Laboratorium Podstaw Konstrukcji Maszyn

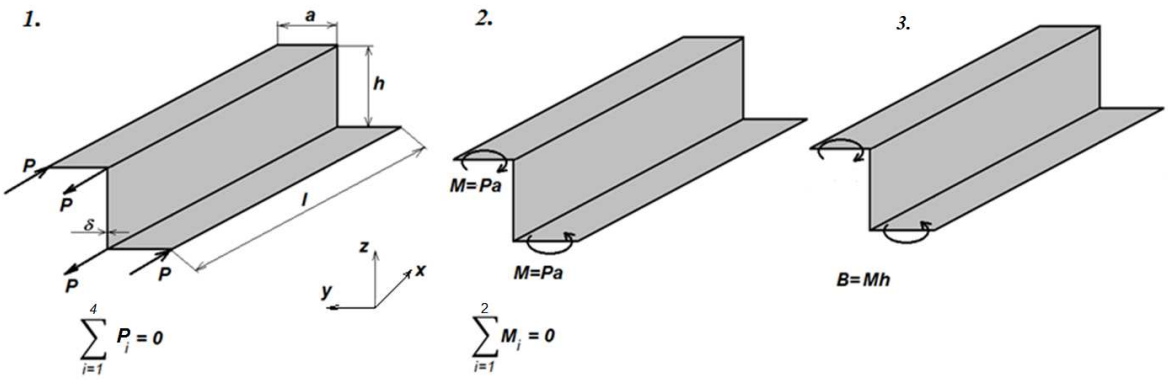
Instytut Konstrukcji Maszyn, Wydział Mechaniczny

Politechnika Krakowska

Analiza stanu mechanicznego prętów cienkościennych na przykładzie zetownika obciążonego bimomentem

Opracował: Marek Sikoń, Tomasz Nowicki

I. **Wymiary i obciążenie badanej konstrukcji**



Rys.1. Rysunek konstrukcji pręta Z-owego wraz z układem sił obciążających.

Z punktu widzenia statyki układ obciążający jak na Rys. 1.1, redukuje się do zera. Ażeby opisać obrót pręta pod działaniem obciążenia wprowadzamy układ równoważny kinematycznie w postaci dwóch przeciwzwrotnych par sił:

$$M = Pa\,, \tag{1}$$

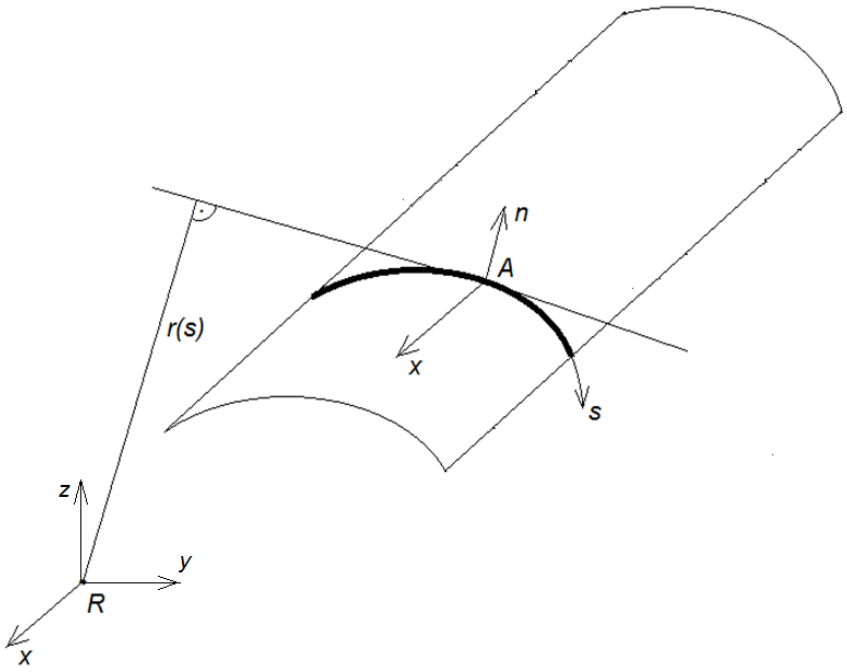
leżących na równoległych płaszczyznach półek i oddalonych o odległość równą wymiarowi środnika h, Rys. 1.2. Taki układ dwóch momentów nazywamy bimomentem B. Znak bimomentu definiujemy względem zwrotu normalnej zewnętrznej przekroju poprzecznego w odniesieniu do układu (x, y, z) i zwrotu momentu M ustalonego względem kierunku obrotu wskazówek zegara jako kierunek dodatni, dla obserwatora stojącego między płaszczyznami działania par. Jeżeli zwroty te są jednakowego znaku to bimoment ma znak dodatni. Wobec powyższego, dla układu momentów jak na Rys. 1.2, zapiszemy:

$$B = Mh\,. \tag{2}$$

II. **Wybrane zależności teorii bimomentowej Własowa** (1961)

1. Definicja pręta cienkościennego: prętem cienkościennym nazywamy konstrukcję której wymiary geometryczne jak grubość, szerokość i długość, różnią się o rząd wielkości.
2. Definicja kinematycznej równoważności układów sił: dwa układy sił przyłożone do pręta cienkościennego nazywać będziemy kinematycznie równoważnymi, jeżeli redukując je do ustalonego punktu ***R*** zwanego środkiem zginania, sztywno związanego z osią środkową przekroju poprzecznego, w taki sposób że drogę redukcji wyznacza lokalny układ sił (*x*, *s*, *n*), otrzymujemy w punkcie ***R*** równość sił, momentów i bimomentów.

Punkt ***R*** nazywany jest również środkiem ścinania, środkiem przekroju poprzecznego lub środkiem sztywności.



Rys. 1. Rysunek ogólny pręta cienkościennego.
(x, y, z) układ prostokątny globalny, (x, s, n) układ krzywoliniowy lokalny, ***R*** – środek zginania, ***r***(s) ramię obrotu dowolnego punktu ***A*** przekroju poprzecznego pręta.

3. Założenia teorii bimomentowej:

   - linia środkowa pręta jest nieograniczenie sztywna w płaszczyźnie prostopadłej do długości pręta, płaszczyzna (y, z) i podatna w kierunku długości pręta, oś x, co umożliwia swobodną deplanację przekroju poprzecznego. Założenie to powoduje że przemieszczenie u_s w kierunku współrzędnej krzywoliniowej s, dowolnego punktu ***A*** leżącego na płaszczyźnie środkowej, Rys. 2, można opisać w postaci sztywnego obrotu o kąt α .
   - powierzchnia środkowa pręta nie wykazuje odkształceń postaciowych w płaszczyźnie (x, s):

$$\gamma_{xs} = 0\,. \tag{3}$$

4. Przemieszczenia u_x , u_s

   Na podstawie pierwszego założenia teorii bimomentowej zapiszemy:

$$u_s = \alpha \cdot r(s)\,. \tag{4}$$

Drugie założenie powiążemy z równaniem Cauchy`ego:

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

i przedstawimy w postaci:

$$\frac{\partial u_x}{\partial s} = -\frac{\partial u_s}{\partial x}. \tag{6}$$

Do wyrażenia (6) podstawimy zależność (4):

$$\frac{\partial u_x}{\partial s} = -\frac{\partial\left[\alpha(x) r(s)\right]}{\partial x}, \tag{7}$$

i licząc pochodna po prawej stronie równania (7) otrzymamy:

$$\frac{\partial u_x}{\partial s} = -\alpha'(x) r(s). \tag{8}$$

Z kolei pomnożymy obydwie strony równania (8) przez ds:

$$\frac{\partial u_x}{\partial s} ds = -\alpha'(x) r(s) ds, \tag{9}$$

i wykonamy całkowanie obustronne względem *s*:

$$\int_0^s \frac{\partial u_x}{\partial s} ds = -\alpha'(x) \int_0^s r(s) ds, \tag{10}$$

otrzymując po podstawieniu zależności definiującej współrzędną wycinkową $\omega(s)$:

$$\int_0^s r(s) ds \overset{df}{=} \omega(s), \tag{11}$$

wyrażenie na przemieszczenie wzdłuż osi *x*:

$$u_x = -\alpha'(x) \omega(s) + C. \tag{12}$$

Stałą C wyznaczymy z warunku brzegowego.

5. Odkształcenie ε_x.
   Do równania Cauchy`ego:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \tag{13}$$

Podstawimy wyrażenie (10) otrzymując:

$$\varepsilon_x = -\alpha''(x)\,\omega(s). \tag{14}$$

Jeżeli odkształcenie wg wzoru (14) spowodowane jest jedynie bimomentem to nazwiemy je odkształceniem wycinkowym i oznaczymy:

$$\varepsilon_\omega = -\alpha''(x)\,\omega(s). \tag{15}$$

6. Naprężenie wycinkowe σ_ω i bimoment B_ω.
   Do zależności wg prawa Hooke`a:

$$\sigma_\omega = \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_\omega, \tag{16}$$

Podstawimy wyrażenie (15) otrzymując:

$$\sigma_\omega(x,s) = -\frac{E}{1-\nu^2}\alpha''(x)\,\omega(s). \tag{17}$$

Równanie (17) pomnożymy obustronnie przez ωdF :

$$\sigma_\omega \omega dF = -\frac{E}{1-\nu^2}\alpha''(x)\,\omega^2 dF, \tag{18}$$

i wykonamy obustronne całkowanie po powierzchni przekroju poprzecznego pręta F :

$$\int_F \sigma_\omega \omega dF = -\int_F \frac{E}{1-\nu^2}\alpha''(x)\,\omega^2 dF. \tag{19}$$

Na podstawie definicji bimomentu:

$$B_\omega \overset{df}{=} \int_F \sigma_\omega \omega dF, \tag{20}$$

oraz definicji wycinkowego momentu bezwładności:

$$J_\omega \overset{df}{=} \int_F \omega^2 dF, \tag{21}$$

zapiszemy wzór na bimoment wyrażony przez druga pochodną kąta α :

$$B_\omega(x) = -\frac{E}{1-\nu^2} J_\omega \alpha''(x). \tag{22}$$

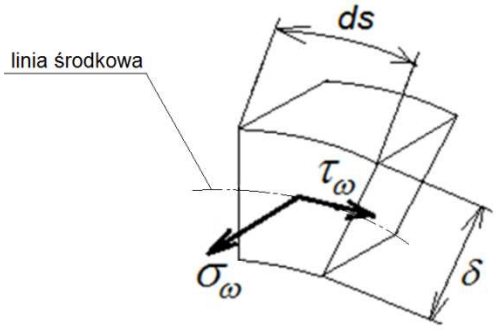
oraz wzór na naprężenie wycinkowe wyrażone przez bimoment:

$$\sigma_\omega(x,s) = \frac{B_\omega(x)}{J_\omega}\omega(s). \tag{23}$$

Wzór (23) można przedstawić w postaci:

$$\sigma_\omega(x,s) = -\frac{E}{1-\nu^2}\omega(s)\alpha''(x). \tag{23a}$$

7. Styczne naprężenie wycinkowe τ_ω i moment giętno-skrętny M_ω.
   Naprężenia wycinkowe związane z elementarną powierzchnią pręta cienkościennego przedstawione są na Rys. 3.



Rys. 3. Naprężenia wycinkowe występujące w pręcie cienkościennym.

Warunek równowagi wewnętrznej:

$$\frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} + \frac{\partial \tau_\omega}{\partial s} = 0, \tag{24}$$

zapiszemy w postaci wyrażenia:

$$\frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_\omega}{\partial s}, \tag{25}$$

z którego wyznaczymy naprężenie styczne:

$$\tau_\omega = -\int_0^s \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial x} ds. \tag{26}$$

Do wyrażenia (26) podstawimy wzór (23) otrzymując:

$$\tau_{\omega} = -\frac{dB_{\omega}}{dx}\frac{1}{J_{\omega}}\int_{0}^{s}\omega(s)\,ds\,. \tag{27}$$

Dalej wykonamy całkowanie obustronne wyrażenia (27) wzdłuż współrzędnej normalnej *n*, po grubości pręta δ, Rys. 2,:

$$\int_{\delta}\tau_{\omega}dn = -\frac{dB_{\omega}}{dx}\frac{1}{J_{\omega}}\int_{F}\omega(s)\,dF\,, \tag{28}$$

gdzie: $dF = \delta ds$. Wobec tego że:

$$\tau_{\omega}(n) = const\,,\ \ \delta = const\,,\ \int_{\delta}\tau_{\omega}dn = \tau_{\omega}\delta\,, \tag{29}$$

zapiszemy:

$$\tau_{\omega} = -\frac{dB_{\omega}}{dx}\frac{1}{J_{\omega}\delta}\int_{F}\omega(s)\,dF\,. \tag{30}$$

Wobec definicji wycinkowego momentu statycznego:

$$S_{\omega} = \int_{F}^{df}\omega(s)\,dF\,, \tag{31}$$

oraz zależności wg prac [1-5]:

$$\frac{dB_{\omega}}{dx} = M_{\omega}\,, \tag{32}$$

zapiszemy wzór (28) w postaci:

$$\tau_{\omega} = -\frac{M_{\omega}S_{\omega}}{J_{\omega}\delta}\,. \tag{33}$$

Wzór (33) można również zapisać w postaci:

$$\tau_{\omega} = -\frac{E}{(1-\nu^{2})\delta}S_{\omega}\alpha'''(x)\,. \tag{33a}$$

8. Zastosowanie **teorii skręcania de Saint Venanta** (1855) do zapisania równania różniczkowego bimomentu.
   Równanie (32) zapiszemy w postaci:

$$B_{\omega}'(x) - M_{\omega}(x) = 0\,. \tag{34}$$

Moment giętno-skrętny $M_{\omega}(x)$ przedstawimy odwołując się do teorii czystego skręcania de Saint Venanta. W teorii tej, podobnie jak w teorii bimomentowej, przekroje pręta nie ulegają odkształceniom postaciowym, natomiast mają możliwość swobodnej deplanacji. Skręcanie pręta spowoduje powstanie stycznych naprężeń liniowych antysymetrycznych. Naprężenia te związane są z momentem $M_s(x)$ którego wartość możemy wyznaczyć z teorii de Saint Venanta:

$$M_s(x) = \theta(x) G J_s = \alpha'(x) G J_s\,, \tag{35}$$

gdzie: $\theta = \alpha'(x)$ to jednostkowy kąt skręcenia, G to moduł sprężystości poprzecznej, J_s to moment bezwładności przy skręcaniu. Wobec braku obciążenia pręta w postaci zewnętrznego momentu skręcającego $M_x = 0$, warunek równowagi dla momentów pochodzących od sił zewnętrznych i wewnętrznych sprowadzi się do równania:

$$M_{\omega}(x) + M_s(x) = 0\,. \tag{35a}$$

Łącząc (35) i (35a) otrzymujemy:

$$M_{\omega}(x) = -\alpha'(x) G J_s\,. \tag{35b}$$

Zapiszemy pochodną względem *x* momentu M_{ω} wyrażonego wzorem (35b):

$$M_{\omega}'(x) = \alpha''(x) G J_s\,, \tag{36}$$

gdzie drugą pochodną kąta skręcenia obliczymy ze wzoru (22):

$$\alpha''(x) = -\frac{(1-\nu^2)}{E J_{\omega}} B_{\omega}(x)\,, \tag{37}$$

i teraz wzór (36) zapiszemy w postaci:

$$M_{\omega}'(x) = \frac{(1-\nu^2) G}{E} \frac{J_s}{J_{\omega}} B_{\omega}(x)\,. \tag{38}$$

Różniczkując równanie (34) względem *x*:

$$B_{\omega}''(x) - M_{\omega}'(x) = 0\,, \tag{39}$$

oraz podstawiając do (39) zależność (38) otrzymujemy równanie różniczkowe bimomentu:

$$B_\omega''(x) - \frac{(1-\nu^2)G}{E}\frac{J_s}{J_\omega}B_\omega(x) = 0\,. \tag{40}$$

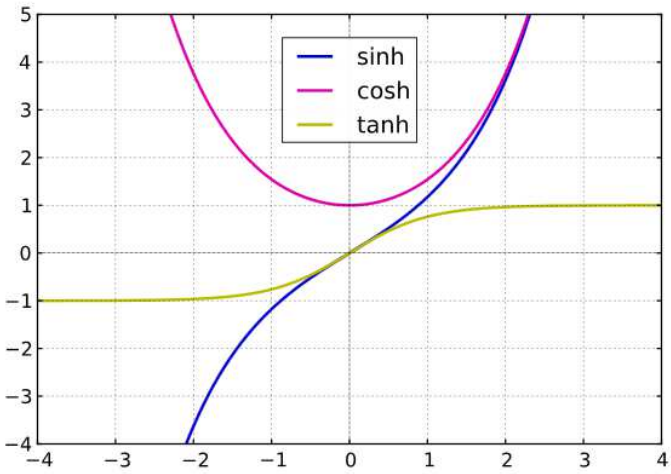
Rozwiązanie równania (40) zapiszemy w postaci:

$$B_\omega(x) = C_1 \sinh \beta x + C_2 \cosh \beta x\,, \tag{41}$$

gdzie:

$$\beta = \frac{(1-\nu^2)G}{E}\frac{J_s}{J_\omega}\,. \tag{42}$$

Wykresy funkcji hiperbolicznych przedstawione są na Rys. 4.



Rys. 4. Funkcje hiperboliczne.

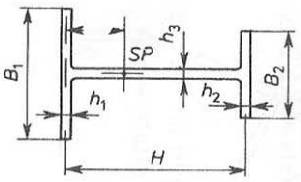
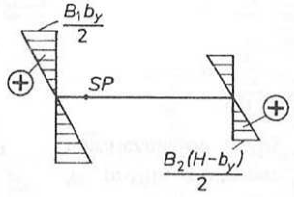
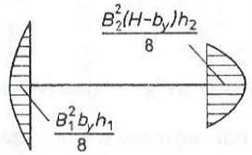
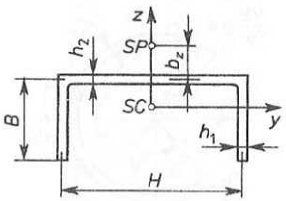
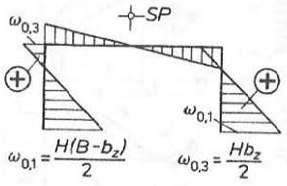
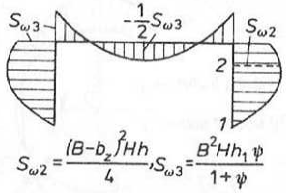
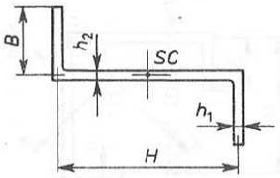
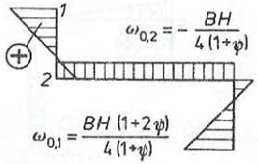
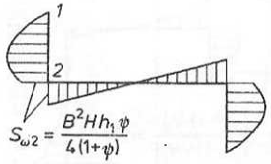
Stałe C_1 i C_2 wyznaczymy z warunków brzegowych:

$$x = 0, \quad B_\omega(x) = Mh\,, \tag{43}$$

$$x = l, \quad B_\omega(x) = 0\,. \tag{44}$$

9. Wzory na charakterystyki geometryczne wybranych prętów przedstawione są w Tabeli 1, [2].

Tabela 1

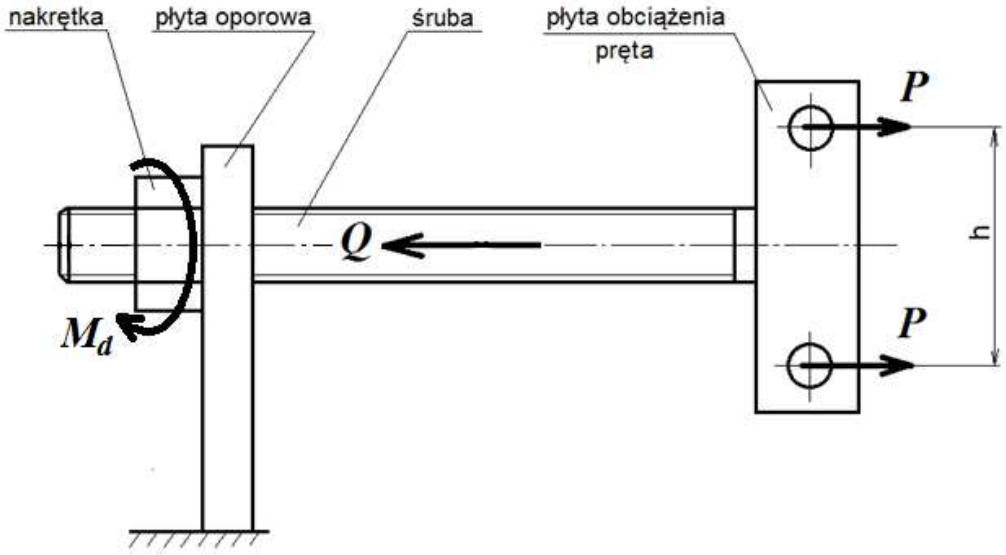
Przekrój	Położenie SP	Obraz pola ω_0	Obraz momentu S_ω	Moment J_ω
	$b_y = \frac{H}{1+\psi}$, $\psi = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^3 \frac{h_1}{h_2}$			$J_\omega = \frac{B_1^3 H^2 h_1}{12(1+\psi)}$
	$b_z = \frac{B}{2(1+\psi)}$, $\psi = \frac{Hh_2}{6Bh_1}$			$J_\omega = \frac{B^2 H^2 (B-3b_z) h_1}{6} + I_z b_z^2$
	$SP \equiv SC$, $\psi = \frac{Hh_2}{2Bh_1}$			$J_\omega = \frac{B^3 H^2 h_1}{12} \times$ $\times \left[2 - \frac{3\psi}{(1+\psi)^2}\right]$

III. **Obciążenie pręta**.

Obciążenie pręta realizowane jest przez układ śruba-nakrętka, Rys. 4. Moment M_d przyłożony do nakrętki opisujemy wzorem:

$$M_d = Q\left(\frac{d_2}{2} tg\left(\gamma + \rho'\right) + \frac{S + d_o}{4}\mu\right), \tag{45}$$

gdzie: Q to siła w śrubie, d_2 to średnia średnica gwintu, γ to kąt pochylenia gwintu, ρ' to pozorny kąt tarcia na gwincie, S to wymiar pod klucz do dokręcania nakrętki, d_o to średnica otworu w płycie oporowej, μ to współczynnik tarcia pomiędzy nakrętką i płytą oporową.



Rys. 4. Układ obciążający pręt.

W układzie obciążającym pręta jak na Rys. 4, zastosowano śrubę M10. Dla śruby M10 odczytane parametry z Poradnika Mechanika [5] są następujące:

$$\begin{aligned} d_2 &= 9,26 \text{ mm}, \\ P &= 1,5 \text{ mm}, \\ S &= 17 \text{ mm}, \\ d_o &= 10,5 \text{ mm}, \\ \alpha &= 60^o. \end{aligned} \tag{46}$$

Kąt γ oraz ρ' liczymy wg wzorów:

$$\gamma = arctg\frac{P}{\pi d_2}, \tag{47}$$

$$\rho' = arctg\frac{\mu}{\cos\beta}. \tag{48}$$

Współczynnik tarcia na gwincie μ przyjmujemy taki sam jak pomiędzy powierzchnią czołową nakrętki i płytą oporową wg Poradnika Mechanika [5] dla powierzchni trących „stal po stali" $\mu = 15 \div 17$.

Zadania do wykonania:

1. Dla zmierzonego momentu M_d oraz parametrów geometrycznych gwintu M10 obliczyć siłę ***Q*** na śrubie i dalej siły ***P*** obciążające pręt jak na Rys.1.
2. Wyznaczyć środek zginania R wg definicji: biegun $R(p, q)$ o współrzędnych $y = p, z = q$ dla którego zerują się wycinkowe momenty odśrodkowe:

$$J_{\omega y} = \int_F^{df} \omega(s)\, y(s) dF = 0, \tag{49}$$

$$J_{\omega z} = \int_F^{df} \omega(s)\, z(s) dF = 0, \tag{50}$$

jest środkiem zginania pręta cienkościennego. Po wykonaniu działań wg wzorów (49), (50) otrzymujemy:

$$p = -\frac{\int_F \omega_o(s_o)\, z(s_o) dF}{J_y}, \tag{51}$$

$$q = \frac{\int_F \omega_o(s_o)\, y(s_o) dF}{J_z}, \tag{52}$$

gdzie: s_o to tzw. punkt zerowej współrzędnej wycinkowej.

Punk (0) dla którego wycinkowy moment statyczny równa się zero nazywamy głównym punktem zerowej współrzędnej wycinkowej. Punkt ten znajdujemy licząc w pierwszej kolejności wycinkowy moment statyczny względem dowolnego bieguna (np. środka symetrii przekroju), dalej przesuwamy początek sumowania aby spełniony był warunek zerowania się wycinkowego momentu statycznego:

$$S_{\omega} \overset{df}{=} \int_{F} \omega(s)\, dF = S_{\omega}(s_o) - \omega(0)\, F = 0, \tag{53}$$

dla nowej współrzędnej wycinkowej:

$$\omega(s) = \omega(s_o) - \omega(0). \tag{54}$$

Czyli znajdujemy wg (53) taki punkt (0) dla którego wycinkowy moment statyczny jest równy zero:

$$\omega(0) = \frac{\int_{F} \omega(s_o) dF}{F} = \frac{S_{\omega}(s_o)}{F}. \tag{55}$$

3. Obliczyć charakterystyki geometryczne przekroju dla skręcania J_s wg wzoru:

$$J_s = \frac{1}{3} \sum_{1}^{n} b_i^3 c_i, \quad b_i \le c_i, \tag{56}$$

oraz J_{ω} wg Tabeli 1 i wyznaczyć funkcję bimomentu $B_{\omega}(x)$ wg wzoru (41) oraz warunków brzegowych (43) i (44). Stałe materiałowe przyjąć dla stali:

$$\begin{aligned} &E = 2{,}1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \\ &G = 80 \cdot 10^3 \text{ MPa}, \\ &\nu = 0{,}3. \end{aligned} \tag{57}$$

4. Dla wyznaczonego metodą teoretyczną bimomentu $B_{\omega}(x)$ obliczyć naprężenia wycinkowe σ_{ω} wg wzoru (23) oraz τ_{ω} wg wzoru (33). Charakterystyki geometryczne obliczyć wg wzorów w Tabeli 1, dla punktów przekroju 1 i 2.
5. Wykonać pomiar kąta obrotu pręta kątomierzem zaopatrzonym w poziomicę, w wybranych przekrojach pręta wzdłuż długości pręta, (oś *x*) i wyznaczyć funkcję $\alpha(x)$. Zróżniczkować dwukrotnie funkcję $\alpha(x)$ i obliczyć bimoment wg wzoru (22) naprężenie wycinkowe σ_{ω} wg wzoru (23a) oraz po trzykrotnym zróżnicowaniu funkcji $\alpha(x)$ obliczyć naprężenie τ_{ω} wg wzoru (33a) dla wybranych punktów przekroju 1 i 2 wg Tabeli 1.
6. Porównać wyniki otrzymane wg metody teoretycznej i doświadczalnej.

Pytania do zaliczenia:

1. Definicja pręta cienkościennego.
2. Założenia teorii bimomentowej.
3. Definicja bimomentu (wartość, znak).
4. Jak wyznaczamy środek zginania pręta $\boldsymbol{R}$.
5. Definicja współrzędnej wycinkowej, wycinkowego momentu statycznego i wycinkowego momentu bezwładności.
6. Jak obliczamy moment giętno-skrętny.
7. Jak obliczamy naprężenie wycinkowe normalne i styczne.
8. Przedstaw sposób zapisania równania różniczkowego bimomentu, zapisz jego rozwiązanie i oblicz stałe całkowania dla badanego pręta.
9. Uzasadnij dlaczego parametrem pomiarowym jest kąt obrotu pręta.

Literatura:

[1] Piechnik S., Pręty cienkościenne, podstawy teorii i przykłady, Politechnika Krakowska 1992.

[2] Brzoska Z., Mechanika prętów cienkościennych, Mechanika Techniczna pod redakcją Michała Życzkowskiego, Polska Akademia Nauk, Komitet Mechaniki, PWN, 1988.

[3] Krzyś W., Życzkowski M., Sprężystość i plastyczność, PWN, Warszawa 1962.

[4] Obrębski J. B., Sprężystość cienkościennych prętów prostych, Uniwersytet Warszawski, Warszawa 1991.

[5] Sikoń M., Bimomentowa Mechanika Eksperymentalna, Konstrukcje cienkościenne w budownictwie, Polski Oddział Międzynarodowego Stowarzyszenia Konstrukcji Przestrzennych i Powłok, Warszawa - Kraków, 1 grudzień, 2000.

[6] Poradnik Mechanika, tom II, Wydawnictwo Naukowo Techniczne, 1984.