

MARIA SAMBORSKA*

APROKSYMACJA ROZWIĄZAŃ OKRESOWYCH
NIELINIOWYCH RÓWNAŃ OBWODÓW
ELEKTRYCZNYCH METODĄ POINCARÉGO-LINDSTEDTAPOINCARÉ-LINDSTEDT METHOD FOR APPROXIMATING
PERIODIC SOLUTIONS OF NONLINEAR CIRCUIT
EQUATIONS

Streszczenie

W artykule zaprezentowano metodę Poincarégo-Lindstedta pozwalającą na aproksymację rozwiązań okresowych równań różniczkowych opisujących nieliniowe obwody elektryczne. Przeprowadzono analizę dokładności rozwiązania uzyskiwanego w wyniku zastosowania opisanej metody. Przedstawiono zastosowanie metody na przykładzie równania van der Pola, a następnie uzyskane wyniki porównano z rozwiązaniami otrzymanymi na drodze analizy numerycznej.

Słowa kluczowe: metoda Poincarégo-Lindstedta, analiza układów elektrycznych, układy dynamiczne, równanie van der Pola

Abstract

This paper presents the Poincaré-Lindstedt method for approximating periodic solutions of nonlinear circuit equations. An accuracy analysis is done for an approximation obtained by applying this method. An application of described method to the van der Pol equation is also covered and the results are compared with numerical solutions.

Keywords: Poincaré-Lindstedt method, electric circuits analysis, dynamical systems, van der Pol equation

* Mgr Maria Samborska, Katedra Automatyki i Technik Informacyjnych, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Jednym z istotnych elementów analizy układów elektrycznych jest wyznaczanie przebiegów okresowych sprowadzające się do znalezienia okresowego rozwiązania równania różniczkowego. W przypadku równań nieliniowych przy rozwiązywaniu tego problemu mogą pojawić się spore trudności. Zagadnienia, w których analityczne wyznaczenie rozwiązania nie jest możliwe, można oczywiście rozwiązać, stosując metody numeryczne pozwalające przybliżać poszukiwane rozwiązania, jednak w pewnych przypadkach korzystne okazuje się znalezienie wzoru funkcji będącej rozwiązaniem równania lub przybliżającej to rozwiązanie, co można osiągnąć, wykorzystując różnorodne techniki analityczne. W niniejszym artykule opisano jedną z metod perturbacyjnych znaną pod nazwą metody Poincarégo-Lindstedta. Pierwotna wersja części materiału zawartego w artykule została zaprezentowana w [8].

Metoda będąca przedmiotem tej pracy w swojej nazwie łączy nazwiska dwóch matematyków, gdyż opiera się równocześnie na twierdzeniu Henriego Poincarégo oraz na schemacie postępowania przy rozwiązywaniu równań różniczkowych zaproponowanym przez Andersa Lindstedta. Była to jedna z pierwszych technik pozwalających znaleźć rozwiązania okresowe równań różniczkowych, jednak ze względu na trudność w implementacji i wynikającą z niej konieczność wielokrotnego powtarzania żmudnych operacji matematycznych, została zastąpiona przez metody lepiej dostosowane do możliwości prowadzenia obliczeń maszynowych. Wśród nich powszechnie znane są metody oparte na szeregach Voltairiego, Fouriera, metody ekstrapolacyjne i metody oparte na cyklach iteracyjnych Newtona [9, 10]. Jednak istnieją problemy, w których tytułowa metoda nadal pozwala osiągnąć jedne z najlepszych wyników, zwłaszcza w sytuacjach, w których proste metody perturbacyjne nie radzą sobie z rosnącymi nieograniczenie składnikami wyższych rzędów. Obecnie, dzięki środowiskom umożliwiającym dokonywanie obliczeń symbolicznych, takim jak Maple, Matlab czy Mathematica, metoda Poincarégo-Lindstedta może być z powodzeniem implementowana. Na uwagę zasługuje przedstawiona w [4, 5] propozycja stworzenia specjalnego pakietu usprawniającego obliczenia symboliczne prowadzone podczas wykonywania kolejnych iteracji.

Metoda Poincarégo-Lindstedta opiera się na następującym rozumowaniu: jeżeli funkcja będąca prawą stroną równania:

$$x'(t) = f(t, x(t), \varepsilon) \quad (1)$$

gdzie $\varepsilon \geq 0$ jest niewielkim parametrem, rozwija się w szereg potęgowy względem ε , wówczas można przypuszczać, że także rozwiązanie tego zagadnienia rozwija się w szereg potęgowy względem tego parametru – jest to tzw. formalne rozwinięcie rozwiązania. Wstawiając to rozwinięcie, zawierające na początku nieznaną stałą, do równania (1), a następnie porównując współczynniki przy tych samych potęgach ε , otrzymuje się szereg potęgowy, który przy odpowiednich warunkach nałożonych na równanie jest zbliżony do poszukiwanego rozwiązania. Wybierając odpowiednią liczbę początkowych wyrazów otrzymanego szeregu, otrzymuje się wzór funkcji, która może być dobrym przybliżeniem tego rozwiązania.

W rozdziale 2 niniejszego artykułu zawarto opis metody Poincarégo-Lindstedta dla równań różniczkowych pewnego typu, który opracowany został na podstawie [2, 11]. W rozdziale 3 zaprezentowano zastosowanie tytułowej metody do analizy przykładowego obwodu elektrycznego. Równanie opisujące ten obwód, znane jako równanie van der Pola, należy

do klasy równań zwanych oscylatorami relaksacyjnymi. Pod tą nazwą kryją się równania o ciekawej własności – w dziedzinie ich rozwiązań pojawiają się na zmianę długie przedziały, na których wartości rozwiązania zmieniają się nieznacznie oraz krótkie przedziały, na których następują bardzo duże zmiany tych wartości. Równanie van der Pola ma rozwiązanie okresowe, co umożliwiło zastosowanie do jego analizy metody Poincarégo-Lindstedta. Tym sposobem zostały wyznaczone przybliżenia poszukiwanego rozwiązania dla różnych wartości parametrów równania i z różną dokładnością, a następnie analitycznie otrzymane wyniki zostały porównane z numerycznie wygenerowanymi trajektoriami układu.

Wszelkie pojęcia oraz twierdzenia związane z teorią równań różniczkowych i układów dynamicznych stosowane w niniejszym artykule zostały szczegółowo opisane w [6, 7].

2. Metoda Poincarégo-Lindstedta

W niniejszym rozdziale przedstawiono metodę Poincarégo-Lindstedta dla równań różniczkowych w postaci:

$$x'' + x = \varepsilon(f(x, x', \varepsilon) + h \cos \omega t) \quad (2)$$

gdzie wszystkie parametry występujące w równaniu są dodatnie, wartość ω jest bliska 1 oraz spełnione są założenia twierdzenia Poincarégo o rozwijaniu w szereg.

2.1. Wyprowadzenie metody

Łatwo zauważyć, że dla $\varepsilon = 0$ wszystkie rozwiązania równania (2) są kombinacjami funkcji $\cos t$ i $\sin t$ o okresie 2π . Można zatem założyć, że dla małych wartości ε istnieje rozwiązanie okresowe tego równania o okresie $2\pi/\omega$. Po wprowadzeniu nowej zmiennej czasowej τ zdefiniowanej wzorem:

$$\tau = \omega t \quad (3)$$

oraz parametru ψ zależnego od ε , opisanego zależnością:

$$\omega^{-2} = 1 - \varepsilon\psi \quad (4)$$

równanie (2) przyjmuje postać:

$$x'' + x = \varepsilon g(x, x', \tau, \varepsilon, \psi) \quad (5)$$

gdzie:

$$g(x, x', \tau, \varepsilon, \psi) = \beta x + (1 - \varepsilon\beta)(f(x, (1 - \varepsilon\beta)^{-1/2} x', \varepsilon) + h \cos(\tau - \psi)) \quad (6)$$

Z powyższych rozważań wynika, że poszukiwane rozwiązanie okresowe równania (2), będące funkcją zmiennej t o okresie $2\pi/\omega$, jest tożsame z rozwiązaniem okresowym równania (5), będącym funkcją zmiennej τ o okresie 2π . Zatem wyjściowy problem sprowadza się do znalezienia 2π -okresowego rozwiązania równania (5). Można przyjąć, że rozwiązanie to spełnia warunki początkowe:

$$x(0) = a(\varepsilon), \quad x'(0) = 0 \quad (7)$$

przy czym $a(\varepsilon)$ jest nieznane, a poprawność drugiego warunku wynika z faktu, że pierwsza pochodna dowolnego nietrywialnego rozwiązania okresowego znika przynajmniej dla dwóch argumentów w każdym okresie. Korzystając z metody uziemienniania stałych, wykazać można, że poszukiwane rozwiązanie spełnia poniższe równania całkowe:

$$x(\tau) = a(\varepsilon) \cos \tau + \varepsilon \int_0^\tau \sin(\tau - u) g(x(u), x'(u), u, \varepsilon, \psi) du \quad (8)$$

$$x'(\tau) = -a(\varepsilon) \sin \tau + \varepsilon \int_0^\tau \cos(\tau - u) g(x(u), x'(u), u, \varepsilon, \psi) du \quad (9)$$

przy czym równanie (9) otrzymano przez zróżniczkowanie stronami równania (8). Po wstawieniu powyższych zależności do warunków 2π -okresowości:

$$x(\tau) = x(\tau + 2\pi), \quad x'(\tau) = x'(\tau + 2\pi) \quad (10)$$

otrzymujemy dwa niezależne warunki konieczne 2π -okresowości rozwiązania równania (5):

$$\int_0^{2\pi} \sin u g(x(u), x'(u), u, \varepsilon, \psi) du = 0 \quad (11)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos u g(x(u), x'(u), u, \varepsilon, \psi) du = 0 \quad (12)$$

Poszukiwane rozwiązanie $x(\tau)$ zagadnienia (5) zależy od wartości ε , $a(\varepsilon)$ oraz $\psi(\varepsilon)$. Zauważyliśmy wcześniej, że dla $\varepsilon = 0$ wszystkie rozwiązania tego zagadnienia są 2π -okresowe. Oznacza to, że dla $\varepsilon = 0$, $a(0)$ i $\psi(0)$ spełnione są warunki (11) i (12), co przy oznaczeniu lewych stron tych równań odpowiednio przez $f_1(\varepsilon, a, \psi)$ oraz $f_2(\varepsilon, a, \psi)$ można zapisać za pomocą równości:

$$f_1(0, a(0), \psi(0)) = 0, \quad f_2(0, a(0), \psi(0)) = 0 \quad (13)$$

Z (13) oraz twierdzenia o funkcji uwikłanej wynika, że funkcje $a(\varepsilon)$ oraz $\psi(\varepsilon)$ są określone jednoznacznie w pewnym otoczeniu $\varepsilon = 0$, o ile zachodzi warunek:

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(a, \psi)}(0, a(0), \psi(0)) \neq 0 \quad (14)$$

Wówczas istnieje rozwiązanie 2π -okresowe równania (5) o rozwinięciu:

$$x(\tau) = a(0) \cos \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma_n(\tau) \quad (15)$$

gdzie γ_n są 2π -okresowymi funkcjami zmiennej τ . Ponadto funkcje $a(\varepsilon)$ oraz $\psi(\varepsilon)$ rozwijają się w szeregi potęgowe zgodnie ze wzorami:

$$a(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n a_n, \quad \psi(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \psi_n \quad (16)$$

przy czym łatwo zauważyć, że $a_0 = a(0)$ oraz $\psi_0 = \psi(0)$.

2.2. Stosowanie metody

W praktyce, w celu zastosowania metody Poincarégo-Lindstedta, bez sprawdzania warunku (14) zakłada się, że x , a i ψ rozwijają się w przedstawione w (15) i (16) szeregi. Po wstawieniu tych rozwinięć do równania (5) wystarczy porównać wyrazy przy odpowiednich potęgach ε , otrzymując przy każdym porównaniu równanie różniczkowe drugiego rzędu w postaci:

$$\gamma_n'' + \gamma_n = \Phi(\tau, a_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}) \quad (17)$$

z warunkami początkowymi

$$\gamma_n(0) = a_n, \quad \gamma_n'(0) = 0 \quad (18)$$

Nieznane parametry występujące w powyższym zagadnieniu znajduje się, nakładając na nie warunki 2π -okresowości wyznaczone w podobny sposób jak dla zagadnienia (5). Po znalezieniu przybliżenia rozwiązania $x(\tau)$ zadaną dokładnością, należy powrócić do wyjściowej zmiennej t zgodnie ze wzorem (3).

2.3. Dokładność metody

Z zależności (4) wynika, że ω rozwija się w szereg potęgowy zbieżny w pewnym otoczeniu ε zgodnie ze wzorem:

$$\omega = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n \quad (19)$$

Przy oznaczeniach

$$x_N(\tau) = a_0 \cos \tau + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \gamma_n(\tau), \quad \tau_N = \left(1 + \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \omega_n\right) t \quad (20)$$

przybliżenie rozwiązania okresowego $x(\tau)$ równania (5) uzyskane po M iteracjach metody Poincarégo-Lindstedta, w których zmienna τ przybliżona została za pomocą zmiennej τ_N , oznaczyć można symbolem $x_M(\tau_N)$. Prawdziwa jest poniższa nierówność:

$$\|x(\tau) - x_M(\tau_N)\| \leq \|x(\tau) - x(\tau_N)\| + \|x(\tau_N) - x_M(\tau_N)\| \quad (21)$$

Z ciągłości i różniczkowalności funkcji $x(\tau)$, będącej rozwiązaniem równania (5) wynika, że dla niewielkich wartości ε spełnia ona warunek Lipschitza z pewną dodatnią stałą L . Stąd:

$$\|x(\tau) - x(\tau_N)\| \leq L |\tau - \tau_N| = L \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n \right| t = O(\varepsilon^{N+1} t) \quad (22)$$

Ponadto:

$$\|x(\tau_N) - x_M(\tau_N)\| = \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma_n(\tau_N) \right| = O(\varepsilon^{M+1}) \quad (23)$$

Z przeprowadzonej analizy wynika, że prawdziwe jest oszacowanie:

$$\|x(\tau) - x_M(\tau_N)\| = O(\varepsilon^{N+1} t) + O(\varepsilon^{M+1}) \quad (24)$$

a w szczególności dla $M = N$:

$$\|x(\tau) - x_N(\tau_N)\| = O(\varepsilon^{N+1}) \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq T \quad (25)$$

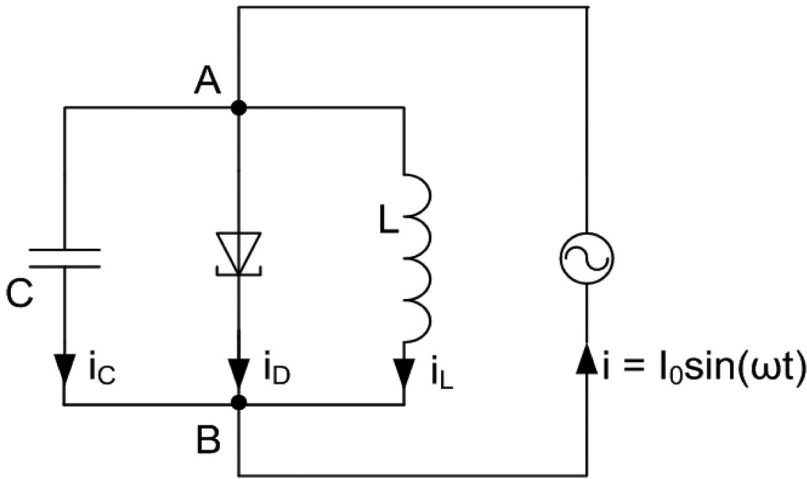
gdzie T oznacza długość okresu rozwiązania $x(\tau)$. W celu wydłużenia (dla $\varepsilon < 1$) przedziału, na którym powyższe oszacowanie jest prawdziwe, należy zmniejszyć wartość stałej M względem N dla przybliżenia $x_M(\tau_N)$. Dla $M = N - 1$ oraz $M = N - 2$ prawdziwe są zależności:

$$\|x(\tau) - x_{N-1}(\tau_N)\| = O(\varepsilon^N) \quad \text{dla} \quad 0 \leq \varepsilon t \leq T \quad (26)$$

$$\|x(\tau) - x_{N-2}(\tau_N)\| = O(\varepsilon^{N-1}) \quad \text{dla} \quad 0 \leq \varepsilon^2 t \leq T \quad (27)$$

3. Przykład zastosowania

Poniżej przedstawiono zastosowanie metody opisanej w rozdziale 2 do analizy obwodu elektrycznego, którego schemat znajduje się na rys. 1. Obwód ten został dobrany tak, by w przejrzysty sposób zaprezentować na jego przykładzie opisaną metodę.



Rys. 1. Obwód elektryczny opisany równaniem van der Pola

Fig. 1. An electrical circuit for the van der Pol equation

Wybrany obwód składa się ze źródła prądu sinusoidalnego o amplitudzie I_0 i pulsacji ω oraz połączonych równolegle kondensatora o pojemności C , cewki o indukcyjności L oraz diody tunelowej, której charakterystykę dobrze przybliża funkcja:

$$i_D(t) = \alpha u^3(t) - \beta u(t) \quad (28)$$

gdzie α i β są dodatnimi stałymi. Równanie opisujące ten obwód ma zatem postać:

$$C \frac{du(t)}{dt} + \alpha u^3(t) - \beta u(t) + \frac{1}{L} \int_0^t u dt = I_0 \sin \omega t \quad (29)$$

Po zróżniczkowaniu stronami równania (29) i dokonaniu zamiany zmiennych zgodnie ze wzorami:

$$\tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad x(\tilde{t}) = u(\tilde{t}) \sqrt{\frac{3\alpha}{\beta}} \quad (30)$$

Równanie to można zapisać w postaci:

$$x'' + x = \sqrt{\frac{L}{C}}\beta(1-x^2)x' + I_0L\omega\sqrt{\frac{3\alpha}{\beta}}\cos\omega\sqrt{LC}\tilde{t} \quad (31)$$

Po wprowadzeniu trzech parametrów:

$$\mu = \sqrt{\frac{L}{C}}\beta, \quad h = \frac{I_0L\omega\sqrt{3CL\alpha}}{\beta^{3/2}}, \quad \tilde{\omega} = \omega\sqrt{CL} \quad (32)$$

równanie (31) przyjmuje postać:

$$x'' + x = \mu((1-x^2)x' + h\cos\tilde{\omega}\tilde{t}) \quad (33)$$

Otrzymane równanie nosi nazwę równania van der Pola, a jego analiza przeprowadzona w [1, 3] pozwala stwierdzić, że dla dodatnich wartości parametrów μ , h i $\tilde{\omega}$ posiada ono dokładnie jedno nietrywialne, stabilne rozwiązanie okresowe. Ze względu na postać równania (33), możliwe jest zastosowanie do niego metody Poincarégo-Lindstedta.

Analogicznie do rozumowania przeprowadzonego w rozdziale 2, w pierwszej kolejności należy wprowadzić do równania (33) stałą β oraz zmienne ψ i τ , spełniające zależności:

$$\tau = \tilde{\omega}\tilde{t}, \quad \tilde{\omega}^{-2} = 1 - \mu\psi \quad (34)$$

w wyniku czego przyjmuje ono postać:

$$x'' + x = \mu(\beta x + (1-\mu\beta)^{1/2}(1-x^2)x' + h(1-\mu\beta)\cos(\tau-\psi)) \quad (35)$$

Po nałożeniu warunków początkowych opisanych równościami:

$$x(0) = a(\mu), \quad x'(0) = 0 \quad (36)$$

oraz zastąpieniu zmiennych a , ψ i τ ich rozwinięciami w szeregi potęgowe względem μ :

$$a(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n a_n, \quad \psi(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \psi_n, \quad x(\tau) = a(0)\cos\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \gamma_n(\tau) \quad (37)$$

w równaniu (35) pojawiają się niewygodne wyrażenia:

$$(1-\mu\beta)^{1/2}, \quad \cos\left(\tau - \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \psi_n\right) \quad (38)$$

które w celu ułatwienia dalszej analizy można rozwinąć w szeregi Maclaurina zgodnie ze wzorami:

$$(1-y)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{16}y^3 - \dots, \quad (39)$$

$$\cos(c-y) = \cos c + y \sin c - \frac{1}{2}y^2 \cos c - \frac{1}{6}y^3 \sin c + \dots, \quad (40)$$

otrzymując równanie równoważne (35), w którym występują potęgi μ o wykładnikach wyłącznie całkowitych. Następnym etapem jest porównanie wyrazów występujących przy kolejnych potęgach μ w tym równaniu. Wynikiem porównania wyrazów przy pierwszej potęgde μ jest równanie:

$$\gamma_1'' + \gamma_1 = \beta a_0 \cos \tau - a_0(1 - a_0^2 \cos^2 \tau) \sin \tau + h \cos(\tau - \psi_0) \quad (41)$$

które po skorzystaniu ze wzoru na cosinus różnicy kątów można zapisać w postaci:

$$\gamma_1'' + \gamma_1 = \beta a_0 \cos \tau - a_0(1 - a_0^2 \cos^2 \tau) \sin \tau + h \cos \tau \cos \psi_0 + h \sin \tau \sin \psi_0 \quad (42)$$

Wyznaczone analogicznie do (11), (12) warunki 2π -okresowości rozwiązania powyższego równania mają postać układu równań:

$$\begin{cases} -a_0 + \frac{1}{4}a_0^3 + h \sin \psi_0 & = 0 \\ \beta a_0 + h \cos \psi_0 & = 0 \end{cases} \quad (43)$$

z którego wyznaczyć można stałe a_0 i ψ_0 o ile jacobian tego układu jest niezerowy. W przeciwnym wypadku można jedynie zastąpić jedną ze stałych funkcją drugiej z nich, natomiast ich konkretne wartości wyznaczone zostaną w kolejnych iteracjach. W większości przypadków układ (43) jest trudny lub niemożliwy do rozwiązania w sposób analityczny, należy więc, korzystając z metod numerycznych, wyznaczyć poszukiwane stałe z zadaną dokładnością. Jeśli rozważany jacobian jest niezerowy, to otrzymane przybliżenie poszukiwanego rozwiązania okresowego ma postać:

$$x(t) = a_0 \cos(\omega t + \psi_0) + O(\mu) \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq T \quad (44)$$

W celu znalezienia kolejnego wyrazu rozwinięcia funkcji $x(\tau)$, należy wstawić do równania (42) otrzymane wartości a_0 i ψ_0 , a następnie, nakładając na nie warunki początkowe w postaci:

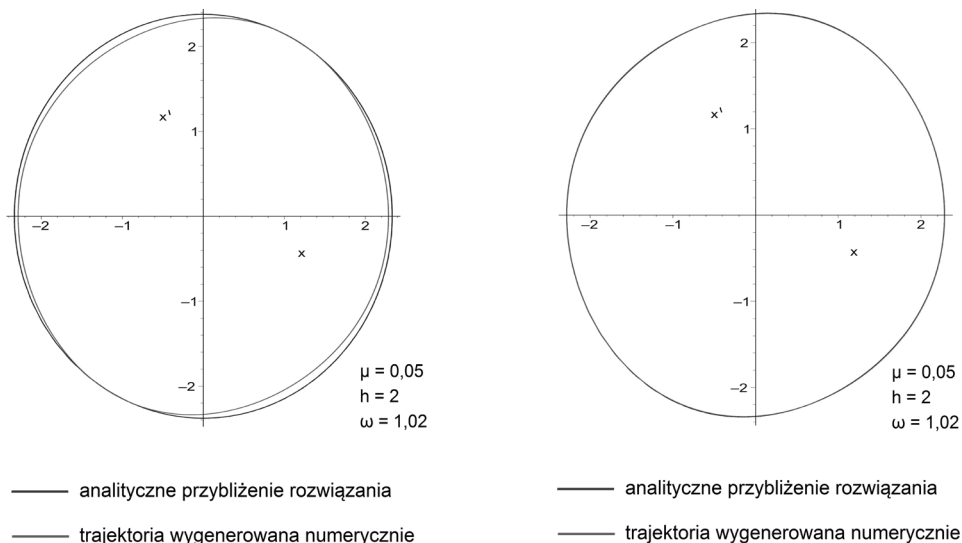
$$\gamma_1(0) = a_1, \quad \gamma_1'(0) = 0 \quad (45)$$

rozwiązać to równanie. Rozwiązaniem jest funkcja $\gamma_1(\tau)$, we wzorze której występuje nieznana stała a_1 . Zwiększenie dokładności rozwinięcia w szereg stałej ψ powoduje pojawienie się kolejnej nieznannej stałej ψ_1 . Obie stałe zostają wyznaczone przez nałożenie warunków 2π -okresowości na rozwiązanie równania otrzymanego w wyniku porównania wyrazów rozważanego równania występujących przy μ^2 . Jeśli stałe dają się wyznaczyć, tj. jeśli odpowiedni jacobian nie zeruje się, to poszukiwane rozwiązanie okresowe można opisać wzorem:

$$x(t) = a_0 \cos(\omega t + \psi_0 + \mu\psi_1) + \gamma_1(\omega t + \psi_0 + \mu\psi_1) + O(\mu^2) \quad \text{dla } 0 \leq t \leq T \quad (46)$$

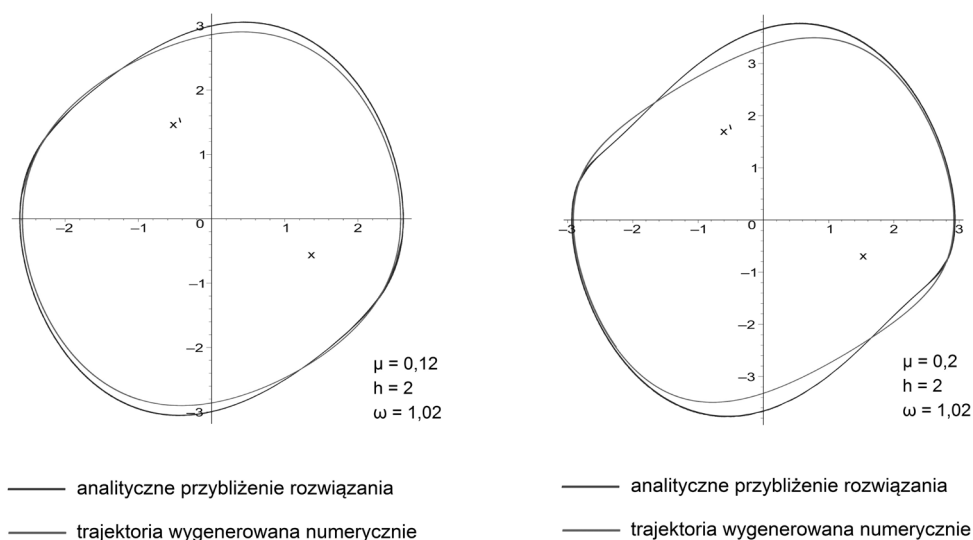
Kontynuując to postępowanie, można przybliżać poszukiwane rozwiązanie $x(t)$ z coraz większą dokładnością.

Poniżej przedstawiono rezultaty otrzymane w wyniku implementacji metody do równania (33) z różnymi wartościami parametrów. Obliczono przybliżenia rozwiązania okresowego z dokładnością $O(\mu)$ oraz $O(\mu^2)$. Układy równań algebraicznych odpowiadające warunkom 2π -okresowości zostały rozwiązane numerycznie z dokładnością do dziesięciu cyfr za pomocą programu Maple 10. Na rys. 2 i 3 przedstawiono rzuty wyznaczonych przybliżeń $\tilde{x}(t)$ poszukiwanego rozwiązania na płaszczyznę fazową oraz numerycznie wygenerowane trajektorie równania (33) startujące z punktu o współrzędnych $(\tilde{x}(0), \tilde{x}'(0))$. Przesunięcie w fazie między rozwiązaniem a jego przybliżeniem oczywiście rośnie wraz ze wzrostem t . Szczegółowa analiza przeprowadzona w rozdziale 2 pokazuje, w jakim przedziale czasowym powyższe oszacowania są prawdziwe oraz w jaki sposób zwiększyć długość tego przedziału, dlatego zrezygnowano z zestawienia wykresów rozwiązania i jego przybliżenia w płaszczyźnie (t, x) .



Rys. 2. Zestawienie otrzymanych przybliżeń rozwiązań równania (33), obliczonych z dokładnością odpowiednio $O(\mu)$ i $O(\mu^2)$, z wygenerowanymi numerycznie trajektoriami okresowymi równania (33)

Fig. 2. The approximate solutions of the equation (33) calculated with $O(\mu)$ (left figure) and $O(\mu^2)$ (right figure) and numerically generated realizations of an orbit of the equation (33)



Rys. 3. Rzut na płaszczyznę fazową przybliżonego rozwiązania równania (33) obliczonego z dokładnością $O(\mu^2)$ (ciemna linia) oraz wygenerowana numerycznie trajektoria równania (33) (jasna linia)

Fig. 3. An approximate solution of the equation (33), calculated with $O(\mu^2)$ (dark line) and numerically generated realization of an orbit of the equation (33) (bright line)

4. Wnioski

W niniejszym artykule przedstawiona została metoda Poincarégo-Lindstedta, pozwalająca wyznaczać przybliżenia rozwiązań okresowych równań różniczkowych w postaci sumy pewnej liczby początkowych wyrazów zbieżnego szeregu potęgowego. Zaprezentowano stosowanie metody oraz wyznaczono jej dokładność przy poszukiwaniu okresowych rozwiązań równań różniczkowych w postaci (2). Przedstawiono także równanie modelujące przykładowy układ elektryczny i dokonano jego analizy za pomocą metody Poincarégo-Lindstedta. Następnie wyniki otrzymane analitycznie zestawiono z numerycznymi symulacjami przeprowadzonymi w środowisku Maple 10, otrzymując bardzo dużą zgodność.

Literatura

- [1] Abarbanel H., Rabinovich M., Sushchik M., *Introduction to Nonlinear Dynamics for Physicists*, World Scientific, Singapore 1993.
- [2] Drazin P.G., *Nonlinear systems*, Cambridge University Press, Cambridge 1992, 181-186.
- [3] Hirsch M.W., Smale S., Devaney R.L., *Differential Equations, Dynamical Systems and Introduction to Chaos*, Elsevier, USA 2004.

- [4] Navarro J.F., *Computation of periodic solutions in perturbed second-order ODEs*, Applied Mathematics and Computation 202, 2008, 171-177.
- [5] Navarro J.F., *On the implementation of the Poincaré-Lindstedt technique*, Applied Mathematics and Computation 195, 2008, 183-189.
- [6] Pelczar A., Szarski J., *Wstęp do teorii równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1987.
- [7] Przeradzki B., *Teoria i praktyka równań różniczkowych zwyczajnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2003.
- [8] Samborska M., *Zastosowanie metody Poincarégo-Lindstedta do analizy układów elektrycznych*, Materiały konferencyjne I Międzynarodowej Konferencji Automatyka i Technologie Informacyjne, Lwów 2011, 60-64.
- [9] Samoty V., *Analiza procesów okresowych nieliniowych urządzeń elektromagnetycznych systemów automatyki*, Czasopismo Techniczne z. 1-E/2010, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2010, 67-77.
- [10] Sobczyk T.J., *Numeryczny test zbieżności algorytmu bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach prądu przemiennego z uwzględnieniem równania ruchu*, Czasopismo Techniczne z. 1-E/2010, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2010, 87-97.
- [11] Verhulst F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin 1990.