0}$

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t) = \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) \tag{7}$$

3. $[(\nabla_\eta H)_{\hat{u},\hat{z},\hat{x},\hat{\eta}}]^T = \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)_{(+)} = \boldsymbol{Q}^P(t - \tau^P(t)) - \mathbf{S}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{u}}(t)_{(+)} + \mathbf{S}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{z}}(t) \tag{8}$$

4. $[-(\nabla_x H)_{\hat{u},\hat{x},\hat{\eta}}]^T = \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}(t)$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}(t) = \mathbf{0}_{(3*1)} \tag{9}$$

Dopuszczalne przesunięcia warunku (4) muszą spełniać zależność:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h(T)}{\partial x_1(T)} & \frac{\partial h(T)}{\partial x_2(T)} & \frac{\partial h(T)}{\partial x_3(T)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1(T) \\ \delta x_2(T) \\ \delta x_3(T) \end{bmatrix} + \frac{\partial h(T)}{\partial T} \cdot \delta T = 0 \tag{10}$$

$$[\nabla_{x(T)} h(T)] \cdot \boldsymbol{\delta x}(T) + \frac{\partial h(T)}{\partial T} \cdot \delta T = 0$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Warunek transwersalności jest spełniony jeżeli:

$$\begin{aligned} -(\eta_1(T)\cdot\delta x_1(T)+\eta_2(T)\cdot\delta x_2(T)+\eta_3(T)\cdot\delta x_3(T))=0 \\ -\boldsymbol{\eta}(T)^T\cdot\boldsymbol{\delta x}(T)=0 \end{aligned} \tag{11}$$

Mając do dyspozycji równania od (6) do (8), wyznaczamy wektor trajektorii sterowań (odpływów ze zbiorników) $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$, wektor przerzutów międzyzbiornikowych $\hat{\boldsymbol{z}}(t)$ oraz wektor trajektorii stanów $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$.

W pierwszej kolejności należy ustalić zależność między zmiennymi sprzężonymi, wynikającą z równań (10) i (11), konieczną w odniesieniu do równania (4) na trajektoriach stanów.

Z równania (10) otrzymujemy:

$$\delta x_1(T)=-\left(\frac{\partial h(T)/\partial x_2(T)}{\partial h(T)/\partial x_1(T)}\right)\cdot\delta x_2(T)-\left(\frac{\partial h(T)/\partial x_3(T)}{\partial h(T)/\partial x_1(T)}\right)\cdot\delta x_3(T)-\left(\frac{\partial h(T)/\partial(T)}{\partial h(T)/\partial x_1(T)}\right)\delta T \tag{12}$$

Podstawiamy zależność (12) do równania (11), otrzymując w konsekwencji:

$$\boldsymbol{\eta}(T)=\begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{\partial h(T)/\partial x_2(T)}{\partial h(T)/\partial x_1(T)}\right) \\ \left(\frac{\partial h(T)/\partial x_3(T)}{\partial h(T)/\partial x_1(T)}\right) \end{bmatrix}\cdot\eta_1(T), \qquad \boldsymbol{\eta}(T)=\boldsymbol{E}(T)\cdot\eta_1(T) \tag{13}$$

Dla ustalonego T współczynniki wektora $\boldsymbol{E}$ przyjmują wartości stałe w czasie. Wykonując analogiczną jak w części I procedurę obliczeniową, otrzymujemy związek określający stałą C_1 w funkcji nieznanego czasu rozpoczęcia optymalizacji:

$$C_1(t_0^*)=\left[D(T)-\boldsymbol{S}_3(T)\cdot\left\{\int_{t_0}^{T}\{\boldsymbol{Q}^P(t-\tau^P(t))-\mathbf{S}_1\cdot[\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}]\}\,dt+x_0(t_0^*)\right\}\right]\cdot$$
$$\cdot[\mathbf{S}_3(T)\cdot(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T+\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T)\cdot\mathbf{E}\cdot(T-t_0^*)]^{-1} \tag{14}$$

Następnie sterowanie optymalne w funkcji $C_1(t_0^*)$, można zapisać:

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t)_{(+)}=\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\mathbf{E}\cdot C_1(t_0^*) \tag{15}$$

oraz wektor przerzutów międzyzbiornikowych w funkcji $C_1(t_0^*)$ wynosi:

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t)=\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\mathbf{E}\cdot C_1(t_0^*) \tag{16}$$

Drugie równanie konieczne do wyznaczenia $\hat{t}_0^*$ uzyskujemy z warunku,

$$H(t_0^*)-\left(\frac{\partial K[x(t_0^*),t_0^*]}{\partial t_0^*}\right)=0 \tag{17}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

W przyjętym wskaźniku jakości nie występuje funkcja warunków początkowych $K[x(t_0^*),t_0^*]$, zatem $H(\hat{t}_0^*)=0$, czyli:

$$-0,5\cdot\left\{[\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\boldsymbol{u}(t_0^*)]_{(+)}^T\cdot\mathbf{A}_1\cdot[\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\boldsymbol{u}(t_0^*)]_{(+)}+\boldsymbol{z}^T(t_0^*)\cdot\mathbf{A}_2\cdot\boldsymbol{z}(t_0^*)\right\}+$$
$$+\boldsymbol{\eta}(t_0^*)^T\cdot[\boldsymbol{Q}^P(t_0^*-\tau^P(t))-\mathbf{S}_1\cdot\boldsymbol{u}(t_0^*)+\mathbf{S}_2\cdot\boldsymbol{z}(t_0^*)]=0 \tag{18}$$

Przekształcamy wzór (18) wg następującego schematu:

$$-0,5\cdot\left\{\begin{matrix}[\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}+\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*)]_{(+)}^T\cdot\\ \cdot\mathbf{A}_1\cdot[\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}+\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*)]_{(+)}+\\ +(\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))^T\cdot\mathbf{A}_2\cdot(\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))\end{matrix}\right\}+$$
$$+(\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))^T\cdot\left[\begin{matrix}\boldsymbol{Q}^P(t_0^*-\tau^P(t_0^*))-\mathbf{S}_1\cdot(\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))+\\ +S_2\cdot(\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))\end{matrix}\right] \tag{19}$$

$$-0,5\cdot\left\{\begin{matrix}[\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*)]_{(+)}^T\cdot\mathbf{A}_1\cdot[\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*)]_{(+)}+\\ (\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))^T\cdot(\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T)\cdot(\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))\end{matrix}\right\}+$$
$$+(\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))^T\cdot\left[\begin{matrix}\boldsymbol{Q}^P(t_0^*-\tau^P(t_0^*))-\mathbf{S}_1\cdot(\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))+\\ +S_2\cdot(\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))=0\end{matrix}\right] \tag{20}$$

$$-0,5\cdot\left[(\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))^T\cdot(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T)\cdot(\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))+(\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))^T\cdot(\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T)\cdot(\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))\right]+$$
$$+(\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))^T\cdot\left[\begin{matrix}\boldsymbol{Q}^P(t_0^*-\tau^P(t_0^*))-\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}+\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))+\\ +\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*)=0\end{matrix}\right] \tag{21}$$

$$-0,5\cdot C_1(t_0^*)\cdot\left[\boldsymbol{E}^T\cdot(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T)\cdot(\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))+\boldsymbol{E}^T\cdot(\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T)\cdot(\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))\right]+$$
$$+C_1(t_0^*)\cdot\boldsymbol{E}^T\cdot\left[\begin{matrix}\boldsymbol{Q}^P(t_0^*-\tau^P(t_0^*))-\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}+\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))+\\ +\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*)=0\end{matrix}\right] \tag{22}$$

Po podzieleniu (22) przez wyrażenie $C_1(t_0^*)$ oraz dalszych przekształceń w wyniku dodaniu jednakowych składników, otrzymujemy:

$$0,5\cdot\boldsymbol{E}^T\cdot\left[\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T+\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\right]\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*)=$$
$$=\boldsymbol{E}^T\cdot[\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\boldsymbol{Q}^P(t_0^*-\tau(t_0^*))] \tag{23}$$

Z wyrażenia (23) wyliczamy stałą $C_1(t_0^*)$

$$C_1(t_0^*)=\left[0,5\cdot\boldsymbol{E}^T\cdot(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T+\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T)\cdot\boldsymbol{E}\right]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\boldsymbol{E}^T\cdot[\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{B}(t_0^*)\cdot\mathbf{Y}(t_0^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\boldsymbol{Q}^P(t_0^*-\tau(t_0^*))] \tag{24}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Z porównania wzorów (14) i (24) wyznaczamy $\hat{t}_0^*$, optymalny czas rozpoczęcia optymalizacji.

Hipotetyczny scenariusz zdarzeń

Przyjmiemy następujące założenia:

– początkowe stany zbiorników

$$\boldsymbol{x}_0^T = [(20 + 2 \cdot t) \quad (30 + 0{,}5 \cdot t) \quad (40 - 0{,}5 \cdot t)] \ [\mathrm{m}^3]$$

– końcowe stany zbiorników związane równanie

$$h(T): \quad \mathbf{S}_3 \cdot \boldsymbol{x}(T) - 240 = 0 \quad \mathbf{S}_3 = [1 \quad 2 \quad 3]$$

– dopływy do zbiorników

$$\boldsymbol{Q}(t)^T = [(1 + t) \quad (2 + t) \quad (10 - 0{,}5 \cdot t)] \ [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$$

– zapotrzebowanie na wodę poniżej zbiorników

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix} [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}], \qquad [*] = \begin{bmatrix} (5 + 0{,}2 \cdot t) & \\ & (15 - 0{,}2 \cdot t) \end{bmatrix}$$

– funkcje zaangażowania zbiorników w realizację funkcji zapotrzebowania

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [2] & 0 \\ 0 & 0 & [3] \end{bmatrix}, \quad [1] = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix}(t), \quad [2] = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{bmatrix}(t), \quad [3] = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{bmatrix}(t)$$

– macierz współczynników wag

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix}, \qquad [*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– macierz strukturalna

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix} \qquad [*] = [1 \quad 1]$$

– macierz strukturalna $\mathbf{S}_2$ jak w części I

– czas końcowy $T = 10$ [s].

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Rozwiązanie:

1. Według (13)

$$\boldsymbol{\eta}(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\dfrac{\partial h(T)/\partial x_2(T)}{\partial h(T)/\partial x_1(T)}\right) = 2 \\ \left(\dfrac{\partial h(T)/\partial x_3(T)}{\partial h(T)/\partial x_1(T)}\right) = 3 \end{bmatrix} \cdot \eta_1 \qquad \boldsymbol{\eta}(T) = E \cdot \eta_1(T)$$

2. Według (14)

$$C_1(t_0^*) = \left[D(T) - \boldsymbol{S}_3(T) \cdot \left\{ \int_{t_0}^{T} \{\boldsymbol{Q}^P(t - \tau^P(t)) - \mathbf{S}_1 \cdot [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}]\}\, dt + x_0(t_0^*) \right\} \right] \cdot$$

$$\cdot [\boldsymbol{S}_3(T) \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T) \cdot \boldsymbol{E} \cdot (T - t_0^*)]^{-1}$$

$$C_1(t_0^*) = \frac{0,77 \cdot (t_0^*)^2 - 9,5 \cdot t_0^* + 43}{340 - 34 \cdot t_0^*}$$

3. Według (24)

$$C_1(t_0^*) = [0,5 \cdot \boldsymbol{E}^T \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T) \cdot \boldsymbol{E}]^{-1} \cdot$$

$$\cdot \boldsymbol{E}^T \cdot [\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{B}(t_0^*) \cdot \mathbf{Y}(t_0^*) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \boldsymbol{Q}^P(t_0^* - \tau^P(t_0^*))]$$

$$C_1(t_0^*) = \frac{8 - 1,54 \cdot t_0^*}{17}$$

Porównując oba wyrażenia określające $C_1(t_0^*)$, otrzymujemy równanie kwadratowe względem t_0^*:

$$-2,31 \cdot (t_0^*)^2 + 37,3 \cdot t_0^* - 117 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{t}_{0A}^* \cong 4,262\,[\text{s}], \qquad \hat{t}_{0B}^* = 11,88 > 10\,[\text{s}]$$

Dalsze rozwiązanie dla

$$\hat{t}_{0A}^* = 4,262\,[\text{s}]$$

4. $C_1 = \dfrac{8 - 1,54 \cdot 4,262}{17} = 0,0845$

5. Stany początkowe dla $\hat{t}_0^* = 4,262\,[\text{s}]$

$$x_1(\hat{t}_{0A}^*) = 20 + 2 \cdot 4,262 = 28,524\,[\text{m}^3]$$

$$x_2(\hat{t}_{0A}^*) = 30 + 0,5 \cdot 4,262 = 32,131\,[\text{m}^3]$$

$$x_3(\hat{t}_{0A}^*) = 40 - 0,5 \cdot 4,262 = 37,869\,[\text{m}^3]$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

6. Sterowane odpływy ze zbiorników:

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t)=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}(2+0,08\cdot t)-0,0845\\(3-0,04\cdot t)-0,0845\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}(1+0,04\cdot t)-0,169\\(6-0,08\cdot t)-0,169\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}(2+0,08\cdot t)-0,2535\\(6-0,08\cdot t)-0,2535\end{bmatrix}\end{bmatrix}\ [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$$

7. Przerzuty międzyzbiornikowe:

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t)=\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*)=\begin{bmatrix}0,0845\\0,0845\\-0,169\end{bmatrix}\ [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$$

8. Stany końcowe uzyskane w wyniku wyliczonych stanów początkowych i otrzymanych sterowań oraz przerzutów:

$$\boldsymbol{x}(10)=\int_{4,262}^{10}\left\{\begin{bmatrix}(1+t)\\(2+t)\\(10-0,5\cdot t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}[1\ \ 1] & 0 & 0\\0 & [1\ \ 1] & 0\\0 & 0 & [1\ \ 1]\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}(2+0,08\cdot t)-0,0845\\(3-0,04\cdot t)-0,0845\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}(1+0,04\cdot t)-0,169\\(6-0,08\cdot t)-0,169\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}(2+0,08\cdot t)-0,2535\\(6-0,08\cdot t)-0,2535\end{bmatrix}\end{bmatrix}+\right.$$
$$\left.+\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0,0845\\0,0845\\-0,169\end{bmatrix}\right\}dt+$$
$$+\begin{bmatrix}28,524\\32,131\\37,869\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}44,38\\47,92\\33,25\end{bmatrix}\ [\mathrm{m}^3]$$

9. Stany końcowe na trajektoriach spełniają warunek (4)

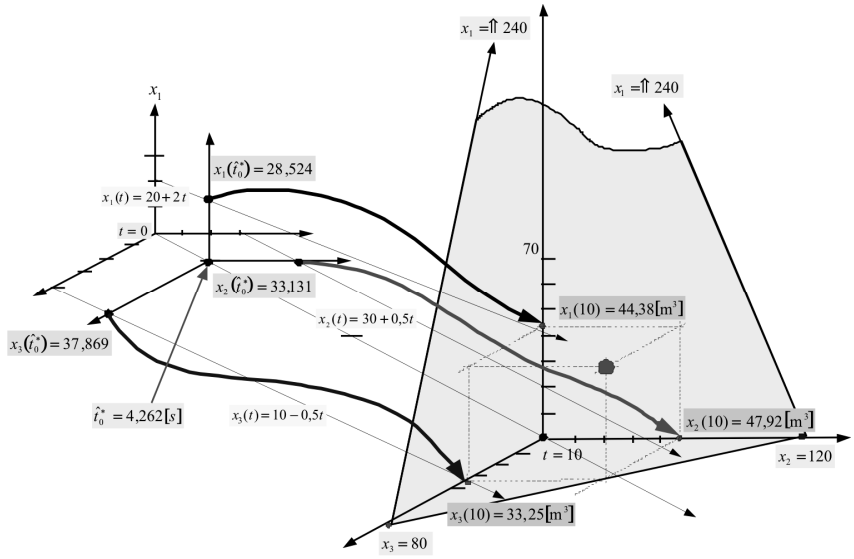
$$[1\ \ 2\ \ 3]\cdot\begin{bmatrix}44,38\\47,92\\33,25\end{bmatrix}-240=0$$

10. Wartość wskaźnika jakości wynosi:

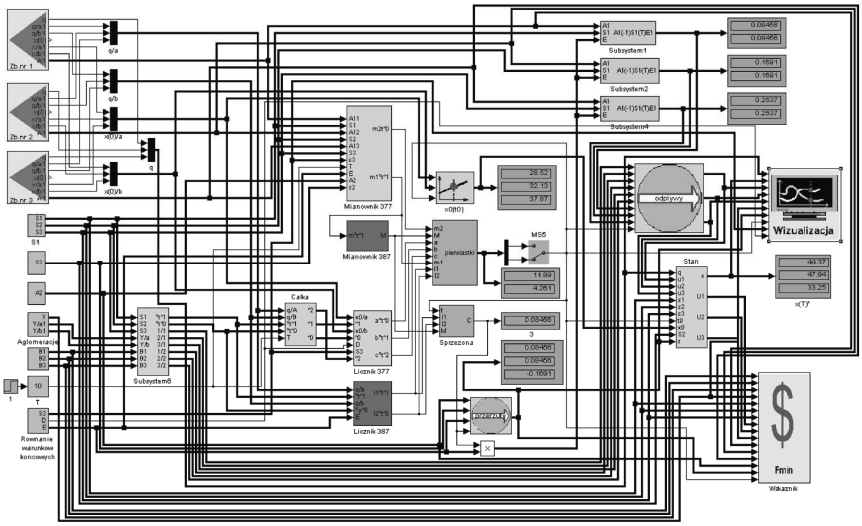
$$F=0,5\cdot\int_{4,262}^{10}\left\{\begin{matrix}[\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\boldsymbol{u}(t)]_{(+)}^T\cdot\\\cdot\mathbf{A}_1\cdot[\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\boldsymbol{u}(t)]_{(+)}+\boldsymbol{z}^T(t)\cdot\mathbf{A}_2\cdot\boldsymbol{z}(t)\end{matrix}\right\}dt=1,5978$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Każde inne sterowanie prowadzi do zwiększenia wartości wskaźnika jakości (1) lub/i naruszenia ograniczenia (4) na trajektoriach stanów.



Rys. 2. Ilustracja graficzna przykładu
Fig. 2. Graphical illustration of the example

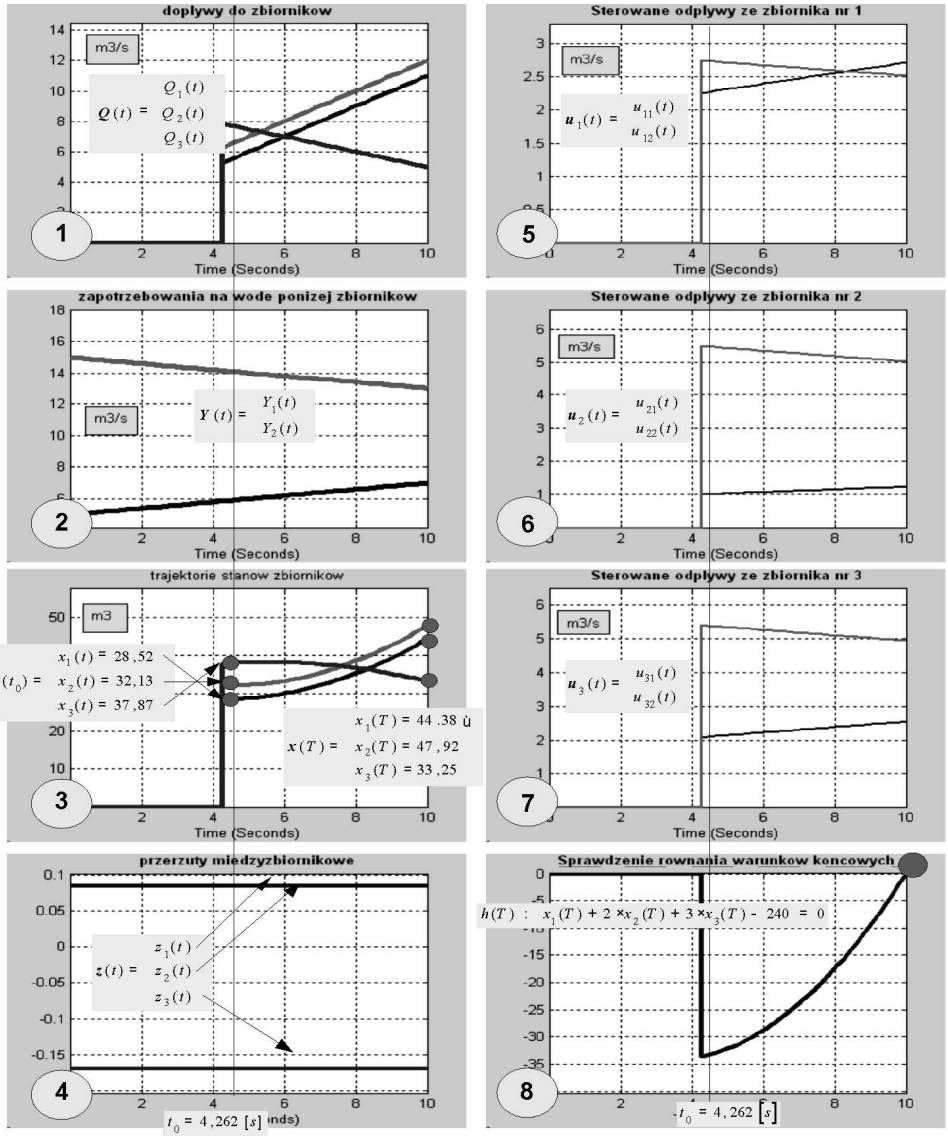


Rys. 3. Schemat symulacji analogowo/cyfrowej (Matlab/Simulink)
Fig. 3. Scheme of analog-numerical simulation (Matlab/Simulink)

Analogicznie do przedstawionych w części I zagadnień, analityczne rozwiązanie aktualnego problemu możliwe jest w odniesieniu do prostych funkcji opisujących dopły-

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

wy prognozowane, funkcje zapotrzebowania i inne wymagane parametry zadania. Trudno spodziewać się, aby wprowadzane w czasie rzeczywistym konieczne parametry wejściowe sprowadzały się li tylko do z góry określonych klas funkcji. W takim przypadku można skorzystać z programu analogowo/cyfrowego (Matlab/Simulink) realizującego rozwiązanie problemu wg opisanych wzorów. Wykorzystując autorski programu symulacyjny (rys. 3) w dowolny sposób można zmieniać parametry wejściowe zadania.



Rys. 4. Wyniki symulacji pracy systemu dla przyjętych parametrów wejściowych ze scenariusza 1

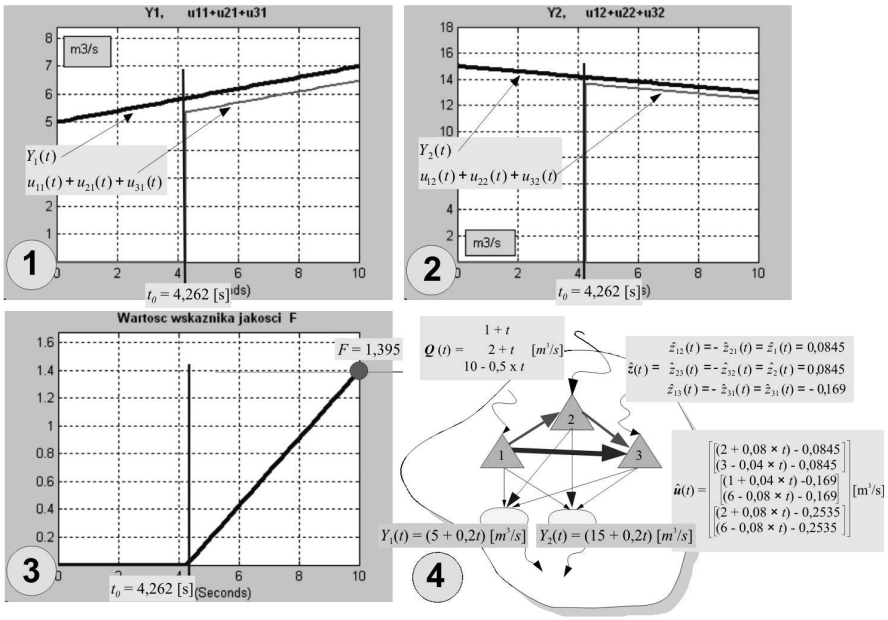
Fig. 4. Results of simulation of system behavior for input parameters according to scenario 1

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

W wyniku działania programu otrzymuje się wykresy przedstawiające odpływy ze zbiorników (sterowania) na rzecz kolejnych odbiorców oraz przerzuty międzyzbiornikowe w funkcji parametrów wejściowych. Optymalne sterowane odpływy i przerzuty zapewniają realizację wektora funkcji zapotrzebowania przy minimalnej wartości wskaźnika jakości. Jednocześnie, otrzymane trajektorie stanów zbiorników systemu zapewniają realizację przyjętego równania dotyczącego warunków końcowych na trajektoriach stanów.

Symulacje pracy systemu dla parametrów z hipotetycznego scenariusza nr 1 przedstawiono na rysunkach 4, 5. Program umożliwia symulację pracy systemu składającego się z trzech zbiorników które zasilają w wodę dwóch odbiorców (przy dowolnej strukturze połączeń zbiorniki/odbiorcy oraz zbiorniki/zbiorniki). W poszczególnych blokach wprowadzane są konieczne do optymalizacji parametry, a po uruchomieniu symulacji w pierwszej kolejności wyznaczany jest:

– optymalny czas rozpoczęcia optymalizacji $\hat{t}_0^*$ (czas włączenia zbiorników do pracy w systemie),
– początkowe stany zbiorników $\boldsymbol{x}(\hat{t}_0^*)$, jakie powinny być przyjęte, aby na koniec przyjętego horyzontu optymalizacji T zrealizować warunek 4,
– w dalszej kolejności wyznaczane są odpływy ze zbiorników w ramach dystrybucji wody do odbiorców i przerzuty międzyzbiornikowe.



Rys. 5. Wyniki symulacji pracy systemu dla przyjętych parametrów wejściowych ze scenariusza 1
Fig. 5. Results of simulation of system behavior for input parameters according to scenario 1

Na wykresie nr 1 z rysunku 4 obserwujemy wektor dopływów prognozowanych do systemu zbiorników, wykres nr 2 to wektor funkcji zapotrzebowania na wodę poniżej

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

zbiorników. Wykres nr 3 przedstawia przebieg trajektorii stanów zbiorników, wykres nr 8 obrazuje przebieg równania $h(t)$, $t \in \left\lfloor \hat{t}_0^*, T \right\rfloor$.

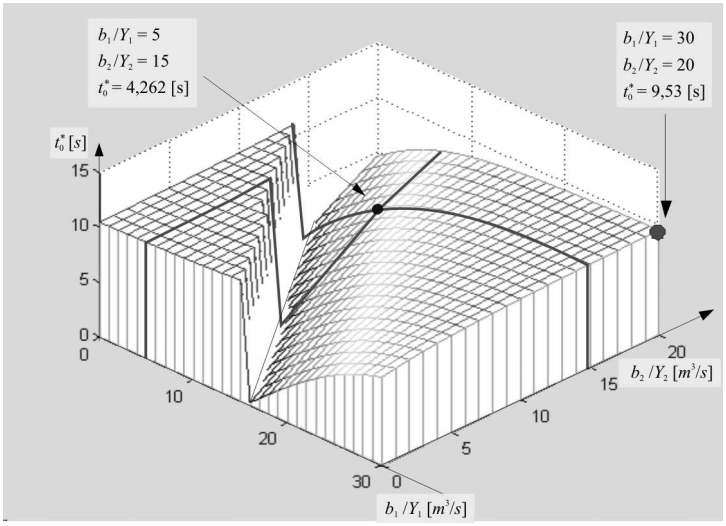
Wykresy od 5 do 7 przedstawiają odpływy (sterowania) ze zbiorników na korzyść poszczególnych aglomeracji natomiast na wykresie 4 przedstawione są trajektorie przerzutów międzyzbiornikowych.

Rysunek 5 obrazuje przebiegi kolejnych funkcji zapotrzebowania i ich realizację przez odpływy ze zbiorników (fragment 1, 2). Warto odnotować fakt, iż kierunki przerzutów miedzyzbiornikowych nie pokrywają się z kierunkami przyjętymi w równaniu stanu systemu 2. Uwaga ta dotyczy przerzutu między zbiornikiem nr 1 i nr 3 (fragment nr 4). Wzrost wartości wskaźnika jakości w przedziale czasu $t \in \left\lfloor \hat{t}_{0,}^* T \right\rfloor$, przedstawia fragment 3.

2.1. Wspomaganie decyzji dyspozytorskich z wykorzystaniem uzyskanego w rozdziale 2 rozwiązania

Przyjmiemy założenie, że zakres zmienności funkcji zapotrzebowań na wodę poniżej systemu zbiorników może zostać zawarty w przedziale:

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix} [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}], \quad [*] = \begin{bmatrix} (b_1 + 0,2 \cdot t);\ b_1 \in [0,30] \\ (b_2 - 0,2 \cdot t);\ b_2 \in [0,20] \end{bmatrix}$$



Rys. 6. Powłoka $b_1, b_2 \ t_0^*(b_1, b_2),\ b_1 \in [0,30],\ b_2 \in [0,20]$

Fig. 6. Span $b_1, b_2 \ t_0^*(b_1, b_2),\ b_1 \in [0,30],\ b_2 \in [0,20]$

Zakładając jednocześnie dyskretyzację względem parametrów b_1, b_2 równą 1, można wielokrotnie wykorzystać otrzymane w rozdziale 2 rozwiązanie, otrzymując zbiór czasów rozpoczęcia optymalizacji w funkcji kolejnych wartości b_1, b_2. Zestawienie tych czasów

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

w postaci wykresu 3D pokazuje powłokę, której punktami (węzłami) są punkty o parametrach

$$b_1, b_2 \;\; t_0^*(b_1, b_2),\; b_1 \in [0,30],\; b_2 \in [0,20]$$

Na rysunku 6 przedstawiono otrzymaną powłokę, a kropką zaznaczono rozwiązanie hipotetycznego scenariusza z poprzedniego rozdziału. Należy zaznaczyć, iż niezależnie od dalszych ograniczeń, dla wszystkich punktów powłoki, spełnione jest równanie warunków końcowych w postaci:

$$h(T): \quad \mathbf{S}_3 \cdot \boldsymbol{x}(T) - 240 = 0 \quad S_3 = [1 \quad 2 \quad 3].$$

Zbiór rozwiązań kształtujący ww. powłokę można nazwać zbiorem rozwiązań wstępnie dopuszczalnych z uwagi na przyjęte parametry:

$$b_1, b_2 \;\; t_0^*(b_1, b_2),\; b_1 \in [0,30],\; b_2 \in [0,20]$$

Analiza zbioru rozwiązań wstępnie dopuszczalnych (otrzymanej powłoki) jest niezwykle interesująca (rys. 7).

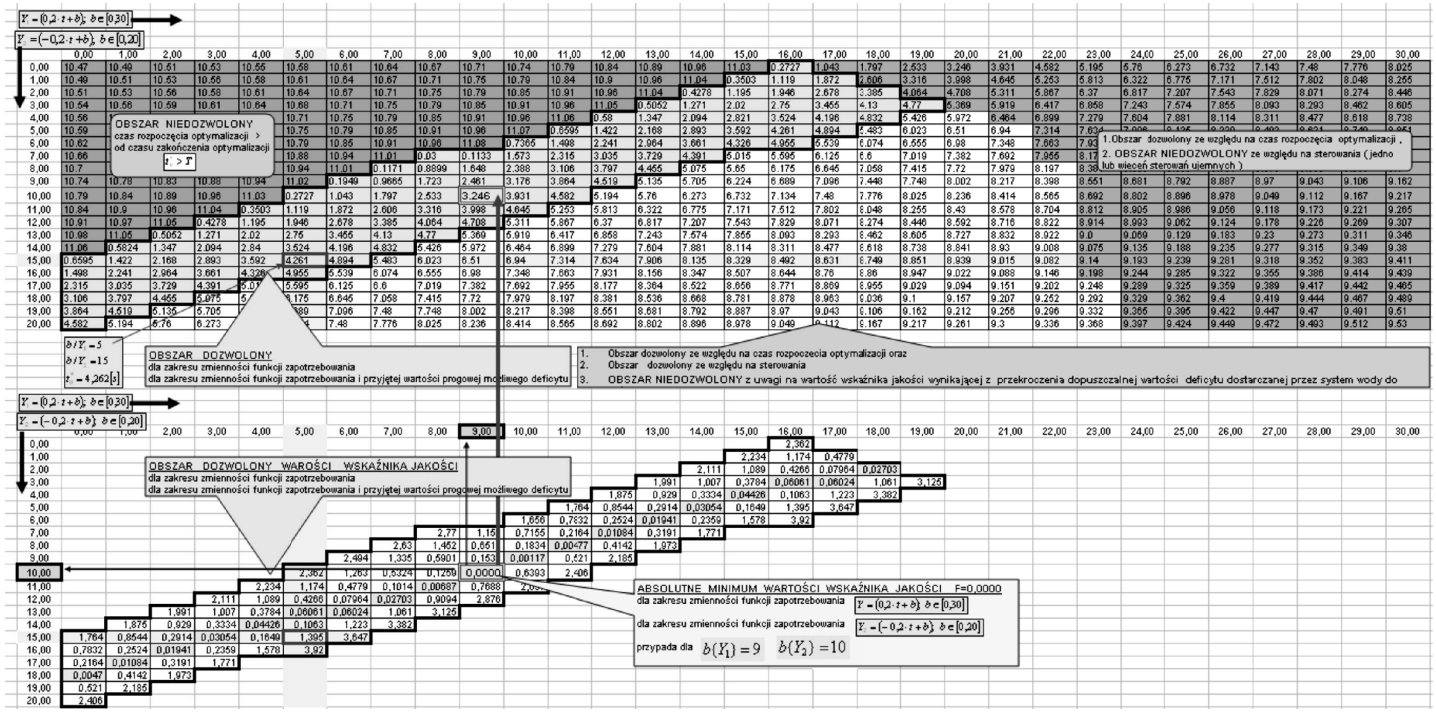
1. W pierwszej kolejności należy odrzucić rozwiązania, z których otrzymany czas rozpoczęcia optymalizacji jest:
   – większy od przyjętego czasu zakończenia optymalizacji $t_0^* > T$,
   – jest ujemny $t_0^* < 0$.
   Obszar ten zaznaczono na rys 7 kolorem brązowym (najciemniejszym).
2. W dalszej kolejności należy odrzucić rozwiązania dotyczące czasu rozpoczęcia optymalizacji $0 < t_0^* < T$, dla których nie są spełnione ograniczenia sterowania w postaci:

$$u_1(t) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) \\ u_{12}(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2(t) = \begin{bmatrix} u_{21}(t) \\ u_{22}(t) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Obszar ten zaznaczono na rys. 7, kolorem niebieskim (jaśniejszym).
3. Z pozostałego zbioru należy odrzucić rozwiązania które nie spełniają przyjętego przez dyspozytora (decydenta) założenia dotyczącego poziomu deficytu wody poniżej zbiorników systemu, wynikłego ze zbyt późnego uruchomienia dystrybucji wody z systemu. Przykładowo (rys. 7) ostateczny czas włączenia zbiorników (czas rozpoczęcia optymalizacji) ustalony został na 5 sekund.
   Zatem ze zbioru zaznaczonego kolorem białym, pozostał zbiór rozwiązań (żółty) dla $0 < t_0^* < 5$, zwany dalej **zbiorem rozwiązań dopuszczalnych**.
4. Żółty zbiór (obwiednia linia pogrubioną) rozwiązań dopuszczalnych przedstawia zatem rozwiązania spełniające wszystkie dotychczasowe wymagania, tj.:
   – spełnienie równania warunków końcowych na trajektoriach stanów,
   – zapewnienia sterowań ze zbiorników większych co do wartości od zero lub równych zero dla przedziału czasu $t_0^* < t < T$,
   – ograniczenie poziomu deficytu wody poniżej systemu zbiorników do ustalonej wartości, którą jest funkcja czasu rozpoczęcia optymalizacji (włączenia zbiorników do pracy).

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ



Rys. 7. Powłoka b_1, b_2, t_0^* (b_1, b_2), $b_1 \in [0,30]$, $b_2 \in [0,20]$
Fig. 7. Span b_1, b_2, t_0^* (b_1, b_2), $b_1 \in [0,30]$, $b_2 \in [0,20]$

Dalsza analiza żółtego zbioru rozwiązań dopuszczalnych w aspekcie wartości wskaźnika jakości związanego z każdym elementem rozpatrywanego zbioru wskazuje, że w zasadzie dla każdego rozwiązania z zakresu $(0 < t_0^* < 5)$, wartość wskaźnika jakości jest inna oraz można w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych wskazać element (rozwiązanie) o najmniejszej wartości wskaźnika jakości.

Dla przyjętych do scenariusza danych, elementem zbioru rozwiązań dopuszczalnych, przy którym wartość wskaźnika F w postaci (1) jest absolutnie minimalna i równa 0, jest rozwiązanie:

$$[b_1 = 9, b_2 = 10] \rightarrow t_0^*(b_1, b_2) = 3,246\,[\mathrm{s}].$$

Zatem dla przedstawionego scenariusza zmienności funkcji zapotrzebowania b_1, b_2 $t_0^*(b_1, b_2)$, $b_1 \in [0,30]$, $b_2 \in [0,20]$, rozwiązanie to będzie **rozwiązaniem absolutnie optymalnym.**

Stwierdzenie to oznacza, że w przypadku możliwości ustalenia przez dyspozytora systemu wartości funkcji zapotrzebowania na wodę poniżej systemu, powinien wskazać macierz w postaci:

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix} [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}], \quad [*] = \begin{bmatrix} (9 + 0,2 \cdot t) & \\ & (10 - 0,2 \cdot t) \end{bmatrix},$$

dla której optymalnym czasem rozpoczęcia pracy zbiorników jest czas $t_0^*(b_1, b_2) = 3,246\,[\mathrm{s}]$ i w przedziale czasu 3,246 < t < T wskazane funkcje zapotrzebowania zostaną w 100% zrealizowane, zapewniając tym samym zerową wartość wskaźnika jakości (1).

Ponadto korzystając z żółtego zbioru rozwiązań dopuszczalnych, dla każdej wartości $b_1 \in [0,19]$, można wskazać zakres zmienności b_2 oraz wyłonić b_2, przy której występuje minimum wartości wskaźnika F i odpowiadający jej optymalny czas rozpoczęcia optymalizacji (włączenia systemu zbiorników).

Ostatnie stwierdzenie obowiązuje również w druga stronę tzn. dla każdej wartości $b_2 \in [0,20]$ można wskazać zakres zmienności parametru b_1 i wyłonić b_1, przy której występuje minimum wartości wskaźnika F i odpowiadający jej optymalny czas rozpoczęcia optymalizacji (włączenia systemu zbiorników).

3. Końcowy czas optymalizacji swobodny (CKS)

Wykorzystując elementy rozwiązania z poprzedniego rozdziału, możemy przeanalizować przypadek sterowania systemem zbiorników (np. rys. 1), dla którego oprócz wszystkich innych założeń, istotnym elementem jest fakt, iż w odniesieniu do czasu trwania optymalizacji T^*, nie zakłada się żadnych ograniczeń, przyjmując jedynie, że $T^* > t_0$.

W praktyce zastosowanie przedstawionego poniżej rozwiązania jest bardzo znaczące. Otrzymuje się wektor odpływów ze zbiorników (sterowań), który w odniesieniu do postawionych systemowi wymagań dotyczących dystrybucji wody realizuje te wymagania z minimalną wartością wskaźnika jakości.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Jednocześnie optymalnie dobrany zostaje horyzont optymalizacji T^*. Wynikające z optymalnych sterowań i optymalnego horyzontu T^*, stany zbiorników w chwili kończącej optymalizację będą spełniać warunek wiążący stany końcowe, który traktowany jest jako globalna ilość wody, którą należy pozostawić w systemie po realizacji sterowania. Ta ilość wody dostępna jest do dalszej dystrybucji w okresach czasu po rozpatrywanym interwale.

Określenie optymalnego horyzontu optymalizacji T^* (tj. optymalnego czasu trwania dystrybucji wody z systemu) jest cenną informacją. Dla przyjętych parametrów wejściowych wyznaczenie T^* określa przedział czasu $t \in \lfloor t_0,\ T^* \rfloor$, w którym odbiorcy wody mogą liczyć na zrealizowanie swoich potrzeb wodnych, a dyspozytor sterujący systemem zbiorników, poznaje horyzont czasu, w którym system będzie obciążony w związku z koniecznością realizacji ww. potrzeb.

Wskaźnik jakości

W systemie współpracujących zbiorników (rys. 1) wskaźnik jakości otrzyma postać:

$$F = 0,5 \cdot \int_{t_0}^{T^*} \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \boldsymbol{u}(t)]_{(+)}^{T} \cdot \\ \cdot \mathbf{A}_1 \cdot [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \boldsymbol{u}(t)]_{(+)} + \boldsymbol{z}^T(t) \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \boldsymbol{z}(t) \end{array} \right\} dt \tag{25}$$

Równanie stanu systemu wg (2) z warunkiem początkowym:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0) \tag{26}$$

gdzie:

t_0 – ustalony czas rozpoczęcia optymalizacji.

Końcowe wypełnienia zbiorników muszą spełniać prawy warunek na trajektoriach stanów np. w postaci:

$$h(T^*): \quad \boldsymbol{S}_3(T^*) \cdot \boldsymbol{x}(T^*) - D(T) = 0 \tag{27}$$

gdzie:

$\boldsymbol{S}_3 = \lfloor s_{3_1}(T^*) \quad s_{3_2}(T^*) \quad s_{3_3}(T^*) \rfloor$ – wektor współczynników odpowiadający stanom zbiorników w chwili T^* kończącej optymalizację,

$\boldsymbol{x}(T^*) = \lfloor x_1(T^*) \quad x_2(T^*) \quad x_3(T^*) \rfloor$ – stany zbiorników w chwili T^* kończącej optymalizację,

$D(T^*)$ – sumaryczna objętość wody w zbiornikach systemu w chwili T^*,

T^* – poszukiwany optymalny czas zakończenia optymalizacji.

Przedstawione poniżej rozwiązanie zadania pozwalają określić:

– $\hat{T}^*$, tj. optymalny czas zakończenia optymalizacji,

– wektor sterowań $\hat{\boldsymbol{u}}(t)_{(3*1_{(2*1)})_{(+)}}$, $\forall t \in \lfloor t_0, \hat{T}^* \rfloor$ (sterowanych odpływów ze zbiorników do aglomeracji) oraz

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

– wektor przerzutów międzyzbiornikowych $\boldsymbol{z}(t)_{(3*1)}$, $\forall t \in \left\lfloor t_0, \hat{T}^* \right\rfloor$, które

– zminimalizują wskaźnik jakości (25) przy równaniu stanu systemu (2), (26) i warunku (27).

Rozwiązanie zadania optymalizacji przebiega wg (6), (7), (8), (9), następnie:

Dopuszczalne przesunięcia warunku (27) muszą spełniać zależność:

$$\left[\frac{\partial h(T^*)}{\partial x_1(T^*)} \quad \frac{\partial h(T^*)}{\partial x_2(T^*)} \quad \frac{\partial h(T^*)}{\partial x_3(T^*)}\right] \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1(T^*) \\ \delta x_2(T^*) \\ \delta x_3(T^*) \end{bmatrix} + \frac{\partial h(T^*)}{\partial T^*} \cdot \delta T^* = 0 \tag{28}$$

$$\left[\nabla_{x(T^*)} h(T^*)\right] \cdot \boldsymbol{\delta x}(T^*) + \frac{\partial h(T^*)}{\partial T^*} \cdot \delta T^* = 0$$

Warunek transwersalności jest spełniony jeżeli:

$$-\boldsymbol{\eta}(T^*) \cdot \boldsymbol{\delta x}(T^*) = 0 \tag{29}$$

Uwzględniając zależność (28), otrzymujemy:

$$\delta x_1(T^*) = -\left(\frac{\partial h(T^*)/\partial x_2(T^*)}{\partial h(T^*)/\partial x_1(T^*)}\right) \cdot \delta x_2(T^*) - \left(\frac{\partial h(T^*)/\partial x_3(T^*)}{\partial h(T^*)/\partial x_1(T^*)}\right) \cdot \delta x_3(T^*) + \\ -\left(\frac{\partial h(T^*)/\partial (T^*)}{\partial h(T^*)/\partial x_1(T^*)}\right) \cdot \delta T^* \tag{30}$$

zakładając, że $\partial h(T^*)/\partial T^* = 0$ (równanie $h(T^*)$), nie zależy w sposób jawny od czasu, podstawiamy (30) do (31), otrzymując związek:

$$\boldsymbol{\eta}(T^*) = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{\partial h(T^*)/\partial x_2(T^*)}{\partial h(T^*)/\partial x_1(T^*)}\right) \\ \left(\frac{\partial h(T^*)/\partial x_3(T^*)}{\partial h(T^*)/\partial x_1(T^*)}\right) \end{bmatrix} \cdot \eta_1(T^*), \quad \boldsymbol{\eta}(T^*) = \boldsymbol{E}(T^*) \cdot \eta_1(T^*) \tag{31}$$

Sterowanie optymalne (6) z uwzględnieniem (31) wyraża się związkiem:

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t)_{(+)} = \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T \cdot \boldsymbol{E}(T^*) \cdot \hat{\eta}_1(T^*) \tag{32}$$

Przerzuty międzyzbiornikowe z uwzględnieniem (31) wyrażają się wzorem:

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t) = \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T \cdot \boldsymbol{E}(T^*) \cdot \eta_1(t) \tag{33}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Końcowe stany na trajektoriach otrzymamy w wyniku operacji:

$$x(T^*)=\int_{t_0}^{T^*}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{Q}^P(t-\tau^P(t))-\mathbf{S}_1\cdot[\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}(T^*)\cdot C_1]+\\ +\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}(T^*)\cdot C_1\end{matrix}\right\}dt+\boldsymbol{x}_0(t_0) \quad (34)$$

Całkując składnik stały w czasie, a następnie podstawiając wynik do równania (27), otrzymujemy równanie z którego można wyznaczyć C_1:

$$D(T^*)-\mathbf{S}_3^T\cdot\left\{\int_{t_0}^{T^*}\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{Q}^P(t-\tau^P(t))-\\ +\mathbf{S}_1\cdot[\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}(T^*)\cdot C_1]+\\ +\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}(T^*)\cdot C_1\end{matrix}\right\}dt+\boldsymbol{x}_0(t_0)\right\}=0$$

$$D(T^*)-\mathbf{S}_3^T\cdot\left\{\begin{matrix}\int_{t_0}^{T^*}\{\boldsymbol{Q}^P(t-\tau^P(t))-\mathbf{S}_1\cdot[\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}]\}\,dt+\\ +[\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}(T^*)\cdot C_1+\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}(T^*)\cdot C_1]\cdot(T^*-t_0)+x_0(t_0)\end{matrix}\right\}=0$$

$$D(T^*)-\boldsymbol{S}_3^T\cdot\left\{\int_{t_0}^{T^*}\{\boldsymbol{Q}^P(t-\tau^P(t))-\mathbf{S}_1\cdot[\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}]\}\,dt+\boldsymbol{x}_0(t_0)\right\}=$$
$$=\boldsymbol{S}_3^T\cdot[\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}(T^*)+\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}(T^*)]\cdot(T^*-t_0)\cdot C_1$$

$$C_1=\{S_3^T(T^*)\cdot[\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T+\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T]\cdot\boldsymbol{E}(T^*)\cdot(T^*-t_0)\}^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left\{D(T^*)-\boldsymbol{S}_3^T(T^*)\cdot\left\{\int_{t_0}^{T^*}\{\boldsymbol{Q}^P(t-\tau^P(t))-\mathbf{S}_1\cdot[\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}]\}\,dt+\boldsymbol{x}_0(t_0)\right\}\right\} \quad (35)$$

Drugie równanie konieczne do wyznaczenia T^* uzyskujemy z warunku:

$$H(T^*)-\left(\frac{\partial K[x(T^*),T^*}{\partial T^*}\right)=0 \quad (36)$$

W przyjętym wskaźniku jakości nie występuje funkcja warunków końcowych $K\left\lfloor x(T^*),T^*\right\rfloor$, zatem $H(T^*)=0,$ co sprowadza się do zależności:

$$\begin{matrix}-0,5\cdot\left\{[\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\boldsymbol{u}(t)]_{(+)}^T\cdot\mathbf{A}_1\cdot[\mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{Y}(t)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\boldsymbol{u}(t)]_{(+)}+z^T(t)\cdot\mathbf{A}_2\cdot z(t)\right\}+\\ +\boldsymbol{\eta}^T(T^*)\cdot[\boldsymbol{Q}^P(T^*-\tau^P(T^*))-\mathbf{S}_1\cdot\boldsymbol{u}(T^*)+\mathbf{S}_2\cdot\boldsymbol{z}(T^*)]=0\end{matrix} \quad (37)$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Po przekształceniu wzoru (37) , otrzymujemy zależność określającą stałą C_1:

$$-0,5\cdot\left\{\begin{array}{l}[\mathbf{B}(T^*)\cdot\mathbf{Y}(T^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{B}(T^*)\cdot\mathbf{Y}(T^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}+\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*)]_{(+)}^T\cdot \\ \cdot\mathbf{A}_1\cdot[\mathbf{B}(T^*)\cdot\mathbf{Y}(T^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{B}(T^*)\cdot\mathbf{Y}(T^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}+\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*)]_{(+)}+ \\ +(\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*)]^T\cdot\mathbf{A}_2\cdot(\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(t_0^*))\end{array}\right\}+$$

$$+(\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))^T\cdot\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{Q}^P(T^*-\tau^P(T^*))-\mathbf{S}_1\cdot(\mathbf{B}(T^*)\cdot\mathbf{Y}(T^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))+ \\ +S_2\cdot(\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))\end{array}\right]=0 \tag{38}$$

$$-0,5\cdot\left\{\begin{array}{l}[\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*)]_{(+)}^T\cdot\mathbf{A}_1\cdot[\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*)]_{(+)}+ \\ +(\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))^T\cdot(\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T)\cdot(\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))\end{array}\right\}+$$

$$+(\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))^T\cdot\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{Q}^P(T^*-\tau^P(T^*))-\mathbf{S}_1\cdot(\mathbf{B}(T^*)\cdot\mathbf{Y}(T^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))+ \\ +S_2\cdot(\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))\end{array}\right]=0 \tag{39}$$

$$-0,5\cdot\left[(\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))^T\cdot(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T)\cdot(\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))+(\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))^T\cdot(\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T)\cdot(\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))\right]+$$

$$+(\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))^T\cdot\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{Q}^P(T^*-\tau^P(T^*))-\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{B}(T^*)\cdot\mathbf{Y}(T^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}+\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*)+ \\ +\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*)\end{array}\right]=0 \tag{40}$$

$$-0,5\cdot C_1(T^*)\cdot\left[\boldsymbol{E}^T\cdot(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T)\cdot(\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))+\boldsymbol{E}^T\cdot(\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T)\cdot(\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*))\right]+$$

$$+C_1(T^*)\cdot\boldsymbol{E}^T\cdot\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{Q}^P(T^*-\tau^P(T^*))-\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{B}(T^*)\cdot\mathbf{Y}(T^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}+\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*)+ \\ +\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*)\end{array}\right]=0 \tag{41}$$

Po podzieleniu (41) przez wyrażenie $C_1(T^*)$ oraz dalszych przekształceń w wyniku dodania jednakowych składników, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&0,5\cdot\boldsymbol{E}^T\cdot\left[\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T+\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T\right]\cdot\boldsymbol{E}\cdot C_1(T^*)= \\ &\quad=\boldsymbol{E}^T\cdot[\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{B}(T^*)\cdot\mathbf{Y}(T^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\boldsymbol{Q}^P(T^*-\tau^P(T^*))]\end{aligned} \tag{42}$$

Z wyrażenia (42) wyliczamy stałą $C_1(T^*)$:

$$\begin{aligned}&C_1(T^*)=\left[0,5\cdot\boldsymbol{E}^T\cdot(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{A}_1^{-1}\cdot\mathbf{S}_1^T+\mathbf{S}_2\cdot\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{S}_2^T)\cdot\boldsymbol{E}\right]^{-1}= \\ &\quad=\boldsymbol{E}^T\cdot[\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{B}(T^*)\cdot\mathbf{Y}(T^*)\cdot\mathbf{S}\cdot\mathbf{1}-\boldsymbol{Q}^P(T^*-\tau^P(T^*))]\end{aligned} \tag{43}$$

Z porównania wzorów (35) i (43) wyznaczamy T^*, optymalny czas rozpoczęcia optymalizacji.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Hipotetyczny scenariusz zdarzeń

Rozpatrzymy przykład z poprzedniego punktu, tym razem w aspekcie czasu końcowego T^*. Przyjmiemy następujące założenia $t_0 = 0$ [s]:

1. Początkowe stany zbiorników

$$\boldsymbol{x}_0^T = [(20 + 2 \cdot t) \quad (30 + 0{,}5 \cdot t) \quad (40 - 0{,}5 \cdot t)] = [20{,}0 \quad 30{,}0 \quad 40{,}0] \ [\mathrm{m}^3]$$

2. Końcowe stany zbiorników związane równanie

$$h(T^*): \quad \boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{x}(T^*) - 200 = 0 \quad \boldsymbol{S}_2 = [1 \quad 2 \quad 3]$$

3. Dopływy do zbiorników

$$\boldsymbol{Q}(t)^T = [(1+t) \quad (2+t) \quad (10 - 0{,}5 \cdot t)], \quad \forall t \in \left\lfloor 0, T^* \right\rfloor \ [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$$

4. Zapotrzebowanie na wodę poniżej zbiorników

$$Y(t) = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix} [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}], \qquad [*] = \begin{bmatrix} (5 + 0{,}2 \cdot t) & \\ & (15 - 0{,}2 \cdot t) \end{bmatrix}$$

5. Funkcje zaangażowania zbiorników w realizację funkcji zapotrzebowania

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} [\bullet]_1 & 0 & 0 \\ 0 & [\bullet]_2 & 0 \\ 0 & 0 & [\bullet]_3 \end{bmatrix}, \quad [\bullet]_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}2 \end{bmatrix} \cdot 1(t),$$

$$[\bullet]_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{bmatrix} \cdot 1(t), \quad [\bullet]_3 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}4 \end{bmatrix} \cdot 1(t)$$

6. Macierz współczynników wag

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix}, \quad [*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Macierz strukturalna

$$S_1 = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix}, \quad [*] = [1 \quad 1].$$

Rozwiązanie:

1. Według (35):

$$C_1 = \{\boldsymbol{S}_3^T(T^*) \cdot [\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T] \cdot \boldsymbol{E}(T^*) \cdot (T^* - t_0)\}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left\{ D(T^*) - \boldsymbol{S}_3^T(T^*) \cdot \left\{ \int_{t_0}^{T^*} \{\boldsymbol{Q}^P(t - \tau^P(t)) - \mathbf{S}_1 \cdot [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}]\} \, dt + \boldsymbol{x}_0(t_0) \right\} \right\}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

$$C_1 = \frac{0,77 \cdot (T^*)^2 + 8 \cdot T^*}{34 \cdot T^*}$$

2. Według (43):

$$C_1(T^*) = [0,5 \cdot \boldsymbol{E}^T \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T) \cdot \boldsymbol{E}]^{-1} \cdot$$
$$\cdot \boldsymbol{E}^T \cdot [\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{B}(T^*) \cdot \mathbf{Y}(T^*) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \boldsymbol{Q}^P (T^* - \tau^P (T^*))]$$

$$C_1 = \frac{8 - 1,54 \cdot T^*}{17}$$

Porównując oba wyrażenia określające C_1, otrzymujemy równanie kwadratowe względem T^*:

$$2,31 \cdot (T^*)^2 - 8 \cdot T^* = 0 \quad \Rightarrow \hat{T}^* = 3,4632\,[\mathrm{s}]$$

Dalsze rozwiązanie dla $\hat{T}^* = 3,4632\,[\mathrm{s}]$

3. $C_1 = \dfrac{8 - 1,54 \cdot 3,4632}{17} = 0,156863$

4. Sterowania (32)

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (2 + 0,08 \cdot t) + 0,156863 \\ (3 - 0,04 \cdot t) + 0,156863 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (1 + 0,04 \cdot t) + 0,31372 \\ (6 - 0,08 \cdot t) + 0,31372 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (2 + 0,08 \cdot t) + 0,47059 \\ (6 - 0,08 \cdot t) + 0,47059 \end{bmatrix} \end{bmatrix} [\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$$

5. Przerzuty międzyzbiornikowe (33):

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t) = \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T \cdot \boldsymbol{E}(T^*) \cdot \eta_1(t) =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 0,156863 = \begin{bmatrix} 0,3137 \\ -0,1569 \\ -0,1569 \end{bmatrix}$$

6. Stany końcowe uzyskane w wyniku wyliczonych stanów początkowych i otrzymanych sterowań wynoszą:

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

$$\boldsymbol{x}(10) = \int_0^{3,4632} \left\{ \begin{bmatrix} (1+t) \\ (2+t) \\ (10-0,5\cdot t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [1 \;\; 1] & 0 & 0 \\ 0 & [1 \;\; 1] & 0 \\ 0 & 0 & [1 \;\; 1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (2+0,08\cdot t)+0,156863 \\ (3-0,04\cdot t)+0,156863 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (1+0,04\cdot t)+0,31372 \\ (6-0,08\cdot t)+0,31372 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} (2+0,08\cdot t)+0,47059 \\ (6-0,08\cdot t)+0,47059 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \right.$$

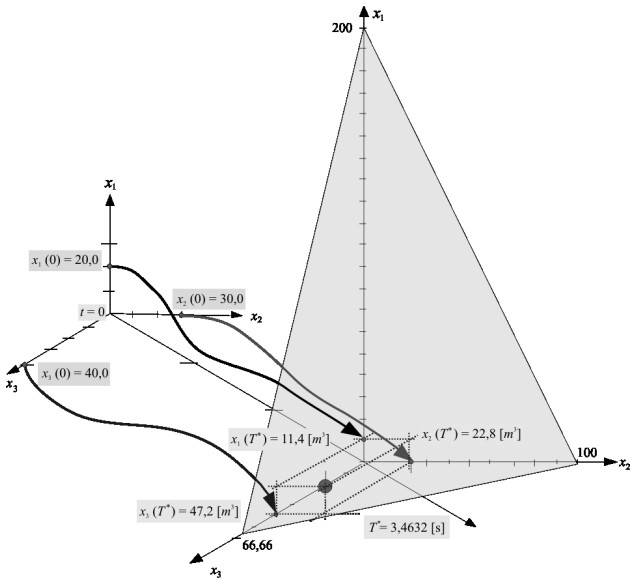
$$\left. + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,3137 \\ -0,1569 \\ -0,1569 \end{bmatrix} \right\} dt +$$

$$+ \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,4 \\ 22,8 \\ 47,2 \end{bmatrix} [\mathrm{m}^3]$$

Stany końcowe na trajektoriach spełniają warunek (27):

$$[1 \quad 2 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 11,4 \\ 22,8 \\ 47,2 \end{bmatrix} - 200 \cong 0$$

7. Każde inne sterowanie prowadzi do zwiększenia wartości wskaźnika jakości lub/i naruszenia ograniczenia (27) na trajektoriach stanów.



Rys. 8. Ilustracja graficzna przykładu
Fig. 8. Graphical illustration of the example

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

4. Wnioski

Niniejszy artykuł zawiera zagadnienia sterowania systemem zbiorników retencyjnych, które mogą być przypadkami często stosowanymi w praktyce.

Ustalone warunki początkowe na trajektoriach stanów (tj. początkowe wypełnienia zbiorników) oraz warunki końcowe na trajektoriach stanów związane równaniem ograniczeń, stanowią bardzo praktyczne zadanie optymalizacyjne, w oparciu o które mogą funkcjonować złożone systemy zbiornikowe.

Dodatkowo ustalony lub nieustalony czas rozpoczęcia/zakończenia optymalizacji (rozpoczęcie pracy kolejnych zbiorników w ramach systemu, zakończenie pracy całego systemu zbiorników) znacznie wzbogaca zbiór możliwych przypadków.

Skuteczność podejścia do sterowania systemem zbiorników z wykorzystaniem równania ograniczeń na końcach trajektorii stanów, sprowadza się do faktu pozostawienia **wymaganej globalnej ilości wody w zbiornikach systemu** na koniec horyzontu optymalizacji *T*, bez konkretnych wymagań w odniesieniu do pojedynczego zbiornika.

Rola przerzutów międzyzbiornikowych w tym względzie jest taka, aby:

– zrealizować postawione równanie warunków końcowych,
– oraz aby dystrybucja wody z systemu (dostawy wody do odbiorców) nastąpiła z minimalnymi stratami w odniesieniu do wymaganych potrzeb odbiorców.

Z zastosowanie autorskich programów komputerowych wykonano, a następnie omówiono wyniki symulacji pracy systemu, przy wykorzystaniu hipotetycznych danych, które tworzą tzw. scenariusze zdarzeń w obrębie analizowanego systemu. W konsekwencji **wymaganej globalnej ilości wody w zbiornikach systemu** na koniec horyzontu optymalizacji *T*, można zaproponować różne warianty sterowania (uzależnione od scenariusza zdarzeń), których wspólną cechą jest traktowanie prognozy w sposób deterministyczny.

Wynikami symulacji są w każdym przypadku: wektor odpływów ze zbiorników na cały horyzont optymalizacji, wektor przerzutów międzyzbiornikowych, które uwzględniają (w razie konieczności) ograniczenia dotyczące urządzeń spustowych zbiorników oraz cele zawarte we wskaźniku jakości oraz wektor końcowych wypełnień zbiorników systemu, który gwarantuje wymagana globalna ilość wody w systemie zbiorników na koniec rozpatrywanego horyzontu czasowego.

Analiza odpowiednio dużego zbioru hipotetycznych sytuacji umożliwia skuteczne ustalenie zakresu zmienności głównych parametrów systemu $D(T)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{Y}(t)$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, wpływających na: wektor sterowań $\hat{\boldsymbol{u}}(t)_{(+)}$, wektor przerzutów międzyzbiornikowych $\hat{\boldsymbol{z}}(t)$ oraz wektor stanów $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ i wartość wskaźnika jakości *F*.

Również w wyniku dalszej „kompilacji” przedstawionych w artykule rozwiązań, można rozpatrywać kolejne przypadki poszukiwania:

– optymalnego wektora czasów rozpoczęcia procesu optymalizacji (czas początkowy swobodny CPS) $\hat{\boldsymbol{t}}_0 = [\hat{t}_{0,1} \quad \hat{t}_{0,2} \quad \bullet \quad \bullet \quad \hat{t}_{0,m}]$, dla ustalonego czasu końcowego *T* lub
– optymalnego wektora czasów zakończenia procesu $\hat{T}^*$ (czas końcowy swobodny CKS), przy (CPU)

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

- jednakowym ustalonym czasie początkowym t_0,
- różnym ustalonym czasie początkowym dla poszczególnych zbiorników systemu $\boldsymbol{t}_0 = \lfloor t_{0,1} \quad t_{0,2} \quad \bullet \quad \bullet \quad t_{0,m} \rfloor$.

Wyżej przedstawione i wymienione przypadki prawdopodobnie zamykają zbiór możliwych rozwiązań w odniesieniu do tematu zdefiniowanego w tytule artykułu.

Literatura

[1] Chmielowski W., Uryga R., *Sterowanie systemem zbiorników retencyjnych z uwzględnieniem przerzutów międzyzbiornikowych przy określonych warunkach na trajektoriach stanów*, cz. 1, Czasopismo Techniczne, 2-Ś/2011, Wydawnictwo PK, Kraków 2011, 23-41.

[2] Chmielowski W., Uryga R., *Szczególna postać warunków brzegowych w sterowaniu optymalnym wielozbiornikowymi systemami wodno-gospodarczymi*, Czasopismo Techniczne, 1-Ś/2009, Wydawnictwo PK, Kraków 2009, 43-58.

[3] Chmielowski W., *Czas obserwacji i rozmaitość warunków brzegowych na trajektoriach stanów, jako elementy optymalnego sterowania odpływami z systemu zbiorników retencyjnych*, Czasopismo Techniczne, 8-Ś/2005, Wydawnictwo PK, Kraków 2005.

[4] Chmielowski W., *Ograniczenia stanu i sterowania jako element optymalizacji wielozbiornikowego systemu wodno-gospodarczego (część I)*, Czasopismo Techniczne, 16-Ś/2005, Wydawnictwo PK, Kraków 2005.

[5] Chmielowski W., *Ograniczenia stanu i sterowania jako element optymalizacji wielozbiornikowego systemu wodno-gospodarczego (część II)*, Czasopismo Techniczne, 16-Ś/2005, Wydawnictwo PK, Kraków 2005.

[6] Chmielowski W., *Zastosowania optymalizacji w gospodarce wodnej*, Wydawnictwo PK, Kraków 2005.

[7] Górecki H., *Optymalizacja systemów dynamicznych*, PWN, Warszawa 1993.

[8] Lambor J., *Gospodarka wodna na zbiornikach retencyjnych*, Arkady, Warszawa 1962.

[9] Słota H., *Operacyjne sterowanie retencją wody w zbiornikach z uwzględnieniem stanów końcowych*, Mon. Kom. Gospodarki Wodnej PAN, z. 7, 1995.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ