

ALEKSANDER URBAŃSKI, MARCIN ŁABUDA*

ANALIZA NOŚNOŚCI PRZEKROJU PALI ŻELBETOWYCH
W WARUNKACH INTERAKCJI MIMOŚRODOWEGO
ŚCISKANIA ZE ŚCINANIEMULTIMATE LOAD CAPACITY OF A CROSS-SECTION
OF R-C PILES SUBMITTED TO ECCENTRIC COMPRESION
INTERACTING WITH SHEAR FORCE

Streszczenie

W artykule przedstawiono zastosowanie MES do analizy przekroju żelbetowego poddanego złożonym stanom wyężenia ze szczególnym uwzględnieniem siły ścinającej. Zaprezentowano wyniki analizy przekroju kołowego poddanego działaniu interakcji sił N - M - V oraz porównano z wynikami według [8]. Przedstawiono różnice między omawianą metodą analizy MES oraz podejściem wg EC2.

Słowa kluczowe: pale żelbetowe, MES, nośność, ścinanie, interakcja

Abstract

The paper presents FEM method for analyzing reinforced concrete section under complex states of loads with particular consideration of shear forces. Results for circular section submitted to interaction of forces N - M - V , are presented and compared to results by [8]. Paper shows the differences between discussed method and EC2 code.

Keywords: reinforced concrete pile, FEM, ultimate load capacity, shear force, interaction

* Dr hab. inż. Aleksander Urbański, prof. PK, mgr inż. Marcin Łabuda (doktorant), Instytut Geotechniki, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

W artykule przedstawiono analizę stanu naprężenia i nośności przekroju pręta żelbetowego (kołowego) ze zbrojeniem podłużnym i poprzecznym (strzemionami), poddanego łącznemu działaniu (interakcji) siły osiowej N , momentu zginającego M i siły poprzecznej V (działającej w płaszczyźnie zginania).

Interakcja N - M - V nabiera szczególnego znaczenia wszędzie tam, gdzie słupy są obciążone znacznymi siłami poprzecznymi, np. przy stabilizacji osuwisk palami, w palisadach lub w fundamentach obiektów mostowych. Również w standardowych słupach żelbetowych o przekroju kołowym stosowanych w innych konstrukcjach budowlanych może pojawić się podobna sytuacja.

W artykule przedstawiono nowe, zdaniem autorów, konsystentne podejście do problemu interakcji N - M - V w przekroju poprzecznym pręta żelbetowego (pala). Metoda pozwala na śledzenie ewolucji wszystkich wielkości statycznych i kinematycznych spełniających warunki równowagi i zgodności geometrycznej, oraz pełne równanie konstytutywne.

Skorzystano ze zmodyfikowanej wersji Metody Elementów Skończonych (MES), por. [1], do analizy przekroju poprzecznego pręta o dowolnym kształcie i dowolnych nieliniowych modelach konstytutywnych materiałów (tu: beton – model kontinuum 3D, sprężysto-plastyczny z osłabieniem, zbrojenie – model idealnie sprężysto-plastyczny 1D). Analiza przekrojowa prętów poddanych sile poprzecznej i momentowi skręcającemu oprócz siły osiowej i momentu zginającego została wywiedziona z teorii homogenizacji i analizy asymptotycznej. Krótko scharakteryzowano ją w rozdz. 3, a przedstawiono szczegółowo w pracach pierwszego z autorów [1–3].

Podobną tematykę, tj. wyznaczanie stanu naprężenia dla problemu skręcania i ścinania belek żelbetowych za pomocą rozmaitych wariantów podejść numerycznych opartych na MES podejmowano w pracach wielu autorów, między innymi w [4–7].

Celem artykułu jest porównanie najważniejszych wyników, tj. dotyczących nośności przekroju z wynikami zamieszczonymi w pracach innych autorów, por. [8]. Następnie, dla przekrojów analizowanych w [8] zaprezentowano wiele innych rezultatów, specyficznych dla proponowanej metody.

2. Metody normowe uwzględniające ścinanie

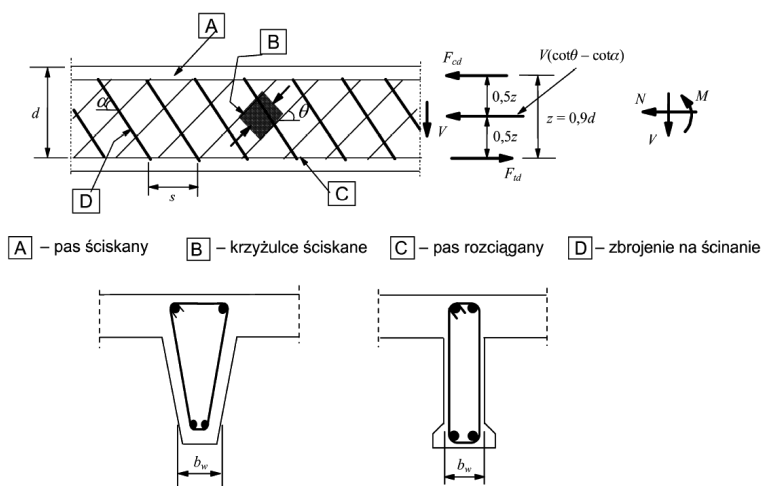
Zarówno poprzednio obowiązująca norma PN-84/B-03264, jak i obecna PN-EN 1992 w zakresie ścinania opiera się głównie na modelu kratownicowym Mörsch’a (rys. 1). Jest to metoda zasadniczo odmienna od przedstawianej w niniejszym artykule, polega na przybliżonej konstrukcji statycznie dopuszczalnych pól naprężeń w stanie granicznym.

Dobór parametrów obliczeniowych, takich jak kąt nachylenia ściskanych krzyżulców betonowych (które już same w sobie są umowne) do osi belki (kąt θ) nie jest jednoznacznie sprecyzowany (np. EC2 zaleca $1,0 < \text{ctg}\theta < 2,5$), dlatego projektant może mieć trudności z wyborem właściwej wartości. Ponadto metodami przedstawianymi w normach można w łatwy sposób wymiarować przekroje elementów żelbetowych zbliżone do prostokąta, spore problemy natomiast może sprawiać dobór modelu kratowniczego dla przekrojów złożonych oraz kołowych.

Przedstawiana metoda analizy przekrojowej MES umożliwia nie tylko analizę przekrojów o dowolnym kształcie, ale również poddanych złożonym stanom wyężenia.

Norma określa osobny algorytm sprawdzania nośności i wymiarowania zbrojenia dla każdego ze stanów (mimośrodowe ściskanie, ścinanie, skręcanie), jednak brakuje formuł interakcji umożliwiających sprawdzanie nośności przekrojów poddanych jednocześnie kilku stanom. Przykładowo wpływ skręcania i/lub ścinania na nośność przekroju przy zginaniu nie jest jasno określony normą, albowiem pozostawia projektantowi pewną dowolność w przyjmowaniu parametrów.

Oczywiście przedstawiana metoda również nie jest bez wad, jej poprawność w dużej mierze zależy od przyjęcia modelu konstytutywnego betonu, uwzględniającego zjawisko dylatacji. Ponadto prowadzenie obliczeń wymaga znajomości wielu parametrów sterujących algorytmem MES oraz, w pewnym zakresie, wyniki mogą zależeć od dyskretyzacji przekroju, co jest ogólną cechą zadań dla materiałów z osłabieniem, por. [10]. Niemniej jednak kwestia niejednoznacznego doboru parametrów w algorytmie opisującym ścinanie, przedstawionym w normie, prowokuje do badań i rozwoju nowych metod analizy przekrojów w złożonych stanach wyężenia.



Rys. 1. Model kratownicowy belki wg EC2

Fig. 1. Truss model according to EC2

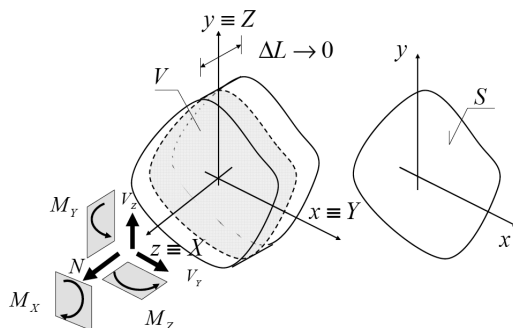
3. Metoda numeryczna analizy przekrojowej belki żelbetowej

3.1. Założenia metody

Metoda numeryczna analizy przekroju belki wywodzi się z teorii homogenizacji elementów konstrukcyjnych z mikrostrukturą periodyczną, [1]. Rozważono w niej przypadek belki w 3D o dowolnym, lecz zwartym przekroju poprzecznym ze wszystkimi sześcioma składowymi sił wewnętrznymi $\Sigma = [N, M_y, M_z, V_y, V_z, M_x]^T$ (siła ściskająca/rozciągająca, 2 składowe momentu zginającego, 2 składowe siły poprzecznej i moment skręcający).

Odpowiadają im odkształcenia uogólnione $\mathbf{E} = [E, K_y, K_z, B_y, B_z, \Phi]^T$ opisujące makrokinematykę (odkształcenie liniowe dla $x = y = 0$, 2 krzywizny, 2 średnie kąty odkształcenia postaciowego, jednostkowy kąt skręcenia).

W belce wyróżnia się powtarzalną komórkę w formie wycinka (plastra) początkowo o skończonej długości, dla której formułuje się lokalny, trójwymiarowy problem brzegowy homogenizacji sterowanej przez siły wewnętrzne Σ i/lub makroodkształcenia \mathbf{E} . Następnie dokonuje się przejścia granicznego prowadzącego do problemu brzegowego w dwuwymiarowym obszarze przekroju belki $\{(x, y) \in S\}$. Poszukuje się w nim trzech nieznanymi składowych przemieszczeń mikrostruktury $\mathbf{u}_p(\mathbf{x}) = [u(x, y), v(x, y), w(x, y)]^T$, tj. przemieszczeń w płaszczyźnie przekroju (w liniowo-sprężystych zagadnieniach są one związane z efektem Poissona, dla $\nu \neq 0$), oraz spaczenia towarzyszącego działaniu sił ścinających i momentowi skręcającemu. W przypadku sterowania siłami przekrojowymi Σ aktywne stają się odpowiadające im odkształcenia uogólnione \mathbf{E} . Odkształcenia wywołane przez przemieszczenia $\mathbf{u}_p(\mathbf{x})$ nałożone na deformację określoną makrokinematyką tworzą stan odkształcenia generujący naprężenia spełniające równania równowagi i statyczne warunki brzegowe.

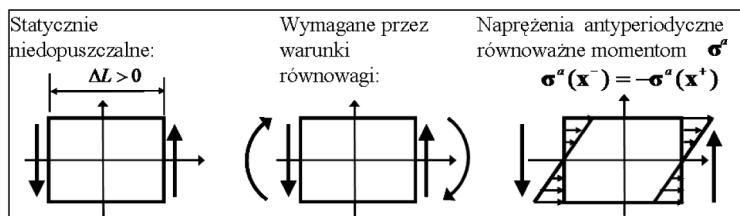


Rys. 2. Wycinek belki. Układy współrzędnych – globalny $\{X, Y, Z\}$ i lokalny $\{x, y, z\}$

Fig. 2. Beam slice. Coordinate systems – global $\{X, Y, Z\}$ and local $\{x, y, z\}$

Główna trudność w analizie powyższego zagadnienia wiąże się z obecnością sił poprzecznych V , których odosobnione działanie na wycinek (plaster) jest statycznie niedopuszczalne. Wymagane jest bowiem równoczesne działanie zmiennych po długości momentów zginających, tak by możliwe było spełnienie globalnych warunków równowagi wycinka wynikających ze wzorów Schwedlera-Żurawskiego $(V = \pm \frac{dM}{dX})$. Wówczas kinematyka ma_{kromodelu} musi być wzbogacona o człony generujące odkształcenia antyperiodyczne, tak by w konsekwencji mogły powstać antyperiodyczne naprężenia na przeciwległych brzegach plastra, statycznie równoważne zmiennym momentom zginającym (rys. 3). Powyższe postępowanie daje wyniki zgodne ze znanymi analitycznymi rozwiązaniami teorii sprężystości dotyczącymi ścinania, por. [1]. Prowadzi także do wyników zgodnych z rozwiązaniami numerycznymi dla belek w 3D, o ile tylko spełnione są następujące założenia przyjmowane przez opisaną analizę asymptotyczną:

- jedynym źródłem wyężenia są siły przekrojowe. Pomija się wpływ obciążeń przyłożonych do pobocznic pręta,
- rozpatrywany przekrój znajduje się dostatecznie daleko od podpór i innych więzów, sił skupionych, gwałtownych zmian przekroju poprzecznego.



Rys. 3. Warunki równowagi wycinka belki przy ścinaniu

Fig. 3. Equilibrium conditions of the beam slice under shear

Do opisu betonu w pracy używa się modelu materiałowego niestowarzyszonej sprężysto-plastyczności z osłabieniem przy wystąpieniu odkształceń plastycznych rozciągających wg Menetrey'a i Wilama [9, 10]. Model charakteryzuje gładka powierzchnia plastyczności, trójeliptyczna w aksjatorowym przekroju i paraboliczna w dewiatorowym. Podstawowymi danymi są: stałe sprężyste E , ν , jednoosiowe wytrzymałości na ściskanie f_c i rozciąganie f_t . Prawo osłabienia (ekspotencjalne) jest określone przez graniczną szerokość rozwarcia rys w_r oraz energię pęknięcia G . Niestowarzyszone prawo płynięcia używa kąta dyatacji ψ do kontrolowania stosunku pomiędzy objętościową a dewiatorową częścią deformacji plastycznej. Model dobrze opisuje większość (choć nie wszystkie) cech zachowania się betonu w złożonych wieloosiowych stanach, por. [10].

Stal zbrojeniowa opisana jest standartowym jednoosiowym modelem idealnie sprężysto-plastycznym (E_s, f_y).

3.2. Opis sformułowania MES

Przyrostowe rozwiązanie numeryczne powyższego, w ogólności nieliniowego problemu brzegowego przeprowadzono autorskim programem, rozwiniętym i pracującym w środowisku systemu MES ZSoil.PC¹. Celem analizy przekrojowej belek jest:

- 1) utworzenie ścieżek w przestrzeni sił wewnętrznych i odkształceń uogólnionych $\lambda \rightarrow (\Sigma(\lambda), \mathbf{E}(\lambda))$, przy dowolnym wyborze wielkości sterujących,
- 2) wszystkie 6 składowych tensorów naprężeń i odkształceń (w 3D) w dowolnym punkcie przekroju i chwili λ procesu (także i te zwyczajowo pomijane w analizie belek),
- 3) wyznaczenie stycznej macierzy konstytutywnej (sztywności) przekroju Δ , rozumianej jako operator wiążący przyrosty $\delta \Sigma$ z $\delta \mathbf{E}$: $\delta \Sigma = \Delta \cdot \delta \mathbf{E}$ w dowolnej chwili λ procesu.

¹ ZSoil.PC jest systemem nieliniowej analizy MES ogólnego przeznaczenia (statyka ośrodka jedno- i dwufazowego, dyfuzja, filtracja), ukierunkowanym na geotechnikę, hydrotechnikę i inżynierię lądową. Został opracowany na Politechnice Federalnej (EPFL) w Lozannie (Szwajcaria) i w firmie ZACE Services Ltd., przez zespół działający pod kierownictwem prof. T. Zimmermanna i prof. A. Trutego. A. Urbański uczestniczył w tworzeniu systemu ZSoil.PC od 1993 roku. Szczegółowe informacje o systemie ZSoil można znaleźć na stronie: www.zace.com.

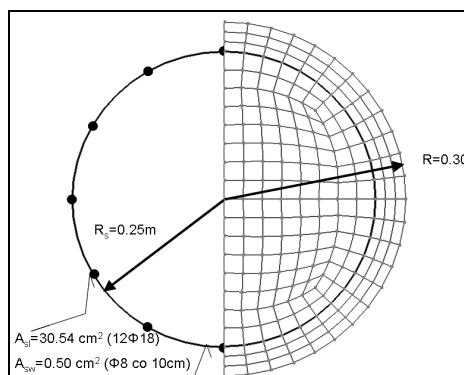
Obszar przekroju poprzecznego belki dyskretyzuje się dwuwymiarowymi elementami skończonymi (T3, Q4, T6, Q8) o 3 stopniach swobody w węźle, $\mathbf{u}_i = \{u, v, w\}^T$ (kinematyka uogólnionego płaskiego stanu odkształcenia). Warto wspomnieć w tym miejscu, że poza węzłowymi stopniami swobody podczas symulacji aktywne są jeszcze globalne stopnie swobody \mathbf{E} , \mathbf{A} opisujące tzw. makrokinematykę, przy czym liczba składowych uogólnionych odkształceń $\#\mathbf{E}$ jest równa liczbie sterujących składowych sił wewnętrznych. Liczba parametrów tworzących antyperiodyczną deformację jest stała i wynosi, w przedstawianym sformułowaniu, $\#\mathbf{A}=9$.

Dodatkowo model MES przekroju żelbetowego zawierać może elementy specjalne:

- prętowe (strzemiona w belce żelbetowej),
- zdegenerowany element punktowy (zbrojenie podłużne w belce żelbetowej),
- membranowe (okładziny lub kształtowniki w konstrukcjach zespolonych, gęste siatki zbrojenio-we),
- kontaktowe (powierzchnie nieciągłości deformacji przebiegające wzdłuż osi pręta).

4. Wybrany przekrój żelbetowy kołowy poddany interakcji N-M-V

W pracy [8] rozważono problem interakcji N - M - V dla przekroju kołowego, budując rozwiązanie problemu nośności granicznej metodą statyczną, tj. wyodrębniono w przekroju trzy strefy, z których tylko strefa środkowa przenosi siłę V . Problem sprowadzono tam do zadania programowania nieliniowego na zmienne określające zakres tych stref, poszukując minimalnych sił V , które wraz z założonymi parami sił M , N spełniają (w sensie całkowym) równania równowagi, oraz nie przekraczają granicznych wartości naprężeń w betonie, w zbrojeniu podłużnym i strzemionach.



Rys. 4. Model MES przekroju poprzecznego pręta wraz ze zbrojeniem wg [8]

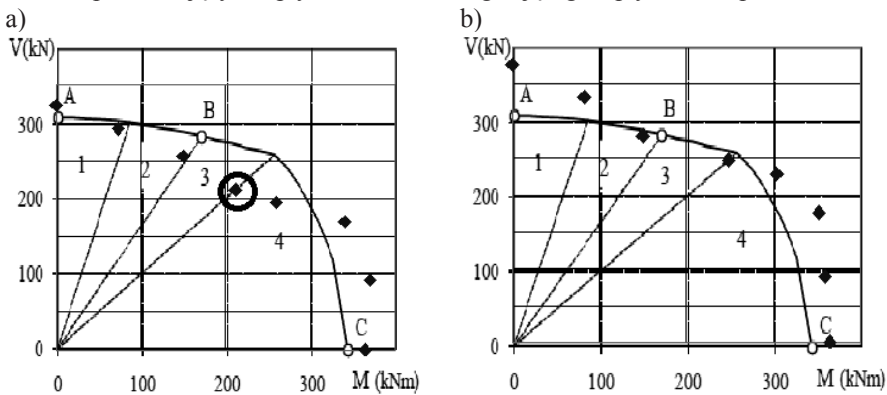
Fig. 4. Model FEM of the cross-section with reinforcement, after [8]

Jako podstawowy wynik podano tam krzywe interakcji M - V , przy ustalonej sile $N (= -700 \text{ kN})$. W niniejszym artykule w celu porównania efektów obu metod, przeanalizowano identyczny przekrój (którego model MES pokazany jest na rys. 4), przyjmując za [8], dość niską wytrzymałość betonu na ściskanie jednoosiowe $f_c = 11,02 \text{ MPa}$, oraz wytrzymałość stali, jednakową dla strzemion i zbrojenia podłużnego, $f_y = 374 \text{ MPa}$.

Wyniki te, odniesione są do badań eksperymentalnych wykonywanych przez różnych autorów (ich szczegółowy wykaz zawarto w [8]) i, jak podają autorzy pracy [8], wykazują dobrą zgodność. Mogą zatem stanowić podstawę do weryfikacji proponowanej metody.

Analiza modelem Menetrey'a i Wilama wymaga określenia pozostałych danych materiałowych, nieobecnych w [8], gdzie jedynymi parametrami materiałowymi były wspomniane wytrzymałości. I tak, przyjęto dla betonu: moduł Younga $E_c = 30$ GPa, $\nu_c = 0,16$. Współczynnik określający wytrzymałość na ściskanie w stanie dwuosiowym $f_{cb}/f_c = 1,16$, co odpowiada parametrowi kształtu powierzchni granicznej $e = 0,52$. Wytrzymałość na rozciąganie f_t jest nieokreślona [8], tu przebadano jej wpływ na krzywe interakcji zmieniając ją w granicach $f_t = 0,8-1,0$ MPa. Przyjęto następujące parametry prawa osłabienia: graniczna szerokość rozwarcia rys $w_r = 0,001$ m, energia pęknięcia $G = 200$ Nm/m². W prawie płynięcia użyto kąta dyatacji $\psi_c = 15^\circ$, a więc przyjmującego wartość pośrednią pomiędzy teoretycznym granicami dla modelu ($4^\circ < \psi_c < 35^\circ$), zalecaną przez [10].

Porównanie krzywych przedstawiono na rys. 5, gdzie naniesiono punkty obliczone omawianą metodą, (ozn. ♦), dla dwóch wartości wytrzymałości na rozciąganie: a) $f_t = 0,8$ MPa b) $f_t = 1,0$ MPa. Zgodnie z oczekiwaniami nośność przekroju na ścinanie będzie zależała od tego parametru. Dla stanów z przeważającym wpływem momentu zginającego wpływ ten stopniowo zanika.



Rys. 5. Krzywe interakcji M-V przy stałej wartości siły ściskającej $N = -700$ kN wg [8]

Fig. 5. Interaction curves M-V for the constant value of compressive force $N = -700$ kN, after [8]

Punkty interakcji uzyskano jako graniczne, przy których uzyskano zbieżność procesu iteracyjnego w algorytmie Newtona-Raphsona, przy sterowaniu siłami:

$$\Sigma(\lambda) = [N = \text{const} = -700 \text{ kN}, M_y = M_o \cdot F(\lambda), 0, 0, V_z = V_o \cdot F(\lambda), 0]^T, \lambda \in (0, 1) \rightarrow F(\lambda) = \lambda$$

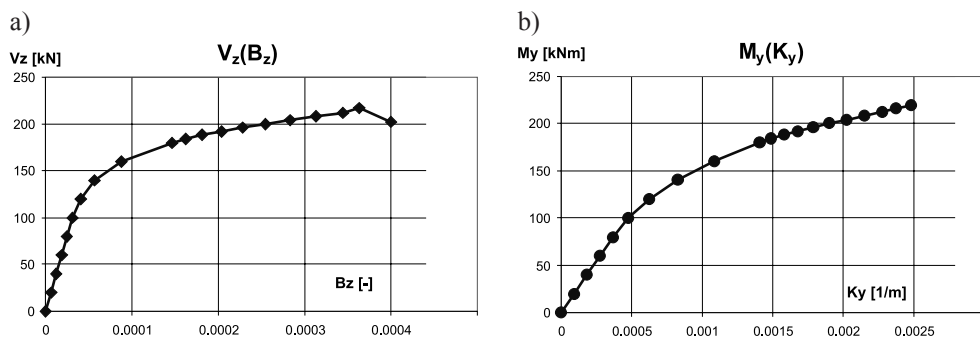
z krokiem $\Delta\lambda = 0,01$, przy różnych wartościach:

$$V_o/M_o = (400/0, 400/100, 400/225, 400/300, 300/400, 200/400, 100/400, 0/400) \text{ kN/kNm}.$$

Dla stanów z przewagą siły V_z lub momentu M_y uzyskano nieznacznie większe nośności, natomiast dla pośrednich stanów interakcji, np. w otoczeniu p. B, nie osiągnięto pełnej nośności jak w [8]. Zgodność tych wyników z referencyjnymi, zdaniem autorów, można jednak uznać za dość dobrą, pomimo odmiennej metodyki i użytego modelu materiałowego.

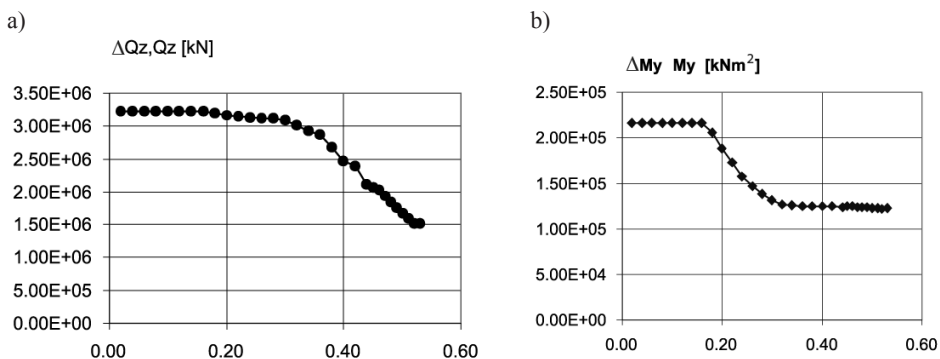
Na rysunku 6 pokazano ścieżki w przestrzeni $\Sigma(\lambda)$, $E(\lambda)$ opisujące jeden z przebiegów (przypadek a), $V_o/M_o = 400/400$ kN/kNm), dobrze ilustrujące istotę zachodzącego zjawiska. Otóż siła poprzeczna V_z osiąga swoje maksimum dla wartości parametru $\lambda = 0,53$ (ozn. kółkiem na rys. 5a). Na wykresie (rys. 6) pokazano ostatnią policzoną wartość $V_z(\lambda = 0,54) < V_z(\lambda = 0,53)$, w stanie dla którego nie osiągnięto zbieżności. Zmieniając sterowanie siłami przekrojowymi na sterowanie odkształceniami uogólnionymi oraz algorytm iteracyjny (na przykład stosując zmodyfikowaną metodę Newtona-Raphsona, algorytm BFGS czy tzw. *arc-length*), można uzyskać opadającą część wykresu charakterystyki $V_z(B_z)$ dla modelu materiałowego zawierającego prawo osłabienia, por. [1]. Wiąże się z tym znane trudności dotyczące stabilności obliczeń i jednoznaczności ich wyników przy różnych dyskretyzacjach. Tu pokonano je, stosując metodę Hilleborga, por. [10].

Przy określaniu krzywej interakcji interesujące są wartości graniczne (maksymalne) sił przekrojowych, stąd też poprzestano na algorytmie gwarantującym ich jednoznaczne określenie.



Rys. 6. Ścieżki w przestrzeni (Σ, E) przy ustalonej wartości $N = -700$ kN: a) siła poprzeczna w zależności od średniego kąta odkształcenia postaciowego; b) moment zginający w zależności od krzywizny

Fig. 6. Paths in the space (Σ, E) for the constant value of $N = -700$ kN: a) the shear force as a function of the mean shear angle; b) the bending moment as a function of the curvature



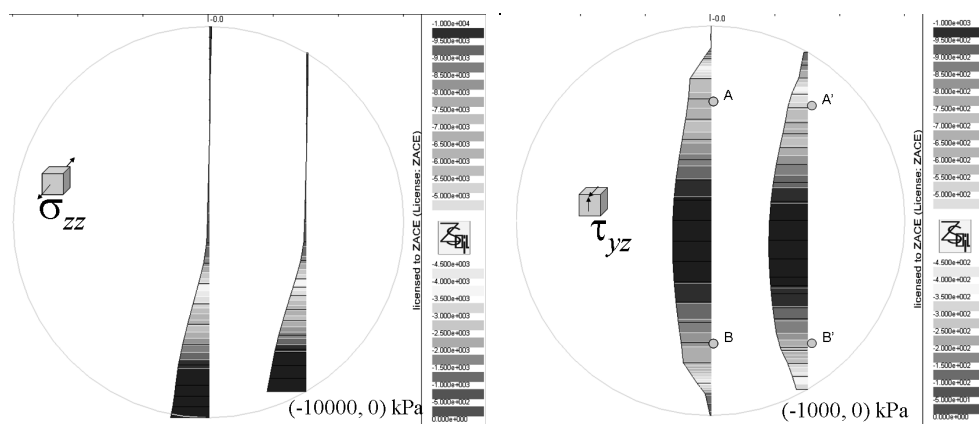
Rys. 7. Sztywność przekroju a) na ścinanie; b) na zginanie; jako funkcja parametru λ

Fig. 7. Stiffness of the cross-section for: a) shear; b) bending; as a function of the parameter λ

Przedstawiana metoda analizy przekrojowej belek stwarza również możliwość śledzenia zmian poszczególnych składowych macierzy sztywności przekroju, por. [1]. Na rys. 7 pokazano to dla tej samej ścieżki (przypadek a), $V_o/M_o = 400/400$ kN/kNm co na rys. 7 dla parametru procesu $0 < \lambda \leq 0,53$.

Oprócz prezentowanych wyników analizy operujących wielkościami całkowitymi dla przekroju, metoda pozwala na śledzenie wszelkich wielkości statycznych w dowolnym punkcie i dowolnej chwili λ procesu.

W pierwszej kolejności na rys. 9 przedstawia się rozkłady składowych naprężeń podstawowych dla rozpatrywanego zagadnienia, tj. normalnych i stycznych w kierunku siły ścinającej dla: przypadku $f_t = 800$ kPa (a), $V_o/M_o = 400/400$ kN/kNm, parametru procesu $\lambda = 0,53$, a więc dla granicznych wartości sił przekrojowych $N = -700$ kN, $V_z = 212$ kN, $M_y = 212$ kNm.

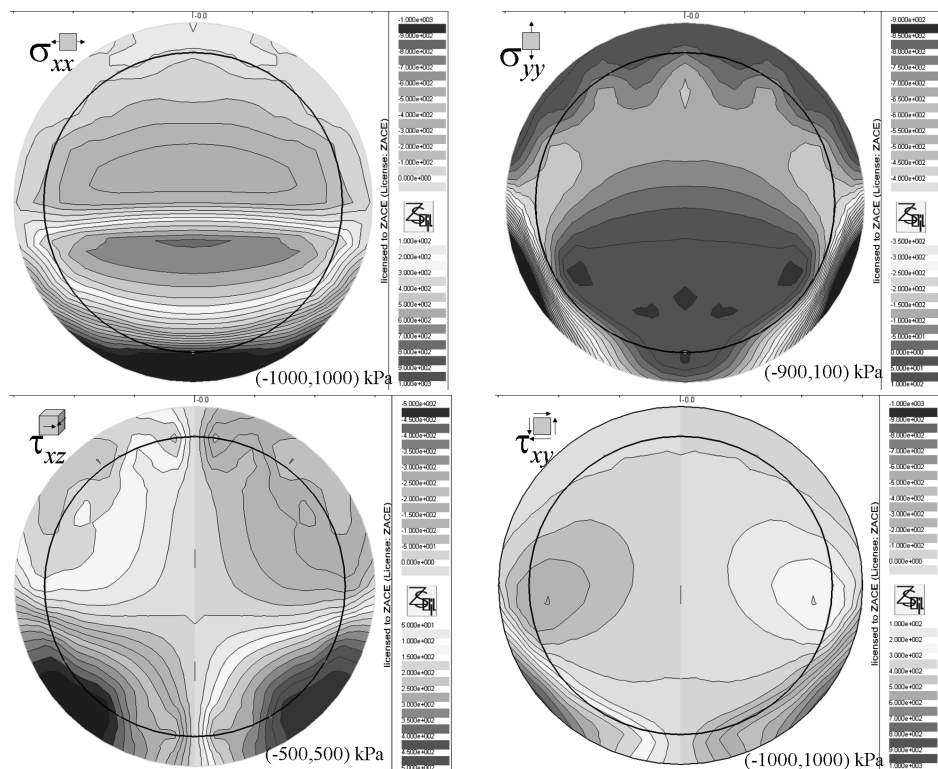


Rys. 8. Rozkład naprężeń normalnych i stycznych w przekroju

Fig. 8. Distribution of normal and shear stresses in the section

W rozkładzie τ_{yz} daje się zauważyć brak symetrii względem osi x (poziomej), co nie zdarza się w analizie liniowo-sprężystej. Przykładowo, $\tau_{yz}(A) \approx 600$ kPa (strefa rozciągana), podczas gdy w p. B (położonym symetrycznie, ale w strefie ściskanej), $\tau_{yz}(B) \approx 900$ kPa. Analogicznie $\tau_{yz}(A') \approx 500$ kPa, a $\tau_{yz}(B') \approx 800$ kPa. Ta około 50% różnica związana jest z utratą sztywności betonu w kierunku normalnym (z), w strefie rozciąganej.

Ponadto metoda umożliwia analizowanie pozostałych składowych tensora naprężeń, zwyczajowo pomijanych w analizie belek. Fakt ten jest w pełni zrozumiały, bowiem dla składowych tych nie są znane żadne rozwiązania zamknięte (nawet przybliżone). Przy wielkościach jakie osiągną (rys. 9), mogą one jednak odgrywać znaczący wpływ na ewolucję stanów plastycznych w układzie, ingerując w wielkość niezmienników tensorów (I_1, J_2, J_3) występujących w warunku plastyczności, oraz na stany zarysowania. Przykładowo, naprężenia styczne τ_{xz} prostopadłe do kierunku siły ścinającej, oraz działające w płaszczyźnie przekroju τ_{xy} osiągają wartości tego samego rzędu co podstawowe τ_{yz} . Naprężenia normalne σ_{xx} i σ_{yy} osiągają lokalnie wartości bliskie wytrzymałości na rozciąganie. Pewną (dość złożoną) rolę w kształtowaniu się tych pól naprężeń odgrywa obecność zbrojenia (efekt zaciskania, ang. *confinement*).

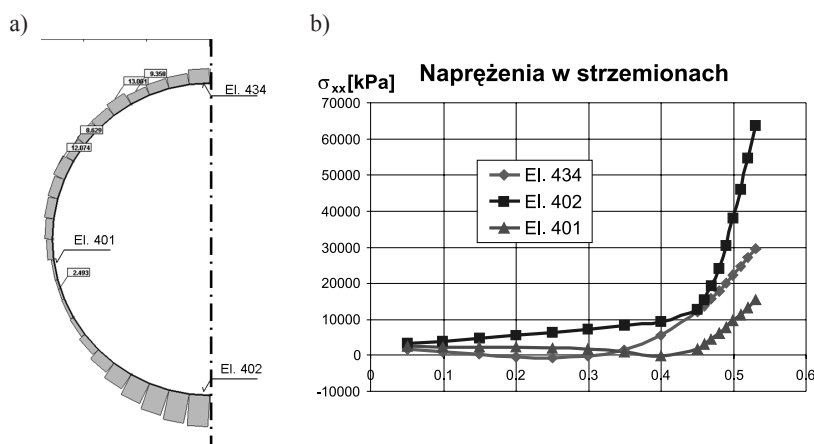


Rys. 9. Mapy składowych tensora naprężeń na ogół pomijane w analizie

Fig. 9. Maps of components of the stress tensor omitted in standard analysis

Rozkład sił (i naprężeń) w zbrojeniu poprzecznym (strzemionach) pokazano na rys. 10a), ich histogram w wybranych elementach, na rys. 10b, dla poprzednio opisanego stanu (przypadek a), $V_o/M_o = 400/400$ kN/kNm, parametru procesu $0 < \lambda \leq 0,53$.

Początkowo niewielkie wartości tych naprężeń związane są wyłącznie z efektem Poissona wywołanym ściskaniem mimośrodowym. W miarę wzrostu naprężeń ścinających, po osiągnięciu stanu plastycznego w betonie, źródłem naprężeń w zbrojeniu poprzecznym są odkształcenia objętościowe plastyczne (wzrost objętości betonu zarysowanego) przy plastycznych odkształceniach postaciowych, czyli dylatacja betonu. Pojawienie się naprężeń w zbrojeniu jest więc efektem nieliniowości materiałowej opisanym przez zastosowany model. Warto w tym miejscu przypomnieć fakt, że rozwiązania wg liniowej teorii sprężystości dla stanu czystego ścinania czy skręcania nie wykazują żadnych odkształceń liniowych w płaszczyźnie przekroju ani w kierunku podłużnym i tym samym nie generują żadnych naprężeń w zbrojeniu.



Rys. 10. Rozkład sił w strzemionach i histogram naprężeń w wybranych elementach

Fig. 10. Forces decomposition in stirrups and stress history graphs in selected elements

5. Wnioski

Metodą analizy przekrojowej MES przebadano nośność, sztywność oraz rozkłady wielkości statycznych w przekroju kołowym pręta. Wyniki (krzywe interakcji $N-M-I$) zostały pozytywnie zweryfikowane przez porównanie ich z wynikami zamieszczonymi w pracy [8], pomimo zastosowania zasadniczo odmiennych podejść ([8] – metoda statyczna oszacowania nośności, tu metoda bazująca na mechanice kontinuum sprężysto-plastycznego).

Stosowalność metody ma swój naturalny limit wynikający z założeń teorii homogenizacji, i analizy asymptotycznej, tj. z założenia o dostatecznie wolnej zmienności pól makroskopowych. Wyklucza to z rozważań przekroje znajdujące się w bezpośrednim sąsiedztwie podpór, zmian przekrojów, otworów, dużych obciążeń skupionych czy wywołanych nimi makrorys (ang. *arching*).

Chociaż metoda jest ogólna w takim sensie, że materiał pręta może być opisywany dowolnymi modelami materiałowymi nieliniowym, w tym przypadku musi być spełniony postulat o włączeniu charakterystyki dylatacji jako istotnego składnika modelu konstytutywnego betonu, o ile ma on służyć opisowi ścinania lub skręcania. Jest to spowodowane faktem, że przedstawiona metoda opisuje ewolucję naprężeń w zbrojeniu poprzecznym i podłużnym przy ścinaniu wyłącznie jako efekt dylatacji towarzyszącej zarysowaniu betonu. Użyty model Menetrey-Wilama spełnia ten warunek, ale dokładna identyfikacja jego parametrów (kąt dylatacji) wymaga jeszcze dalszych badań.

W praktyce kluczową rolę odgrywa zdolność metody do opisywania nośności w warunkach złożonego stanu sił przekrojowych, w tym ścinania. Szersze stosowanie metody musi być poprzedzone następującymi badaniami:

- identyfikacja parametrów opisujących dylatację;
- wrażliwość metody na zmiany parametrów modelu konstytutywnego opisujących osłabienie;
- wrażliwość metody na dyskretyzację MES;
- działanie metody z innymi modelami konstytutywnymi betonu.

Można postawić tezę, że moc obliczeniowa nie stanowi już dziś bariery w wykorzystaniu dwuwymiarowych modeli MES w praktycznej działalności projektowej. Posługując się modelem przekrojowym MES 2D można wykonywać wielokrotne symulacje z dużą liczbą kroków obliczeniowych, na przykład takie, których celem jest tworzenie powierzchni interakcji w trybie *on-line*. Takie narzędzie obliczeniowe będzie mogło być przydatne dla szerokiego grona projektantów.

Literatura

- [1] Urbański A., *The united, finite element formulation of homogenization of structural members with a periodic microstructure*, Politechnika Krakowska, Monografia 320, Kraków 2005.
- [2] Urbański A., *Nieliniowa analiza numeryczna wyężenia przekrojów pręta litego przy złożonym obciążeniu*, XVII Konferencja Naukowa – Korbielów’2005, Metody Komputerowe w Projektowaniu i Analizie Konstrukcji Hydrotechnicznych”, Politechnika Krakowska 2005.
- [3] Urbański A., *FE analysis of a reinforced concrete beam cross-section under shear, torsion, bending and axial force*, Materiały 7-th International Conference on Analytical Models and New Concept in Concrete and Masonry Structures, AMCM’2011, Kraków 2011.
- [4] Davenne L., Elachchi S.M., *A simplified method to model the shear bending interaction of reinforced concrete cross section*, Numerical Methods in Engineering, Ch. Hirsh (ed.), Elsevier Science Publisher B.V., 1992, 247-254.
- [5] Anthoine A., Guedes J., Pegon P., *Non-linear behaviour of reinforced concrete beams from 3d continuum to 1D member modeling*, Computer Modelling of Concrete Structures. Proceedings of EURO-C Int. Conference, Pineridge Press Ltd., Innsbruck 1994, 703-712.
- [6] Retzepis I., Hartung B., *The behaviour of concrete cross-section under arbitrary loading*, Proc. of 5-th Int. Conference ANCM, Gliwice 2005.
- [7] Garcia J. M., Bernat A. R., *Coupled model for the non-linear analysis of anisotropic sections subjected to general 3D loading*, Computers & Structures, vol. 84, 2006, 2254-2263.
- [8] Ghersi A., Recupero A., Rossi P.P., *N-M-V domains of circular reinforced concrete cross-sections*, The 14th World Conference on Earthquake Engineering, Beijing, China 2008.
- [9] Willam K., Munz T., Etse G., Menetrey P., *Failure conditions and localization in concrete*, Computer modelling of concrete structures, Proceedings of EURO-C Int. Conference, Pineridge Press Ltd., Innsbruck 1994, 263-282.
- [10] Menetrey P., *Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures*, Ph.D. Thesis, EPFL Lausanne 1994.