



POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki

Katarzyna Baran-Gurgul

Zbiór zadań z hydrauliki z rozwiązaniami

skrypt dla studentów
wyższych szkół technicznych

KRAKÓW 2005

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
im. Tadeusza Kościuszki

Katarzyna Baran – Gurgul

**ZBIÓR ZADAŃ
Z HYDRAULIKI
Z ROZWIĄZANAMI**

SKRYPT DLA STUDENTÓW
WYŻSZYCH SZKÓŁ TECHNICZNYCH



Kraków 2005

SPIS TREŚCI

WSTĘP	5
WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ	7
I. HYDROSTATYKA.....	9
I.1. Ciśnienie	9
I.1.1. Ciśnienie i parcie hydrostatyczne.....	9
I.1.2. Rodzaje równowagi, podstawowe równanie hydrostatyki	10
I.1.3. Obliczanie ciśnienia w punkcie cieczy.....	11
I.1.4. Naczynia połączone	12
I.1.5. Przyrządy do pomiaru ciśnienia	15
I.1.6. Obliczanie ciśnienia w punkcie – zadania.....	19
I.1.7. Zmiana ciśnienia gazu związaną ze zmianą jego objętości (zastosowanie prawa Boyle’a–Mariotte’a).....	27
I.1.8. Rozkład ciśnień na prostokątne ściany płaskie – graficzna interpretacja prawa Pascala i prawa Eulera	30
I.2. Parcie na powierzchnie płaskie	33
I.2.1. Metoda graficzno – analityczna obliczania wartości siły parcia	33
I.2.2. Metoda analityczna obliczania wartości siły parcia	35
I.2.3. Zadania – parcie na ściany płaskie	36
I.3. Parcie na ściany zakrzywione	58
I.3.1. Obliczenie wartości siły parcia	58
I.3.2. Redukcja wykresów parcia.....	63
I.3.3. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem równowagi sił	66
I.3.4. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem równowagi momentów sił.....	69
I.3.5. Rozwiązywanie zadań w przypadku, gdy na daną ścianę działają ciecze o różnych ciężarach właściwych.....	71
I.3.6. Wypór.....	74
I.4. Równowaga względna cieczy	79
I.4.1. Naczynie z cieczą wirującą ze stałą prędkością kątową wokół swej osi pionowej	79
I.4.2. Naczynie z cieczą poruszające się ruchem jednostajnie zmiennym, prostoliniowym	82
I.4.3. Naczynie z cieczą poruszające się ze stałym przyspieszeniem w dół	83
I.4.4. Zadania.....	84
I.5. Pływanie ciał	92
I.5.1. Ogólne warunki równowagi (pływania).....	92
I.5.2. Równowaga ciała pływającego całkowicie zanurzonego.....	93
I.5.3. Równowaga ciała pływającego częściowo zanurzonego	94
I.5.4. Wyznaczenie wysokości metacentrycznej	95

II. HYDRAULIKA RUROCIĄGÓW	100
II.1. Równanie ciągłości przepływu	100
II.2. Równanie Bernoulliego	100
II.3. Obliczenie wysokości strat energii	105
II.3.1. Straty lokalne	105
II.3.2. Straty na długości	108
II.4. Rodzaje rurociągów	112
II.5. Konstruowanie linii ciśnień piezometrycznych	115
II.6. Rurociągi pojedynczy	118
II.7. Lewary, syfony	123
II.7. Rurociągi długie	128
II.8. Rurociągi wydatkujące po drodze	134
III. WYPŁYW PRZEZ OTWORY I PRZELEWY	139
III.1. Wypływ przez otwory	139
III.1.1. Ustalony wypływ przez otwory	139
III.1.2. Nieustalony wypływ przez otwory	149
III.2. Wypływ przez przelewy	156
III.2.1. Klasyfikacja przelewów	156
III.2.2. Wydatek przelewu	157
IV. RUCH W KORYTACH OTWARTYCH.....	165
IV.1. Definicje	165
IV.2. Ruch jednostajny w korytach otwartych.....	165
IV.2.1. Przepływ w przekroju poprzecznym zwartym.....	166
IV.2.2. Obliczenia hydrauliczne dla koryta zwartego.....	170
IV.2.3. Ruch krytyczny.....	175
IV.2.4. Przepływ hydraulicznie najkorzystniejszy.....	179
IV.2.4. Przepływ w korycie o złożonym przekroju poprzecznym	181
IV.2.5. Kolektory.....	184
IV.3. Ruch zmienny ustalony w korytach otwartych	189
V. RUCH WODY W GRUNCIE	196
V.1. Wstęp	196
V.1.1. Prawo Darcy'ego	196
V.1.2. Współczynnik filtracji.....	197
V.2. Obliczanie współczynnika filtracji	198
V.3. Dopływ do rowu i drenu	201
V.4. Dopływ do studni przy poziomej warstwie nieprzepuszczalnej	207
V.5. Studnia artezyjska.....	210
V.6. Działanie grupy studni	213
ZAŁĄCZNIKI.....	215
LITERATURA	217

WSTĘP

Niniejszy zbiór zadań z rozwiązaniami został napisany jako pomoc dydaktyczna dla studentów studiujących na Wydziale Inżynierii Środowiska.

Skrypt został dostosowany do programu ćwiczeń z przedmiotów „mechanika płynów” i „hydraulika” prowadzonych przez pracowników Zakładu Hydrauliki Hydromechaniki na różnych specjalnościach Wydziału Inżynierii Środowiska i Wydziału Inżynierii Lądowej. Zawiera podstawowe zagadnienia z zakresu hydrostatyki i ruchu cieczy.

Wiele przykładów w tym zbiorze zostało wymyślonych przez Autorkę. Część zadań jednak została zapożyczona z różnych podręczników, zbiorów zadań, skryptów (wykaz literatury znajduje się na końcu zbioru) i wreszcie – dzięki uprzejmości Kolegów – z ich prywatnych zasobów.

Przykłady te zostały na nowo opracowane i poukładane, w sposób, który autorce wydawał się najbardziej logiczny. Adresatem bowiem skryptu są osoby, które po raz pierwszy zetknęły się z zagadnieniami hydrauliki.



Jeżeli w skrypcie pojawiłyby się jakieś nieścisłości, niejasności lub (co nie daj Boże) błędy, autorka prosi o informację na adres kgb@iigw.pl.



Autorka bardzo dziękuje: profesorowi Andrzejowi Prystajowi i dr inż. Zofii Gręplowskiej za konstruktywną krytykę, Koleżankom i Kolegom z Zakładu za ich pomoc (udostępnienie materiałów i cenne uwagi), a przede wszystkim Mamie i Mężowi za wsparcie w trakcie pisania tego zbioru zadań.

WYKAZ OZNACZEŃ

Symbol	Znaczenie	Jednostka
a	przyspieszenie	m^2/s
A	pole powierzchni	m^2
b	szerokość	m
B_{zw}	szerokość strumienia na poziomie zwierciadła wody	m
d	średnica rurociągu	m
	średnica ziarn gruntu	m
E	energia	m
F	siła	N
Fr	liczba Froude'a	–
G	ciężar	N
h	głębokość, napełnienie, miąższość	m
h_{dt}	wysokość strat energii na długości	m
h_{KR}	głębokość krytyczna	m
h_{lok}	wysokość lokalnych strat energii	m
h_{STR}	wysokość strat energii	m
H	rzędna zwierciadła wody	m n.p.m
	wysokość	m
I	spadek hydrauliczny (spadek linii energii)	–
k	chropowatość bezwzględna przewodu	mm
	współczynnik filtracji gruntu	m/s
K	moduł przepływu	m^3/s
L	długość odskoku hydraulicznego	m
	długość przewodu	m
m	wysokość metacentryczna	m
	współczynnik wydatku przelewu	–
	nachylenie skarpy koryta	–
n	współczynnik szorstkości wg Manninga	$m^{-1/3}s$
p	ciśnienie	Pa
P	parcie	N
p_0	ciśnienie zewnętrzne	Pa
p_a	ciśnienie atmosferyczne	Pa
P_x	pozioma składowa parcia	N
P_y	pionowa składowa parcia	N
q	jednostkowe natężenie przepływu	$m^3/s/m$
Q	objętość przepływu cieczy	m^3/s

Symbol	Znaczenie	Jednostka
R	promień hydrauliczny koryta	m
	zasięg krzywej depresji	m
Re	liczba Reynoldsa	–
R_h	promień hydrauliczny	m
S_0	spadek dna	–
T	siła tarcia	N
	czas opróżniania zbiornika	s
U	obwód zwilżony	m
v	prędkość	m/s
V	objętość	m ³
W	siła wyporu	N
x_C, y_C, z_C	współrzędne środka parcia	m
x_S, y_S, z_S	współrzędne środka ciężkości	m
α	współczynnik St. Venanta	–
γ	ciężar właściwy	N/m ³
φ	współczynnik prędkości	–
λ	współczynnik strat liniowych	–
μ	dynamiczny współczynnik lepkości	Pa·s
	współczynnik wyływu	–
ν	kinematyczny współczynnik lepkości	–
ρ	gęstość cieczy	kg/m ³
ω	prędkość kątowna	rad/s
ζ	współczynnik straty lokalnej	–
Δp	różnica ciśnień	Pa
Σh_{str}	suma strat energii	m

I. HYDROSTATYKA

I.1. CIŚNIENIE

Hydrostatyka jest nauką o cieczy znajdującej się w spoczynku. Zajmuje się przypadkiem równowagi względnej cieczy w naczyniu (gdy cząsteczki cieczy są nieruchome względem siebie, ale poruszają się wraz z naczyniem w którym ciecz) się znajduje i ciał pływających w cieczy.

Na ciecz działają dwa rodzaje sił:

a) siły powierzchniowe

Siły powierzchniowe są siłami działającymi na powierzchnie zewnętrzne ograniczające daną objętość cieczy. Ich wartość jest proporcjonalna do tych powierzchni. Przykładami sił powierzchniowych są siły pochodzące od nacisku tłoka na ciecz lub ciśnienia gazu ponad swobodnym zwierciadłem cieczy.

b) siły masowe

Siły masowe są wynikiem oddziaływania na ciecz zewnętrznych fizycznych pól sił. Ich wartość jest proporcjonalna do masy rozpatrywanej objętości cieczy. Przykładem takich sił jest siła ciężkości, bezwładności, odśrodkowa.

I.1.1. Ciśnienie i parcie hydrostatyczne

Siła parcia cieczy

Parcie hydrostatyczne P (rozumiane jako siła skupiona) jest to siła, z jaką ciecz pozostająca w stanie równowagi (spoczynku) działa na ograniczające ją lub zanurzone w niej powierzchnie (np. ściany zbiornika). Siła ta działa prostopadle do powierzchni, ze zwrotem ku tej powierzchni.

Ciśnienie w punkcie cieczy

Jeżeli na powierzchni A w pewnej objętości cieczy znajdującej się w spoczynku wydzielimy jej element ΔA , na który działa siła parcia hydrostatycznego ΔP , to średnia wartość tej siły przypadająca na jednostkę powierzchni nazywa się średnim ciśnieniem hydrostatycznym i wyraża się stosunkiem:

$$p_{sr} = \frac{\Delta P}{\Delta A} \quad (I-1)$$

Ciśnienie hydrostatyczne w punkcie cieczy wyraża stosunek $\Delta P/\Delta A$ gdy pole ΔA jest nieskończenie małe (czyli $\Delta A \rightarrow 0$), zatem:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA} \quad [\text{Pa}] \quad (\text{I-2})$$

UWAGA ! Ciśnienie jest skalarem, a parcie – wektorem.

Ciśnienie atmosferyczne jest ciśnieniem wywieranym przez atmosferę ziemską. W obliczeniach przyjmuje się, że wartość tzw. normalnego ciśnienia atmosferycznego jest równa: $p_a = 101325 \text{ Pa}$.

Ciśnienie mierzone względem próżni nazywa się **ciśnieniem bezwzględnym**.

Nadwyżkę ciśnienia bezwzględnego p ponad ciśnienie atmosferyczne p_a nazywa się **nadciśnieniem lub ciśnieniem piezometrycznym**.

Jeżeli ciśnienie bezwzględne p zaś jest mniejsze od ciśnienia atmosferycznego p_a , to ujemną różnicę między p i p_a nazywa się **podciśnieniem**.

Powierzchnia jednakowych ciśnień to powierzchnia cieczy w każdym punkcie której panuje jednakowe ciśnienie. Jeżeli jedynym ciśnieniem gazu działającym ponad tą powierzchnią jest ciśnienie atmosferyczne, powierzchnię taką nazywa się **swobodnym zwierciadłem cieczy**.

Wysokość ciśnienia h jest miarą ciśnienia, będącą wysokością słupa cieczy o ciężarze γ wywołującego u swej podstawy ciśnienie równe co do wartości ciśnieniu hydrostatycznemu p .

Wysokość ciśnienia atmosferycznego wyrażona wysokością wynosi:

$$\text{słupa wody} \quad \frac{p_a}{\gamma_w} = \frac{101325 \text{ N/m}^2}{9810 \text{ N/m}^3} = 10,325 \text{ m} \cong 10 \text{ m} \quad (\text{I-3})$$

$$\text{słupa rtęci} \quad \frac{p_a}{\gamma_{Hg}} = \frac{101325 \text{ N/m}^2}{133400 \text{ N/m}^3} = 0,7596 \text{ m} \cong 760 \text{ mm} \quad (\text{I-4})$$

I.1.2. Rodzaje równowagi, podstawowe równanie hydrostatyki

1. Ciecz znajduje się w **równowadze względnej**, jeżeli wszystkie cząstki tej cieczy zachowują niezmiennie położenie względem siebie i względem ścian poruszającego się naczynia. Oznacza to, że względem układu współrzędnych związanego z naczyniem w którym znajduje się ciecz, a zatem wykonującego taki sam ruch jak to naczynie, ciecz znajduje się w spoczynku. Względem zaś każdego układu zewnętrznego (związanego z ziemią) ciecz ta jest w ruchu.

Przykłady równowagi względnej cieczy:

- ciecz w naczyniu poruszającym się ze stałą prędkością lub ze stałym przyspieszeniem po równi pochyłej lub pionowo,
 - ciecz w naczyniu wirującym ze stałą prędkością kątową wokół osi pionowej (ze stałym przyspieszeniem odśrodkowym).
2. Ciecz pozostaje w **równowadze bezwzględnej**, gdy również naczynie w którym znajduje się ciecz jest nieruchome. Oznacza to, że zarówno względem układu związanego z naczyniem, jak i każdego zewnętrznego ciecz nie porusza się.

Podstawowe równanie hydrostatyki (równanie Eulera) wyraża zależność między: ciśnieniem p w punkcie, a składowymi a_x, a_y, a_z [m/s²] wypadkowej jednostkowych sił masowych działających na element cieczy znajdujący się w tym punkcie.

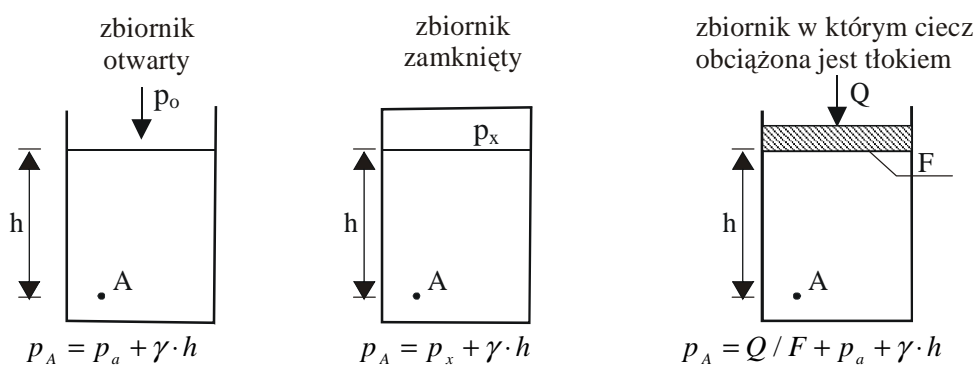
$$dp = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz) \quad (I-5)$$

gdzie ρ jest gęstością cieczy.

I.1.3. Obliczanie ciśnienia w punkcie cieczy

Ciśnienie w dowolnym punkcie cieczy jest równe sumie ciśnień wynikających z działania sił powierzchniowych i z działania siły ciężkości cieczy, skąd wynika wzór:

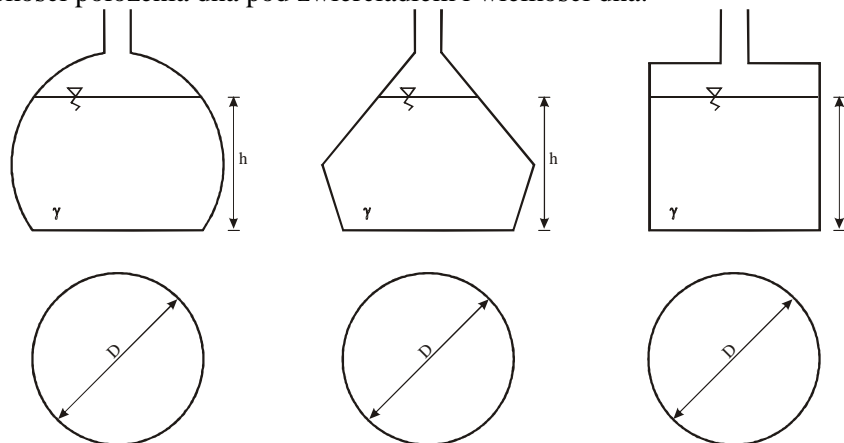
$$p = p_0 + \gamma \cdot h \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \quad (I-6)$$



gdzie: p_A – ciśnienie w punkcie A,
 h – głębokość zanurzenia punktu A pod zwierciadłem cieczy,
 p_x – ciśnienie w zbiorniku zamkniętym ponad zwierciadłem cieczy,
 Q – siła nacisku tłoka na zwierciadło cieczy,
 F – powierzchnia tłoka.

Paradoks hydrostatyczny – twierdzenie Stevina

Parcie hydrostatyczne na poziome dno naczynia nie zależy od kształtu naczynia ani od ilości zawartej w nim cieczy, ale wyłącznie od ciężaru właściwego cieczy, głębokości położenia dna pod zwierciadłem i wielkości dna.



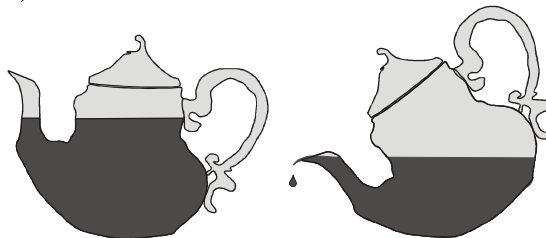
Rys. I-1

Zgodnie z twierdzeniem Stevina jeżeli naczynia przedstawione na rys. I-1 wypełnione są tą samą cieczą, parcie cieczy na dno w każdym przypadku jest jednakowe i wynosi:

$$P = \frac{\pi D^2}{4} h \gamma \quad (I-7)$$

I.1.4. Naczynia połączone

Obliczając ciśnienie w dowolnych punktach naczyń połączonych wypełnionych jedną cieczą należy pamiętać, że ciśnienie w punktach leżących na jednym poziomie jest jednakowe (zasadę tę wykorzystujemy np. wylewając wodę z czajnika – rys. I-2).

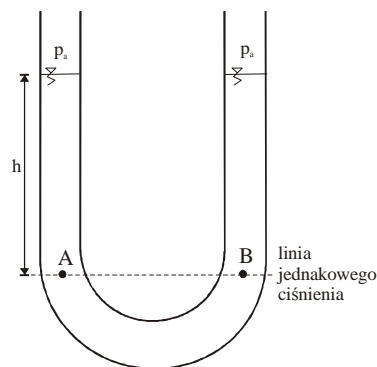


Rys. I-2

W przypadku gdy naczynia połączone wypełnione są różnymi niemieszającymi się cieczami, ciśnienie hydrostatyczne na granicy rozdziału każdej z cieczy jest jednakowe, a więc ciśnienie hydrostatyczne dla dolnej cieczy jest takie samo jak dla górnej.

a) Naczynia otwarte, wypełnione jednorodną cieczą

W przypadku, gdy naczynia połączone wypełnione są jednorodną cieczą, wówczas we wszystkich naczyniach zwierciadło cieczy ułoży się na takim samym poziomie.

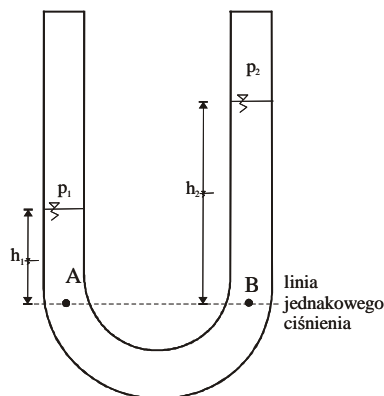


Rys. I-3

Ciśnienie w dowolnych dwóch punktach A i B leżących na takiej samej głębokości h jest jednakowe, czyli:

$$p_A = p_B = p_a + \gamma h \quad (I-8)$$

b) Naczynia zamknięte, wypełnione jednorodną cieczą – różne ciśnienia



Rys. I-4

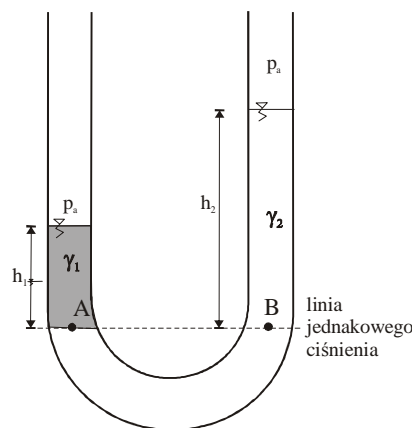
Gdy ciecz w naczyniach jest jednorodna, ale ciśnienia działające na zwierciadła są różne, wówczas można zapisać:

$$p_A = p_1 + \gamma h_1 = p_B = p_2 + \gamma h_2 \quad (\text{I-9})$$

$$p_1 - p_2 = \gamma(h_2 - h_1) \quad (\text{I-10})$$

Powyższy zapis oznacza, że różnicę ciśnień ponad zwierciadłami można mierzyć różnicą poziomów tych zwierciadła w naczyniach.

c) Naczynia otwarte, wypełnione dwoma cieciami niemieszającymi się ze sobą



Rys. I-5

W przypadku, gdy w naczyniach połączonych znajdują się dwie niemieszające się ze sobą cieczy o ciężarach właściwych γ_1 i γ_2 w płaszczyźnie styku tych cieczy ciśnienie jest jednakowe, a zatem można zapisać:

$$p_A = p_a + \gamma_1 h_1 = p_B = p_a + \gamma_2 h_2 \quad (\text{I-11})$$

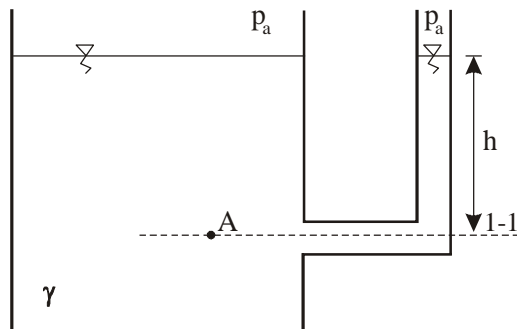
$$\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2 \Leftrightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (\text{I-12})$$

Powyższy zapis oznacza, że w rozważanym przypadku stosunek wysokości słupów dwóch niemieszających się cieczy ponad płaszczyznę ich styku jest równy odwrotnemu stosunkowi ich ciężarów właściwych.

I.1.5. Przyrządy do pomiaru ciśnienia

a) Piezometr

Piezometr jest najprostszym przyrządem służącym do pomiaru niewielkich nadciśnień i podciśnień. Przyrząd ten jest pojedynczą, otwartą rurką wypełnioną cieczą, której ciśnienie mierzymy. Na zwierciadło cieczy w piezometrze działa ciśnienie atmosferyczne p_a . Wysokość h słupa cieczy w rurce jest zatem wysokością nadciśnienia, czyli wysokością ciśnienia piezometrycznego na powierzchni jednakowych ciśnień 1-1.



Rys. I-6 Piezometr

PRZYKŁAD I-1

Oblicz ciśnienie i nadciśnienie w punkcie A zbiornika (rys. I-6), jeżeli woda w rurce piezometrycznej wznosi się na wysokość h .

Dane: $h = 100 \text{ cm}$, $p_a = 1013 \text{ hPa}$, $\gamma_w = 9,81 \text{ kN/m}^3$

Szukane: p_A , $p_A - p_a$

Rozw.:

Wartość ciśnienia w punkcie A:

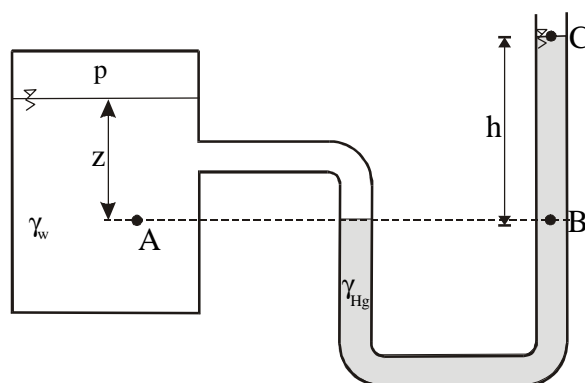
$$p_A = p_a + \gamma h = 101,3 \text{ kPa} + 9,81 \cdot 1 \text{ kPa} = 111,11 \text{ kPa} \quad (\text{I-13})$$

Wartość nadciśnienia w punkcie A:

$$p_A - p_a = \gamma \cdot h = 9,81 \cdot 1 \text{ kPa} = 9,81 \text{ kPa} \quad (\text{I-14})$$

b) Manometr cieczowy otwarty

Manometr cieczowy wykonany jest z rurki szklanej, wygiętej w kształcie litery U, której jeden koniec jest otwarty. Rurka ta wypełniona jest cieczą manometryczną (z reguły jest nią rtęć) o gęstości większej niż gęstość badanej cieczy.



Rys. I-7 Manometr cieczowy otwarty

PRZYKŁAD I-2

Oblicz ciśnienie p gazu działające na powierzchnię zwierciadła wody w zbiorniku zamkniętym (rys. I-7).

Dane: $h = 100 \text{ cm}$, $\gamma_{Hg} = 133,4 \text{ kN/m}^3$, $z = 20 \text{ cm}$,
 $p_a = 1013 \text{ hPa}$, $\gamma_w = 9,81 \text{ kN/m}^3$

Szukane: p

Rozw.:

Ciśnienia w punktach A i B są jednakowe, czyli:

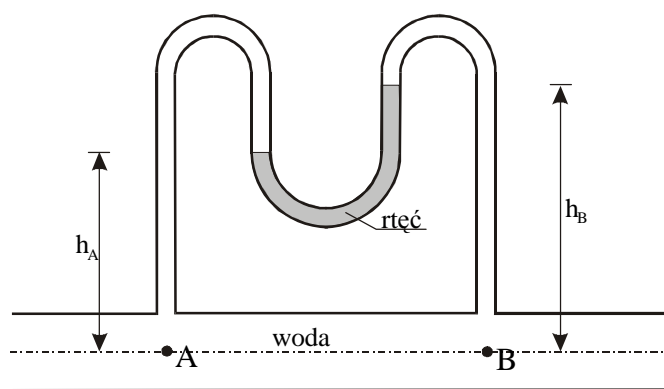
$$\begin{aligned} p_A &= p_B = p + \gamma_w z \\ p_A &= p_B = p_a + \gamma_{Hg} h \end{aligned} \Rightarrow p = p_a + \gamma_{Hg} h - \gamma_w z \quad (\text{I-15})$$

Po podstawieniu danych:

$$p = 101,3 + 133,4 \cdot 1 - 9,81 \cdot 0,2 = 232,7 \text{ kPa} \quad (\text{I-16})$$

c) Manometr różnicowy

Manometr różnicowy służy do pomiaru różnicy ciśnienia w dwóch punktach cieczy. Przyrząd ten jest wygiętą szklaną rurką wypełnioną cieczą manometryczną jak na rys. I-8.



Rys. I-8 Manometr cieczowy otwarty

PRZYKŁAD I-3

Znaleźć różnicę ciśnień hydrostatycznych w punktach A i B rurociągu, którym płynie woda (rys. I-8). Różnica zwierciadeł rtęci w rurce manometrycznej wynosi h .

$$\begin{aligned} \text{Dane:} \quad & h = h_A - h_B = 0,5 \text{ m}, \gamma_{Hg} = 133,4 \text{ kN/m}^3 \\ \text{Szukane:} \quad & p_A - p_B \end{aligned}$$

Rozw.:

Zapisując równanie ciśnień (wg prawa naczyń połączonych) otrzymuje się:

$$p_A - \gamma_W \cdot h_A - \gamma_{Hg} \cdot h + \gamma_W h_W = p_B \quad (\text{I-17})$$

Po przekształceniu:

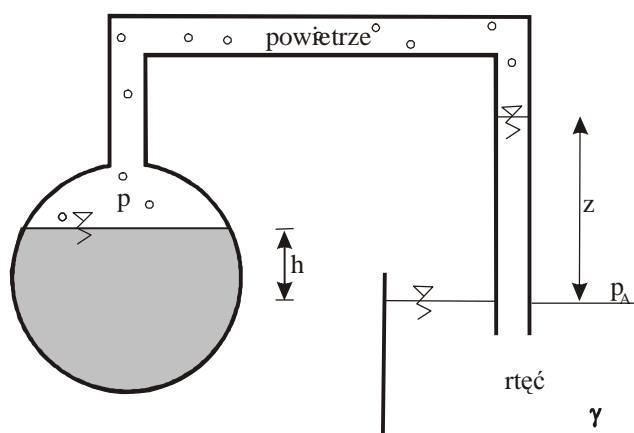
$$p_A - p_B = h \cdot (\gamma_{Hg} - \gamma_W) \quad (\text{I-18})$$

Szukana różnica ciśnień wynosi zatem:

$$p_A - p_B = 0,5 \cdot (133,4 - 9,81) = 61,8 \text{ Pa} \quad (\text{I-19})$$

d) Wakuometr

Wakuometr jest przyrządem służącym do pomiaru podciśnienia. Wykonany jest z rurki łączącej zbiornik, w którym panuje szukane podciśnienie oraz naczynie wypełnione cieczą manometryczną. Dzięki działaniu ciśnienia atmosferycznego ciecz manometryczna zostaje wtłoczona do rurki na wysokość odpowiadającą wysokości podciśnienia.



Rys. I-9 Wakuometr

PRZYKŁAD I-4

Obliczyć podciśnienie p nad zwierciadłem cieczy w zamkniętym zbiorniku wypełnionym wodą (rys. I-9). Jaki popełnia się błąd względny ε , jeżeli zaniedbuje się zmianę ciśnienia powietrza zachodzącą wraz z wysokością?

Dane: $\gamma_{Hg} = 133400 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{pow} = 12 \text{ N/m}^3$, $p_a = 101325 \text{ Pa}$,
 $z = 0,5 \text{ m}$, $h = 0,2 \text{ m}$

Szukane: p , ε

Rozw.:

Szukane ciśnienie na poziomie zwierciadła wody w zbiorniku wynosi:

$$p = \gamma_{pow}(z - h) - \gamma_{rt}z + p_a \quad (\text{I-20})$$

Po podstawieniu danych:

$$p = 12 \cdot (0,5 - 0,2) - 133400 \cdot 0,5 + 101325 = 34628,6 \text{ Pa} \quad (\text{I-21})$$

Pomijając zmianę ciśnienia powietrza wraz z wysokością:

$$p = p_a - \gamma_{rt} z = 101325 - 133400 \cdot 0,5 = 34625 \text{ Pa} \quad (\text{I-22})$$

Błąd względny jaki popełniamy przy pominięciu działania gazu:

$$\varepsilon = \frac{34628,6 - 34625}{34628,6} = 0,06 \% \quad (\text{I-23})$$

Tak mały błąd popełniamy przy pominięciu ciśnienia gazu tylko przy małych różnicach wysokości. Dlatego ciśnienie to można pominąć w przypadku zbiorników.

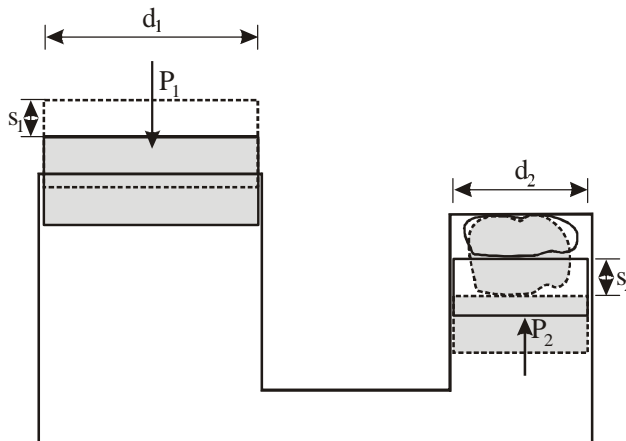
I.1.6. Obliczanie ciśnienia w punkcie – zadania

PRZYKŁAD I-5 Prasa hydrauliczna

Na ciecz znajdującą się w dwóch połączonych ze sobą naczyniach (rys. I-10) działa tłok o średnicy d_1 z siłą P_1 . Obliczyć z jaką siłą P_2 drugi tłok o średnicy d_2 prasuje przedmiot nad nim umieszczony i o ile zostanie przesunięty w górę, jeżeli pierwszy z tłoków opuszczono o s_1 .

Uwaga: Wpływ ciśnienia wywołanego siłą ciężkości jest pomijalnie mały w stosunku do ciśnienia wywołanego działaniem sił powierzchniowych.

Dane: $d_1 = 5 \text{ cm}$, $d_2 = 50 \text{ cm}$, $s_1 = 10 \text{ cm}$, $P_1 = 500 \text{ N}$
 Szukane: s_2



Rys. I-10 Prasa hydrauliczna

Rozw.:

Pierwszy tłok wytwarza ciśnienie:

$$p_1 = P_1 / A_1 \quad (I-24)$$

Zmianę ciśnienia związaną z działaniem sił masowych (czyli zmianę ciśnienia cieczy wraz z głębokością) możemy pominąć, gdyż jest ona nieistotna wobec wartości ciśnienia wytwarzanego przez tłok. Można zatem przyjąć, że zgodnie z prawem Pascala, ciecz wywiera na tłok takie samo ciśnienie. Zatem na ten tłok ciecz oddziałuje z siłą:

$$P_2 = p_1 A_2 \quad (I-25)$$

Czyli:

$$P_2 = P_1 \cdot A_2 / A_1 = P_1 \cdot d_2^2 / d_1^2 = 50000 \text{ N} \quad (I-26)$$

Aby obliczyć przesunięcie drugiego tłoka należy wykorzystać zasadę zachowania energii (w postaci bilansu pracy wykonanej przez oba tłoki), według której praca wykonana przez siłę P_1 na drodze s_1 jest równa pracy wykonanej przez siłę P_2 na drodze s_2 .

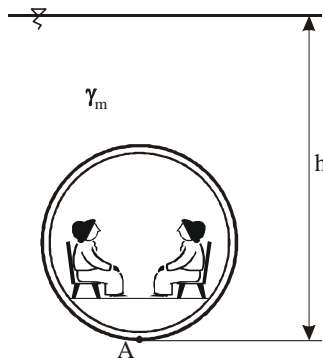
$$P_1 \cdot s_1 = P_2 \cdot s_2 \quad (I-27)$$

Podstawiając dane liczbowe do powyższego wzoru obliczyć można przesunięcie:

$$s_2 = P_1 \cdot s_1 / P_2 = 500 \cdot 10 / 50000 = 0,1 \text{ cm} = 1 \text{ mm} \quad (I-28)$$

PRZYKŁAD I-6

August Piccard w swoim batyskafie (będącym stalową kulą o średnicy 2,18 m) opuścił się na głębokość h na dno Rowu Mariańskiego. Obliczyć jakie ciśnienie p_A działa na dno tego batyskafu (w punkcie A).



Rys. I-11

Dane: $h = 10912 \text{ m}, \gamma_m = 10105 \text{ N/m}^2$
Szukane: p

Rozw:

Ciśnienie na dno batyskafu obliczyć można ze podstawowego wzoru na ciśnienie w punkcie cieczy (I-6):

$$p_A = p_a + \gamma_m h = 101325 + 10105 \cdot 10912 \cong 110 \text{ MPa} = 1089 \text{ atm} \quad (\text{I-29})$$

PRZYKŁAD I-7

W wodzie morskiej o ciężarze właściwym γ_m pływa płetwonurek. Obliczyć na jakiej głębokości h bezwzględne ciśnienie hydrostatyczne przekroczy wartość p .

Dane: $\gamma_m = 10 \text{ kN/m}^3, p = 400 \text{ kPa}$
Szukane: h

Rozw.:

Ciśnienie w dowolnym punkcie morza można obliczyć wg wzoru (I-6):

$$p = p_a + \gamma_m h \quad (\text{I-30})$$

Po przekształceniu:

$$h = \frac{p - p_a}{\gamma_m} = \frac{400 - 101,325}{10} \cong 30 \text{ m} \quad (\text{I-31})$$

PRZYKŁAD I-8

Oblicz różnicę ciśnień pomiędzy punktami: A na głębokości h_A , a B – h_B .

Dane: $h_A = 10 \text{ m}, h_B = 15 \text{ m}$
Szukane: $p_A - p_B$

Rozw.:

Różnica ciśnień w punktach A i B na podstawie (I-6) wynosi:

$$p_B - p_A = p_a + \gamma h_B - p_a - \gamma h_A = \gamma (h_B - h_A) \quad (\text{I-32})$$

Podstawiając dane:

$$p_B - p_A = 9,81 \cdot (15 - 10) = 49,05 \text{ kPa} \quad (\text{I-33})$$

PRZYKŁAD I-9

Oblicz ciśnienie na dnie zbiornika wypełnionego oliwą i wodą o wysokości H .

Dane: $h_{ol} = 2 \text{ m}, H = 5 \text{ m}, \rho_{ol} = 0,9 \text{ kg/l}$

Szukane: p

Rozw.:

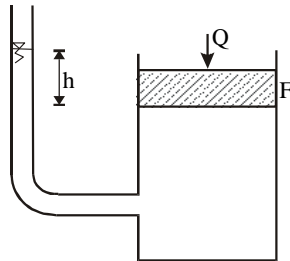
Ponieważ oliwa ma mniejszą gęstość niż woda, tworzy warstwę na powierzchni wody. Ciśnienie na dnie naczynia wynosi zatem:

$$p = \gamma_{ol} h_{ol} + \gamma_w (H - h_{ol})$$

$$p = 900 \cdot 9,81 \cdot 2 + 9810 \cdot 3 = 47088 \text{ Pa} = 47,088 \text{ kPa} \quad (\text{I-34})$$

PRZYKŁAD I-10

O ile wzniesie się zwierciadło wody w piezometrze, gdy na wodę działa tłok siłą Q ?



Rys. I-12

Dane: $Q = 10 \text{ N}, F = 50 \text{ cm}^2$

Szukane: h

Rozw.:

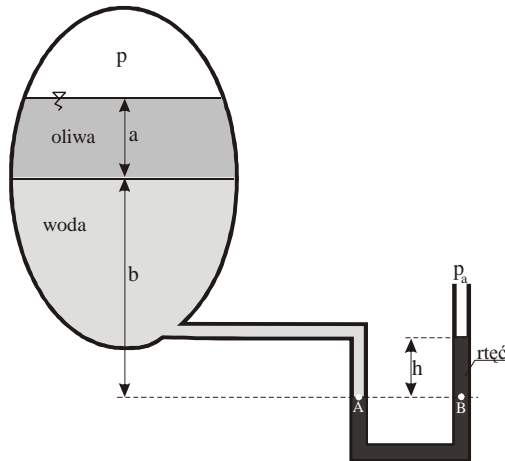
Szukana wartość h wynosi:

$$h = \frac{Q}{F \cdot \gamma} = \frac{10}{\frac{50}{10000} \cdot 9810} = 0,20 \text{ m} \quad (\text{I-35})$$

PRZYKŁAD I-11

Do zbiornika wypełnionego powietrzem, olejem i wodą (jak na rys. I-13) podłączono manometr rtęciowy. Obliczyć nadciśnienie p panujące w zbiorniku, jeżeli różnica poziomów rtęci jaką wskazał manometr wynosi h

Dane: $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $h = 0,5 \text{ m}$,
 $\gamma_{\text{rtęci}} = 133400 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{\text{wody}} = 9810 \text{ N/m}^3$, $\gamma_{\text{oliwy}} = 9025 \text{ N/m}^3$,
Szukane: p



Rys. I-13

Rozw.:

Zgodnie z prawem naczyń połączonych (patrz rozdział I.1.4), ciśnienia na jednakowych wysokościach jest identyczne, czyli ciśnienie w punkcie A jest równe ciśnieniu w punkcie B:

$$p + p_a + \gamma_{\text{oliwy}} a + \gamma_{\text{wody}} b = p_a + \gamma_{\text{rtęci}} h \quad (\text{I-36})$$

Z powyższego równania wyliczyć można szukane nadciśnienie :

$$p = \gamma_{\text{rtęci}} h - \gamma_{\text{oliwy}} a - \gamma_{\text{wody}} b \quad (\text{I-37})$$

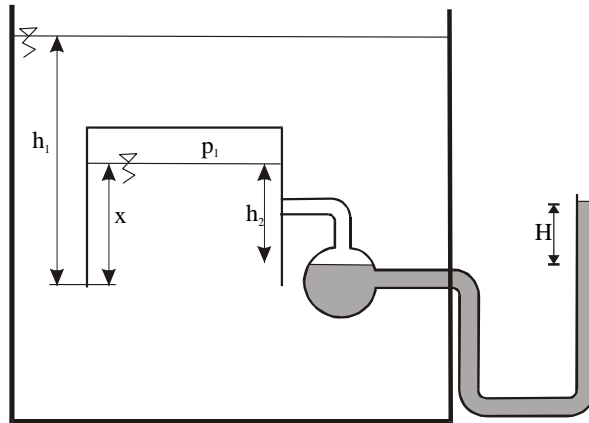
Po podstawieniu danych liczbowych:

$$p = 133400 \cdot 0,5 - 9025 \cdot 1 - 9810 \cdot 2 = 38055 \text{ Pa} \cong 38 \text{ kPa} \quad (\text{I-38})$$

PRZYKŁAD I-12

Odwrócona szklanka zanurzona została w wodzie na głębokość h_1 i połączona z manometrem rtęciowym (rys. I-14). Na jaką wysokość x wzniesie się woda w szklance, jeżeli różnica zwierciadeł w manometrze wynosi H ? Ile wynosi ciśnienie p_1 ?

Dane: $h_1 = 2 \text{ m}$, $h_2 = 0,5 \text{ m}$, $H = 0,1 \text{ m}$
Szukane: x , p_1



Rys. I-14

Rozw.:

Ponieważ rurka manometru jest z jednej strony otwarta, więc zapisując ciśnienia na poziomie zwierciadła rtęci w manometrze, od strony naczynia i od strony rurki manometru otrzymuje się:

$$p_a + \gamma_r H = p_1 + \gamma h_2 \Rightarrow p_1 = p_a + \gamma_r H - \gamma h_2 \quad (\text{I-39})$$

Analogicznie zapisując ciśnienia na poziomie zwierciadła wody w szklance, od strony manometru i szklanki:

$$p_1 + \gamma \cdot x = p_a + \gamma h_1 \Rightarrow x = (p_a - p_1) / \gamma + h_1 \quad (\text{I-40})$$

Z równań (I-39) i (I-40) wyliczyć można szukaną wysokość x :

$$x = \frac{p_a - p_a - \gamma_r H + \gamma h_2}{\gamma} + h_1 = h_1 + h_2 - \frac{\gamma_r}{\gamma} H \quad (\text{I-41})$$

Po podstawieniu danych:

$$x = 2 + 0,5 - \frac{133400}{9810} \cdot 0,1 = 1,14 \text{ m} \quad (\text{I-42})$$

Ciśnienie ponad zwierciadłem wody w szklance wynosi zatem:

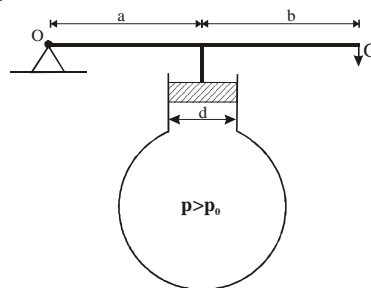
$$p_1 = p_a + \gamma_r H - \gamma h \quad (\text{I-43})$$

$$p_1 = 101325 + 133400 \cdot 0,1 - 9810 \cdot 2 = 95045 \text{ Pa} \cong 950 \text{ hPa} \quad (\text{I-44})$$

PRZYKŁAD I-13

Jaki powinien być ciężar G , aby tłok o średnicy d (rys. I-15) nie przemieścił się pod wpływem ciśnienia p .

Dane: $a = 20 \text{ cm}$, $b = 100 \text{ cm}$, $d = 10 \text{ cm}$,
 $p = 5 \text{ atm} = 5075 \text{ hPa}$
Szukane: G



Rys. I-15

Rozw.:

Warunek równowagi układu względem punktu O przyjmuje postać:

$$\sum M_O = 0 \quad (\text{I-45})$$

Siły działające na układ to: ciężar G i siła pochodząca od ciśnienia p .
Równanie momentów tych sił ma zatem postać:

$$G(a+b) - (p-p_0) \frac{\pi d^2}{4} a = 0 \quad (\text{I-46})$$

Po przekształceniu powyższego równania:

$$G = \frac{(p-p_0)\pi d^2 a}{4 \cdot (a+b)} \quad (\text{I-47})$$

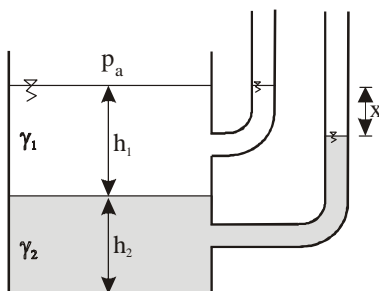
Podstawiając dane liczbowe do równania (I-47) obliczamy szukaną wartość G :

$$G = \frac{(507500 - 101325)\pi \cdot 0,1^2 \cdot 0,2}{4 \cdot (0,2 + 1)} = \frac{2555,57}{4,8} = 532 \text{ N} \quad (\text{I-48})$$

PRZYKŁAD I-14

Do naczynia wiano dwie niemieszające się ciecze o ciężarach właściwych γ_1 , γ_2 i wysokościach h_1 i h_2 . Określić różnicę poziomów wody w piezometrach.

Dane: $\gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2$
 Szukane: x



Rys. I-16

Rozw.:

Ciśnienie p na styku warstw cieczy można zapisać jako:

$$p = p_a + \gamma_1 h_1 = \gamma_2 (h_1 - x) + p_a \quad (\text{I-49})$$

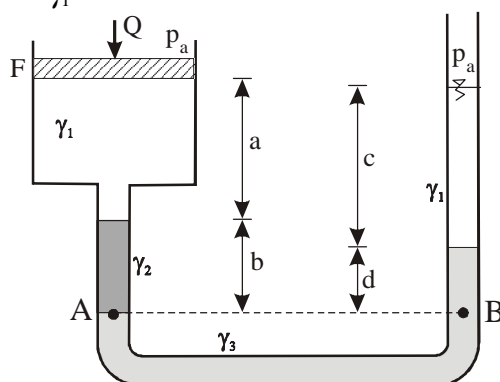
Zatem szukana różnica poziomów wynosi:

$$x = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_2} h_1 \quad (\text{I-50})$$

PRZYKŁAD I-15

Obliczyć ciężar właściwy cieczy γ_1 w przypadku gdy naczynia wypełnione są różnymi niemieszającymi się ze sobą cieczami (jak na rys. I-17).

Dane: $\gamma_2, \gamma_3, a, b, c, d, Q, F$
 Szukane: γ_1



Rys. I-17

Rozw.:

Na podstawie zasady naczyń połączonych (patrz rozdział I.1.4):

$$p_A = p_a + \frac{Q}{F} + \gamma_1 a + \gamma_2 b \quad (\text{I-51})$$

$$p_B = p_a + \gamma_1 c + \gamma_3 d \quad (\text{I-52})$$

Ciśnienia w punktach leżących na tej samej wysokości są jednakowe, czyli p_A jest równe p_B , stąd:

$$p_a + \frac{Q}{F} + \gamma_1 a + \gamma_2 b = p_a + \gamma_1 c + \gamma_3 d \quad (\text{I-53})$$

Z powyższego równania wyliczyć można szukany ciężar właściwy:

$$\gamma_1 = \frac{\gamma_3 d - \gamma_2 b - \frac{Q}{F}}{a - c} \quad (\text{I-54})$$

I.1.7. Zmiana ciśnienia gazu związaną ze zmianą jego objętości (zastosowanie prawa Boyle'a–Mariotte'a)

Prawo Boyle'a-Mariotte'a zapisać można jako:

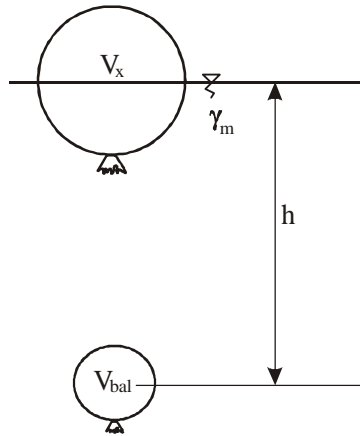
$$pV = \text{const} \quad (\text{I-55})$$

Powyższy zapis oznacza, że jeżeli dana masa gazu utrzymywana jest w stałej temperaturze, jego ciśnienie p jest odwrotnie proporcjonalne do objętości V .

PRZYKŁAD I-16

O ile zwiększy się balonik wypełniony powietrzem do objętości V_{bal} wypuszczony na głębokości h ?

$$\begin{array}{ll} \text{Dane:} & h = 10 \text{ cm, } \gamma_m = 101 \text{ kN/m}^3, V_{bal} = 5 \text{ l} \\ \text{Szukane:} & V_x \end{array}$$



Rys. I-18

Rozw.:

Przy założeniu stałości temperatury, na podstawie prawa Boyle'a – Mariotte'a zapisać można następujący związek:

$$p_{10}V_{bal} = p_a V_x, \quad (I-56)$$

gdzie: p_{10} – ciśnienie na głębokości 10 m,
 V_{bal} – początkowa objętość balonika,
 V_x – objętość balonika na powierzchni morza.

Ciśnienie p_{10} jest ciśnieniem na głębokości 10 m, które można obliczyć jako:

$$p_{10} = p_a + h \cdot \gamma_m = 101325 + 10 \cdot 10100 = 202325 \text{ Pa}, \quad (I-57)$$

$$V_x = \frac{p_{10}V_{bal}}{p_a} = \frac{202325 \cdot 0,005}{101325} = 0,01 \text{ m}^3 = 10 \text{ cm}^3, \quad (I-58)$$

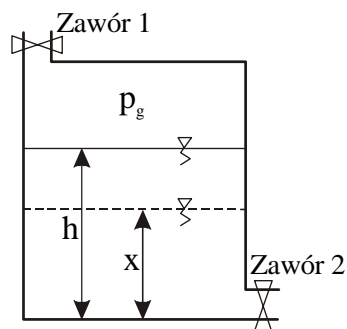
Objętość balonika zwiększyła się dwukrotnie (z 5 do 10 litrów).

PRZYKŁAD I-17

Do walcowatego naczynia (rys. I-19) o wysokości H wlewo przez zawór 1 do wysokości h . Po otwarciu zaworu 2, naczynie zaczęło się opróżniać. Obliczyć na jakiej wysokości x woda w naczyniu przestanie wypływać i jakie będzie wtedy panowało ciśnienie p_g w naczyniu.

Dane: $h = 50 \text{ cm}, H = 70 \text{ cm}, \gamma_w = 9,81 \text{ kN/m}^3$

Szukane: p_g, x



Rys. I-19

Rozw.:

W trakcie opróżniania naczynia, poziom zwierciadła wody obniża się, rośnie natomiast objętość gazu znajdującego się ponad zwierciadłem wody – gaz rozpręża się. Pomimo otwartego zaworu woda z naczynia przestanie wypływać, gdy suma ciśnienia gazu p_g warstwy wody w zbiorniku zrównoważy się z ciśnieniem atmosferycznym panującym na zewnątrz naczynia.

Równanie równowagi przyjmie zatem postać:

$$p_a = p_g + \rho x \Rightarrow p_g = p_a - \rho x \quad (I-59)$$

Przy założeniu, że przemiana jest izotermiczna, na podstawie twierdzenia Boyle'a – Mariotte'a zapisać można następujący związek:

$$p_a V_0 = p_g V_g \quad (I-60)$$

gdzie V_0 jest objętością gazu przed rozprężeniem wynoszącą:

$$V_0 = \frac{\pi D^2}{4} (H - h), \quad (I-61)$$

a V_g – objętością gazu gdy woda przestanie wypływać z naczynia równą:

$$V_g = \frac{\pi D^2}{4} (H - x). \quad (I-62)$$

Ciśnienie gazu p_g na podstawie powyższych równań wyraża się zależnością:

$$p_g = \frac{V_0}{V_g} p_a = \frac{H - h}{H - x} p_a \quad (I-63)$$

Porównując prawe strony równań (I-59) i (I-63) otrzymujemy:

$$p_a - \gamma x = \frac{H-h}{H-x} p_a \quad (\text{I-64})$$

Po przekształceniu powyższego wzoru, otrzymuje się równanie kwadratowe postaci:

$$\gamma x^2 - (p_a + H\gamma)x + p_a h = 0 \quad (\text{I-65})$$

Po podstawieniu danych i obustronnym podzieleniu przez 1000:

$$9,81x^2 - 108,17x + 50,65 = 0 \quad (\text{I-66})$$

Wyróżnik równania powyższego równania kwadratowego:

$$\Delta = 108,17^2 - 4 \cdot 9,81 \cdot 50,65 = 9713 \quad (\text{I-67})$$

Szukana wysokość x wynosi zatem:

$$x = \frac{108,17 - \sqrt{9713}}{2 \cdot 9,81} = 0,49 \text{ m} \quad (\text{I-68})$$

Woda w zbiorniku obniżyła się zatem o 1 cm.

I.1.8. Rozkład ciśnień na prostokątne ściany płaskie – graficzna interpretacja prawa Pascala i prawa Eulera

Prawo Pascala:

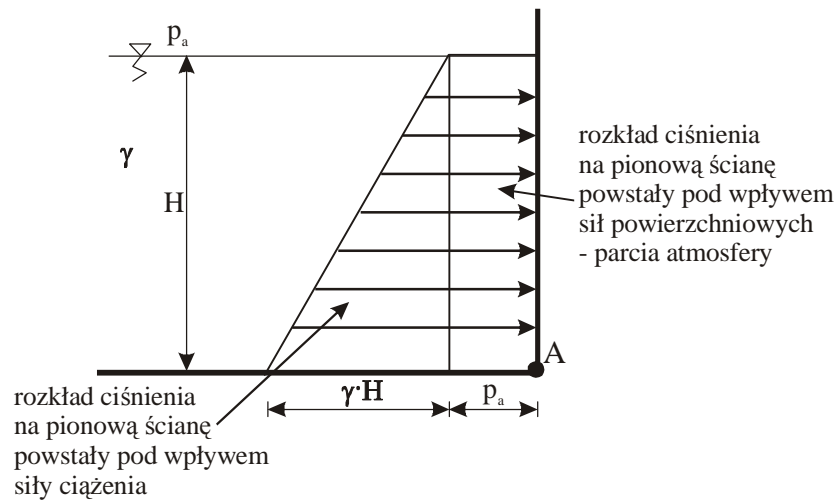
Jeżeli działanie sił masowych można zaniedbać (jest pomijalnie małe), wówczas na ciecz działają jedynie siły powierzchniowe, a zatem ciśnienie ma jednakową wartość w każdym punkcie cieczy: $p = p_0$.

Z prawa tego wynika, że ciśnienie zewnętrzne przenosi się w każdym punkcie cieczy w niezmięnionej wartości.

Prawo Eulera:

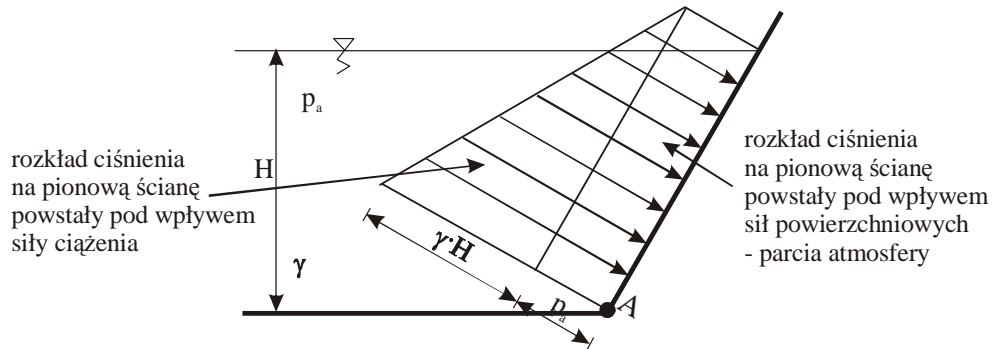
Wartość ciśnienia w dowolnym punkcie cieczy pozostającej w spoczynku jest niezależna od orientacji przestrzennej powierzchni, na którą działa (czyli ciśnienie jest skalarem, a zatem w jednym punkcie może istnieć tylko jedna wartość ciśnienia)

a) Rozkład ciśnień na ścianę płaską - pionową lub pochyłą



Rys. I-20

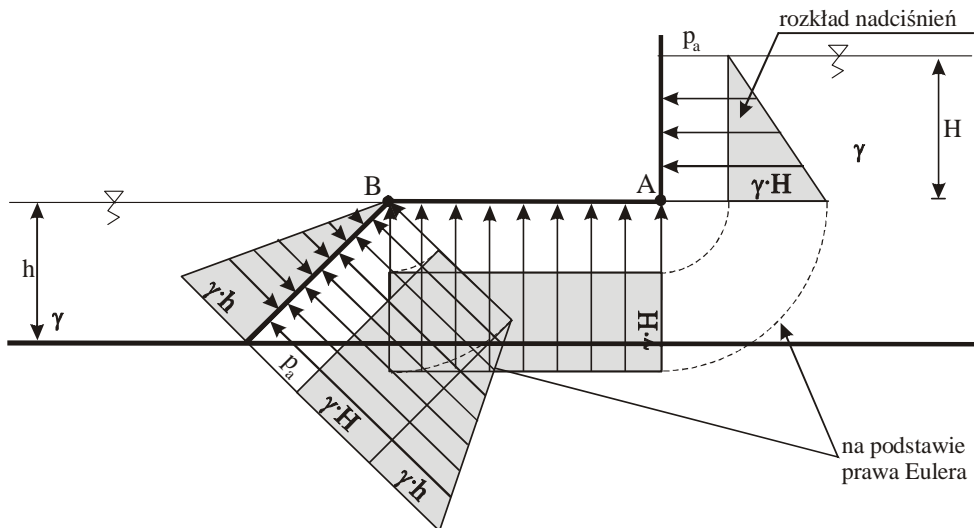
Ciśnienie w punkcie A: $p_A = p_a + \gamma \cdot H$



Rys. I-21

Ciśnienie w punkcie A: $p_A = p_a + \gamma \cdot H$

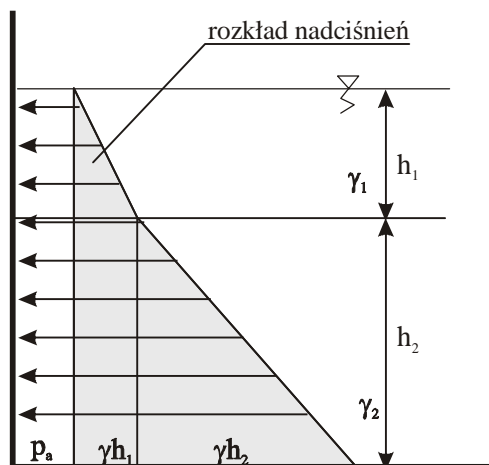
b) Rozkład nacisków $p - p_a$



Rys. I-22

Z prawa Eulera wynika, że w punkcie A ciśnienie ma wartość γH niezależnie czy punkt A przypisany będzie do ściany pionowej czy poziomej. Analogicznie można zastosować prawo Eulera przy rysowaniu rozkładu ciśnień w punkcie B.

c) Rozkład ciśnienia wywieranego przez dwie różne, niemieszające się ze sobą ciecze



Rys. I-23

I.2. PARCIE NA POWIERZCHNIE PŁASKIE

Jeżeli ciśnienie zewnętrzne działa z taką samą wartością, z obu stron na taką samą powierzchnię, to jego działanie ulega wzajemnej redukcji, a siła pochodzi tylko od siły parcia cieczy na tę powierzchnię.

W niniejszym rozdziale rozważa się całkowite parcie na ścianę płaską (a nie jego składowe). Wektor ten jest:

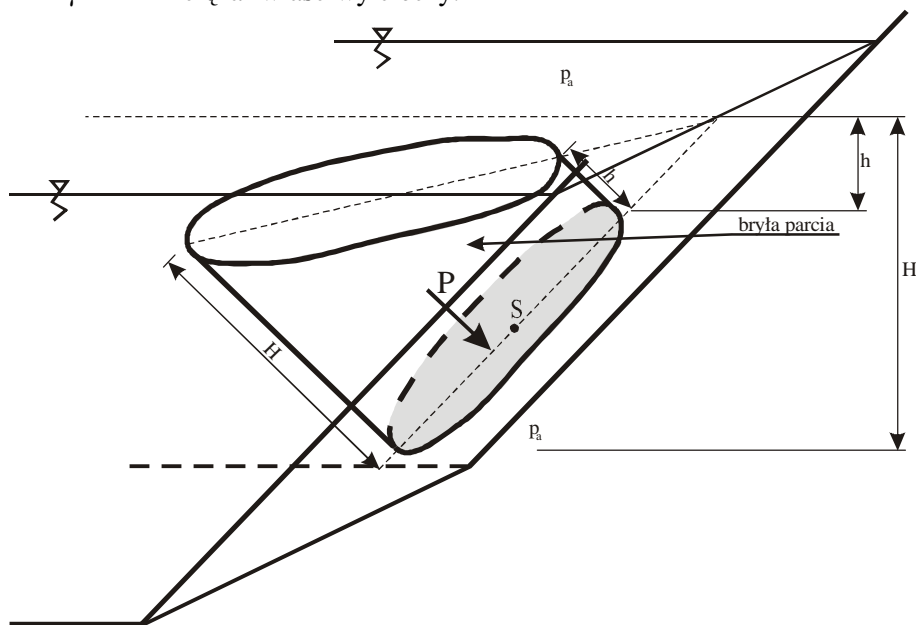
- prostopadły do rozpatrywanej powierzchni,
- skierowany ku powierzchni,
- leży poniżej środka ciężkości ściany (gdy ściana nie jest pozioma).

I.2.1. Metoda graficzno – analityczna obliczania wartości siły parcia

Wartość siły parcia wynosi:

$$P = V_b \cdot \gamma \quad (\text{I-69})$$

gdzie: V_b – objętość tzw. bryły parcia,
 γ – ciężar właściwy cieczy.



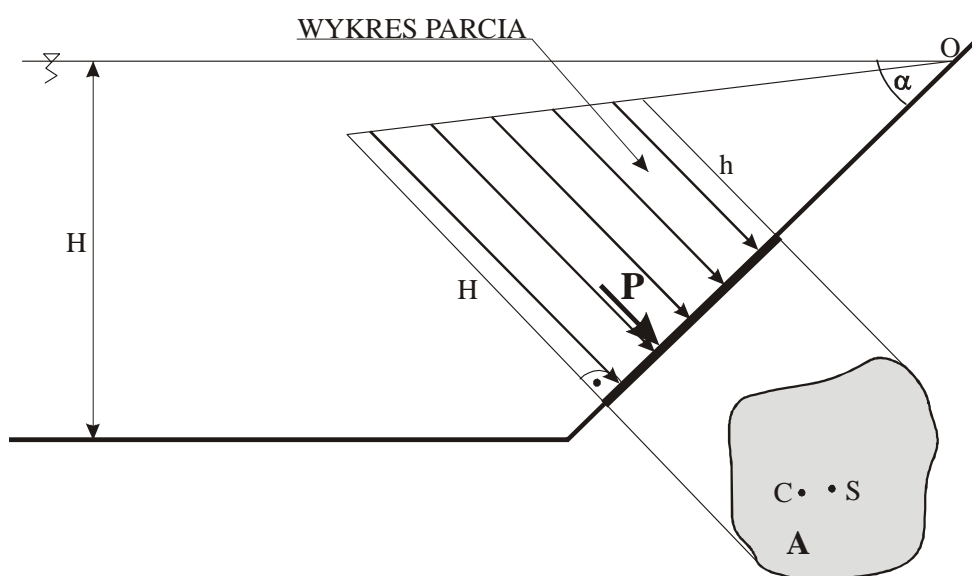
Rys. I-24

Bryła parcia to taka bryła geometryczna, która po wypełnieniu cieczą ma ciężar równy co do wartości sile parcia tej cieczy.

Konstrukcja bryły parcia

W każdym punkcie płaskiej powierzchni A na którą działa ciecz, odkładamy prostopadle do niej odcinek długości równej zagłębieniu tego punktu pod zwierciadłem cieczy.

Pionowy przekrój bryły parcia nazywany jest **wykresem parcia**.



Rys. I-25 Bryła parcia na ścianę zbiornika
(C – środek parcia, S – środek ciężkości)

W przypadku działania ciśnienia zewnętrznego p nad zwierciadłem cieczy, należy:

- podnieść poziom zwierciadła o wartość p/γ tworząc tzw. zwierciadło zastępcze (zastępując w ten sposób ciśnienie zewnętrzne ciśnieniem dodatkowej cieczy),
- skonstruować bryłę parcia licząc zagłębienia punktów od powierzchni zwierciadła zastępczego,
- obliczyć ciężar powstałej bryły parcia.

Środek parcia C

Jest to punkt na powierzchni A jest to punkt w którym wektor parcia przebija powierzchnię na którą wyznaczamy parcie. Jest to prostokątny rzut środka ciężkości bryły parcia na powierzchnię A .

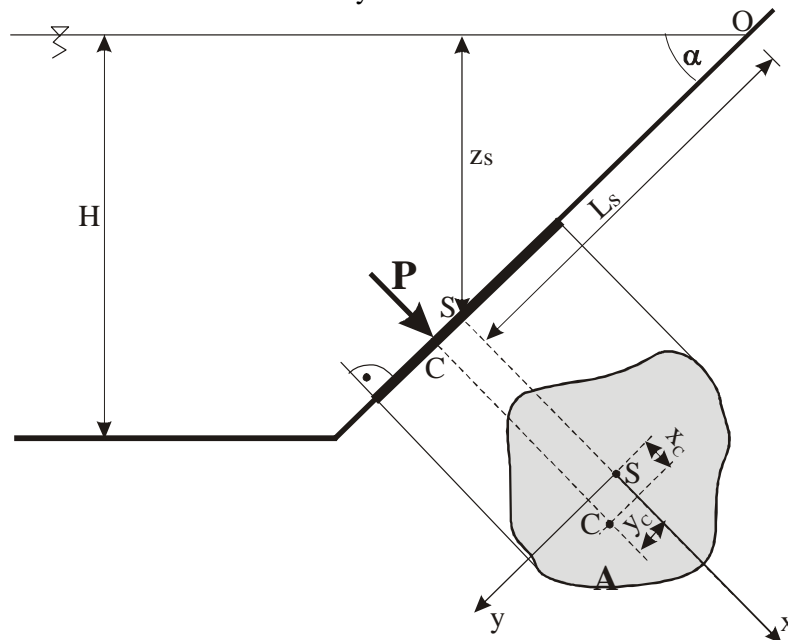
I.2.2. Metoda analityczna obliczania wartości siły parcia

W metodzie tej przyjmuje się układ współrzędnych (x, y) o początku w środku ciężkości ściany na którą obliczamy parcie (rys. I-26).

Wartość siły parcia cieczy na powierzchnię płaską oblicza się według wzoru:

$$P = \gamma \cdot z_s \cdot A \quad (\text{I-70})$$

gdzie: A – pole powierzchni na którą obliczamy parcie,
 γ – ciężar objętościowy cieczy,
 z_s – pionowe zagłębienie środka ciężkości powierzchni A pod zwierciadłem cieczy.



Rys. I-26

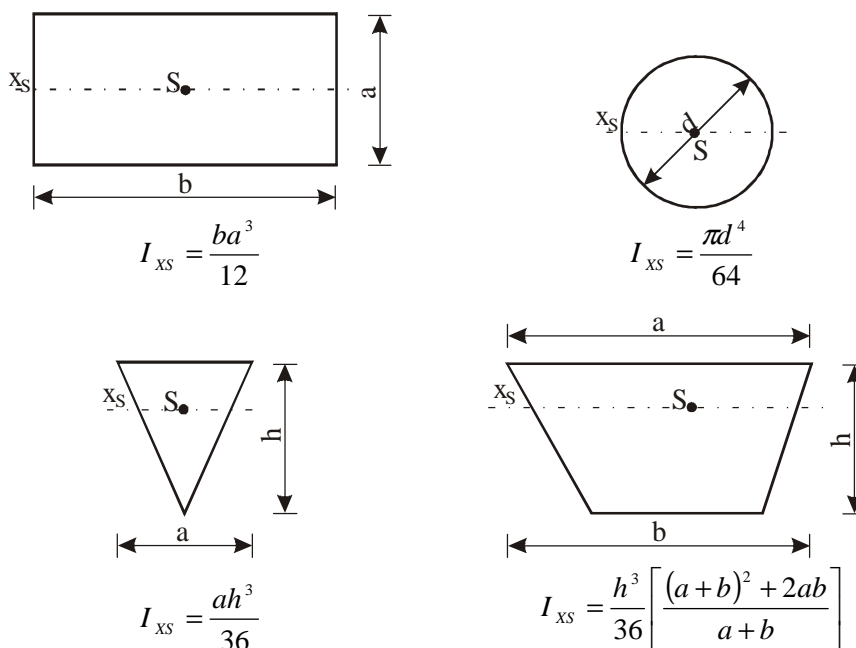
Wektor siły parcia jest prostopadły do powierzchni A i przechodzi przez środek parcia C (leżący poniżej środka ciężkości S), którego współrzędne oblicza się następująco:

$$y_c = \frac{I_{xs}}{L_s A} \quad (\text{I-71})$$

$$x_c = \frac{I_{xy}}{L_s A} \quad (\text{I-72})$$

gdzie: I_{x_s} – moment bezwładności powierzchni A względem osi x ,
 L_S – zagłębienie środka ciężkości ściany licząc po ścianie,
 I_{xy} – moment odśrodkowym powierzchni A względem osi x, y .

Uwaga! Wszystkie przykłady zawarte w niniejszym skrypcie dotyczą ścian symetrycznych, dla których współrzędna x_C wynosi 0.



Rys. I-27 Moment bezwładności I_{x_s} względem osi x_s

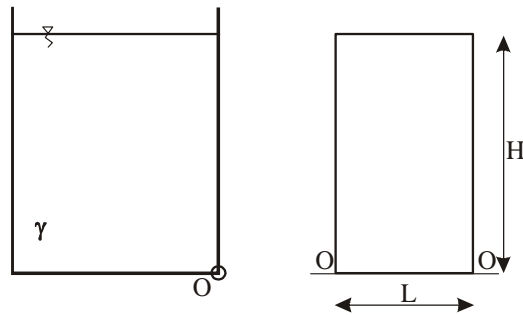
I.2.3. Zadania – parcie na ściany płaskie

Aby lepiej zapoznać się z powyższymi metodami wyznaczania wartości siły parcia i jej położenia, rozwiązanie pierwszych pięciu zadań (przykłady I-18 do I-22) przedstawiono przy użyciu zarówno metody graficzno – analitycznej, jak i analitycznej.

PRZYKŁAD I-18 Parcie na ścianę pionową

Jedna ściana prostokątnego zbiornika (rys. I-28) może odchyłać się względem osi O . Oblicz moment siły parcia na tę ścianę względem punktu O .

Dane: $H = 1 \text{ m}$, $L = 0,5 \text{ m}$, $\gamma = 9,81 \text{ kN/m}^3$
Szukane: M_O

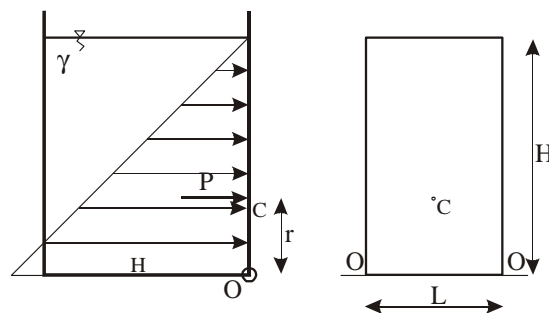


Rys. I-28

Rozw.:

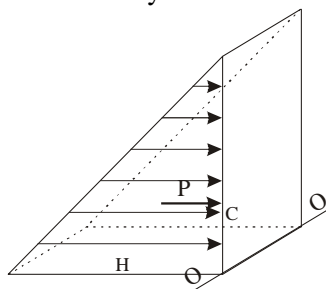
1. *Metoda graficzno - analityczna*

Aby zastosować metodę tę do obliczania wartości siły parcia, należy najpierw skonstruować bryłę parcia odkładając w każdym punkcie ściany prostopadłe do niej odcinek równy zagłębieniu tego punktu pod zwierciadłem cieczy.



Rys. I-29

W rozpatrywanym przypadku, bryła parcia jest graniastostłupem o podstawie trójkątnej, który przedstawiono na rys. I-30.



Rys. I-30

Zatem wartość siły parcia wynosi:

$$P = V_b \cdot \gamma = \frac{1}{2} H^2 L \gamma \quad (\text{I-73})$$

Siła ta jest prostopadła do ściany, skierowana do kłapy.

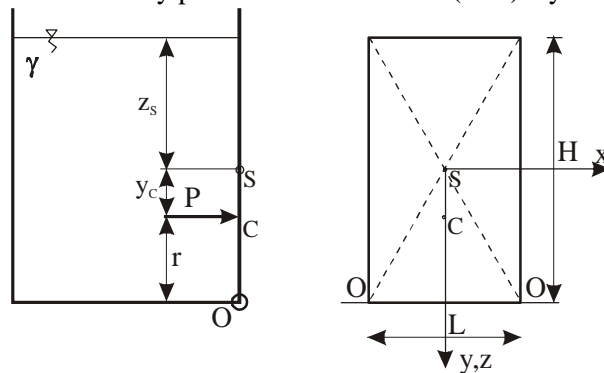
Środek ciężkości tego graniastosłupa, leży w środku ciężkości trójkąta, czyli na wysokości $H/3$ ponad dnem zbiornika. Środek parcia znajduje się zatem w połowie kłapy ($L/2$), na wysokości $H/3$ od jej dołu.

Zatem ramię siły parcia wynosi: $r = H/3$, a moment siły parcia względem punktu O jest równy:

$$M_O = P \cdot r = \frac{1}{2} H^2 L \gamma \cdot \frac{H}{3} = \frac{1}{6} H^3 L \gamma = \frac{1}{6} 1^3 \cdot 0,5 \cdot 9,81 = 0,82 \text{ kN} \quad (\text{I-74})$$

2. Metoda analityczna

Przyjęto układ współrzędnych (x, y) jak na rys. I-31. Jego początek znajduje się w środku ciężkości ściany. Ponieważ kłapa jest pionowa, oś x jest pozioma, a y - pionowa. Wartość siły parcia liczona wzorem (I-70) wynosi:



Rys. I-31

$$P = z_s A \gamma = \frac{H}{2} H L \gamma = \frac{1}{2} H^2 L \gamma \quad (\text{I-75})$$

Rzędna y_C środka parcia wg wzoru (I-71) wynosi:

$$y_C = \frac{I}{y_S A} = \frac{\frac{LH^3}{12}}{\frac{H}{2}} = \frac{H}{6} \quad (\text{I-76})$$

Ramię siły parcia jest zatem równe:

$$r = \frac{H}{2} - y_C = \frac{H}{2} - \frac{H}{6} = \frac{H}{3} \quad (\text{I-77})$$

Zatem moment siły parcia względem punktu O jest równy:

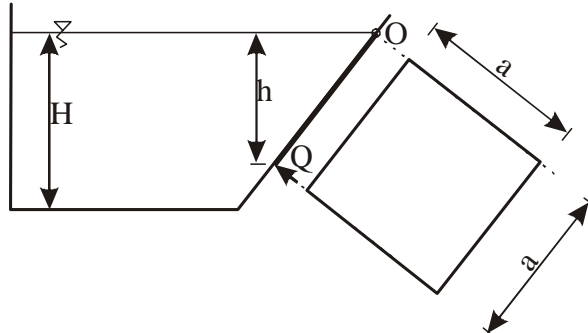
$$M_O = P \cdot r = \frac{1}{2} H^2 L \gamma \cdot \frac{H}{3} = \frac{1}{6} H^3 L \gamma = \frac{1}{6} 1^3 \cdot 0,5 \cdot 9,81 = 0,82 \text{ kN} \quad (\text{I-78})$$

PRZYKŁAD I-19 Parcie na ścianę ukośną

Jaką trzeba przyłożyć siłę Q do dołu kwadratowej kłapy (rys. I-32) znajdującej się w ścianie zbiornika, by uniemożliwić jej obrót wokół osi O pod wpływem parcia wody.

Dane: a, H, γ

Szukane: N



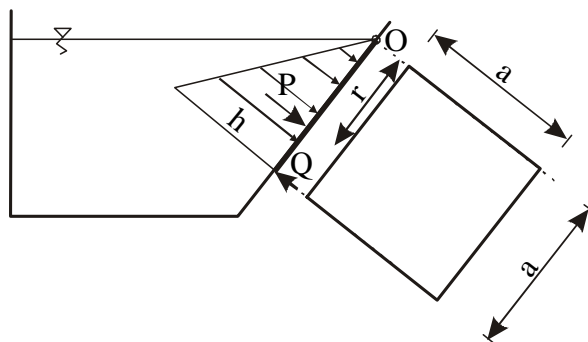
Rys. I-32

Rozw.:

Warunek równowagi kłapy (równanie momentów siły Q i siły parcia P względem punktu O):

$$Q \cdot a = P \cdot r \Rightarrow Q = \frac{P \cdot r}{a} \quad (I-79)$$

1. Obliczanie wartości siły parcia P i jej ramienia r metodą graficzno-analityczną



Rys. I-33

Bryła parcia konstruowana wg zasad opisanych w 1.2.1 jest graniastoslupem o podstawie trójkątnej. Wartość siły parcia wynosi zatem:

$$P = V_b \cdot \gamma = \frac{1}{2} h \cdot a^2 \gamma \quad (\text{I-80})$$

Siła ta jest prostopadła do ściany, skierowana do kłapy.

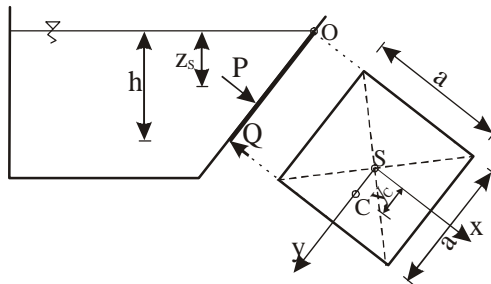
Środek ciężkości tego graniastosłupa, a więc i środek parcia, leży w środku ciężkości trójkąta, czyli na wysokości $a/3$ licząc od dołu kłapy.

Zatem ramię siły parcia wynosi: $r = 2/3a$, a moment siły parcia względem punktu O jest równy:

$$M_p = P \cdot r = \frac{1}{3} h \cdot a^3 \gamma \quad (\text{I-81})$$

2. *Obliczanie wartości siły parcia P i jej ramienia r metodą analityczną*

Przyjęto układ współrzędnych (x, y) o początku w środku ciężkości kłapy jak na rys. I-34.



Rys. I-34

Wartość siły parcia wg (I-70) wynosi:

$$P = z_s A \gamma = \frac{1}{2} h a^2 \gamma \quad (\text{I-82})$$

Ramię siły parcia obliczyć można na podstawie rzędnej y_C środka parcia:

$$r = \frac{a}{2} + y_C = \frac{a}{2} + \frac{I}{y_s A} = \frac{a}{2} + \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} = \frac{2}{3} a \quad (\text{I-83})$$

Moment siły parcia wyrażony jest iloczynem wartości siły i jej ramienia:

$$M_p = P \cdot r = \frac{1}{3} h \cdot a^3 \gamma \quad (\text{I-84})$$

Wyznaczona na podstawie (I-79) szukana wartość siły Q wynosi:

$$Q = \frac{M_p}{a} = \frac{\frac{1}{3} h \cdot a^3 \gamma}{a} = \frac{1}{3} h \cdot a^2 \gamma \quad (\text{I-85})$$

PRZYKŁAD I-20 Parcie na ścianę złożoną

Cała ściana zbiornika obraca się wokół punktu O. Ile musi wynosić siła Q , by przyłożona poziomo do górnej krawędzi tej ściany, nie pozwoliła na jej odchylenie pod wpływem.

Dane: $h_1, h_2, L, \gamma, \alpha$
Szukane: Q



Rys. I-35

Rozw.:

Warunek równowagi ściany:

$$P_1 r_1 + P_2 r_2 = Q r, \quad (I-86)$$

gdzie ramię r siły N wynosi:

$$r = h_1 + h_2 \sin \alpha. \quad (I-87)$$

Czyli wartość szukana siły Q jest równa:

$$Q = \frac{P_1 r_1 + P_2 r_2}{h_1 + h_2 \sin \alpha} \quad (I-88)$$

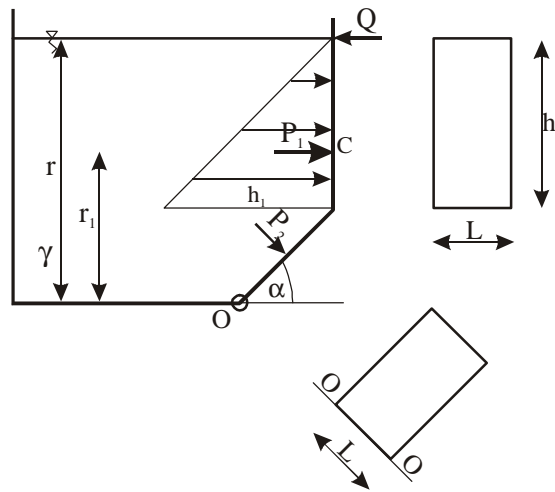
1. Metoda graficzno - analityczna obliczenia wartości sił parcia i ich ramion

- Obliczenie wartości siły P_1 i wyznaczenie jej środka parcia wg zasad opisanych w rozdziale 1.2.1:

$$P_1 = V_1 \gamma = (\text{objętość graniastosłupa o podstawie trójkątnej}) \cdot \gamma \quad (\text{I-89})$$

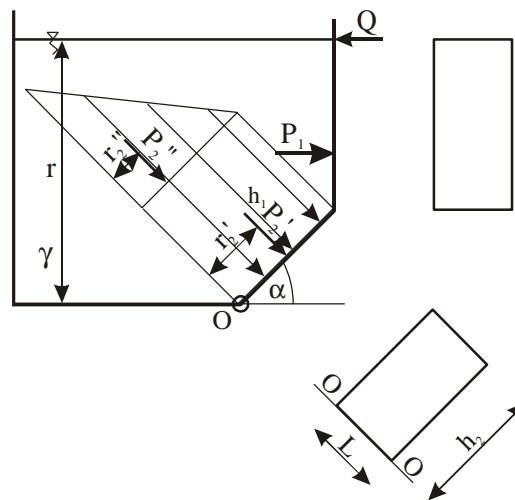
$$P_1 = \frac{1}{2} h_1^2 L \gamma \quad (\text{I-90})$$

$$r_1 = h_2 \sin \alpha + \frac{1}{3} h_1 \quad (\text{I-91})$$



Rys. I-36

- Obliczenie wartości siły P_2 i wyznaczenie jej środka parcia



Rys. I-37

Przy dokonywaniu obliczeń na całą ścianę, wykres parcia będzie trapezem. W takim wypadku, aby określić położenie środka parcia, trzeba wyznaczyć środek ciężkości tego trapezu. W tym celu należy podzielić trapez na figury prostsze (prostokąt i trójkąt), których położenie środka ciężkości jest oczywiste (w połowie boku prostokąta, na 1/3 wysokości trójkąta).

Warunek równowagi ściany (I-86) przyjmie wtedy postać:

$$Q = \frac{P_1 r_1 + P_2' r_2' + P_2'' r_2''}{h_1 + h_2 \sin \alpha} \quad (\text{I-92})$$

W takim przypadku obliczenia przeprowadza się w sposób następujący:

$$P_2' = V_2' \gamma = (\text{objętość graniastosłupa o podstawie prostokątnej}) \cdot \gamma \quad (\text{I-93})$$

$$P_2' = h_1 h_2 L \cdot \gamma \quad (\text{I-94})$$

$$r_2' = h_2/2 \quad (\text{I-95})$$

$$P_2'' = V_2'' \gamma = (\text{objętość graniastosłupa o podstawie trójkątnej}) \cdot \gamma \quad (\text{I-96})$$

$$P_2'' = \frac{1}{2} h_2^2 \sin \alpha \cdot L \gamma \quad (\text{I-97})$$

$$r_2'' = h_2/3 \quad (\text{I-98})$$

2. Metoda analityczna obliczenia wartości sił parcia i ich ramion

Dla poszczególnych części ściany przyjęto układy współrzędnych (x, y) dla poszczególnych części ściany jak na rysunkach I-38 i I-39. Początek tych układów znajduje się w środku ciężkości płaskich części ściany.

- Obliczenie wartości siły P_1 i wyznaczenie jej środka parcia (rys. I-38):

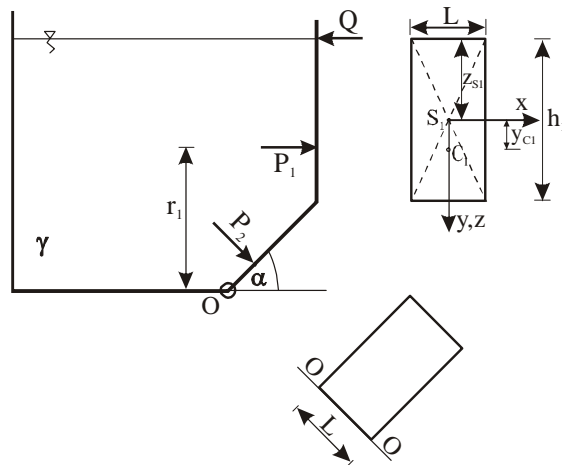
$$P_1 = z_{S1} A_1 \gamma = \frac{1}{2} h_1^2 L \gamma \quad (\text{I-99})$$

Rzędna y_{C1} środka parcia wynosi:

$$y_{C1} = \frac{I_1}{L_{S1} A_1} = \frac{I_1}{z_{S1} A_1} = \frac{L h_1^3 / 12}{\frac{1}{2} h_1^2 L} = \frac{h_1}{6} \quad (\text{I-100})$$

Ramię siły parcia P_1 jest zatem równe:

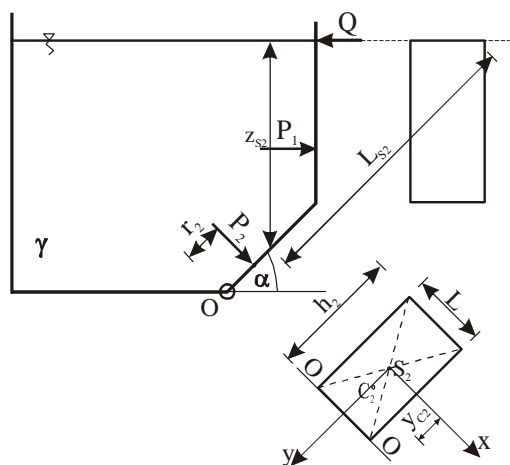
$$r_1 = \frac{1}{2} h_1 + h_2 \sin \alpha - y_{C1} = \frac{1}{2} h_1 + h_2 \sin \alpha - \frac{h_1}{6} = \frac{1}{3} h_1 + h_2 \sin \alpha \quad (\text{I-101})$$



Rys. I-38

- Obliczenie wartości siły P_2 i wyznaczenie jej środka parcia (rys. I-39)

$$P_2 = z_{S2} A_2 \gamma = \left(h_1 + \frac{1}{2} h_2 \sin \alpha \right) h_2 L \gamma \quad (\text{I-102})$$



Rys. I-39

Rzędna y_{C2} środka parcia wynosi:

$$y_{C2} = \frac{I_2}{L_{S2} A_2} = \frac{L h_2^3 / 12}{\left(\frac{h_1}{\sin \alpha} + \frac{h_2}{2} \right) h_2 L} = \frac{h_2^2 \sin \alpha}{6(2h_1 + h_2 \sin \alpha)} \quad (\text{I-103})$$

Ramię siły parcia P_2 jest zatem równe:

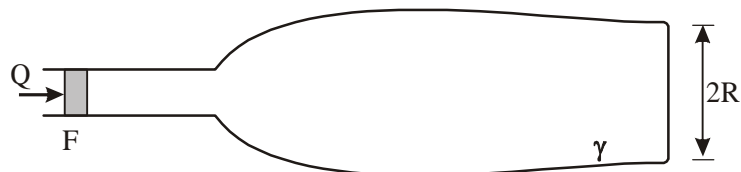
$$r_2 = \frac{h_1}{\sin \alpha} + h_2 - y_{c2} \quad (\text{I-104})$$

$$r_2 = \frac{h_1}{\sin \alpha} + h_2 - \frac{h_1}{\sin \alpha} - \frac{h_2}{2} - \frac{h_2^2 \sin \alpha}{6(2h_1 + h_2 \sin \alpha)} \quad (\text{I-105})$$

$$r_2 = \frac{h_2}{2} - \frac{h_2^2 \sin \alpha}{6(2h_1 + h_2 \sin \alpha)} \quad (\text{I-106})$$

PRZYKŁAD I-21 Uwzględnienie działania tłoka

Oblicz parcie wina na dno całkowicie wypełnionej butelki zamkniętej korkiem, który jest wciskany do butelki z siłą Q .



Rys. I-40

Dane: R, Q, F, γ

Szukane: P

Rozw.:

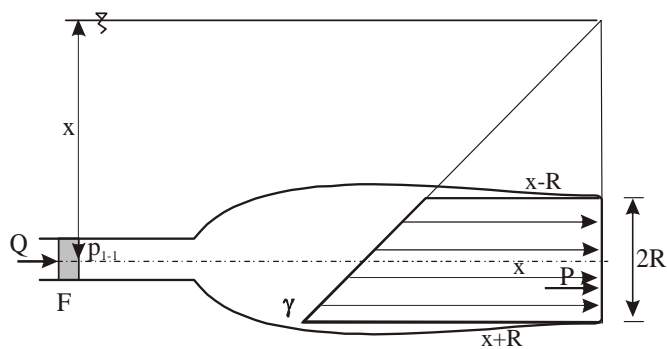
Aby uwzględnić działanie siły nacisku na korek, należy utworzyć zwierciadło zastępcze. Będzie znajdowało się one na wysokości x ponad środkiem ciężkości korka (patrz rys. I-41 i I-42). Zamieniamy zatem ciśnienie pochodzące od siły nacisku na korek, na ciśnienie pochodzące od warstwy wina o wysokości x , co oznacza, że:

$$p_{1-1} = \frac{Q}{F} = x\gamma \quad (\text{I-107})$$

Stąd:

$$x = \frac{Q}{F\gamma} \quad (\text{I-108})$$

Metoda graficzno – analityczna



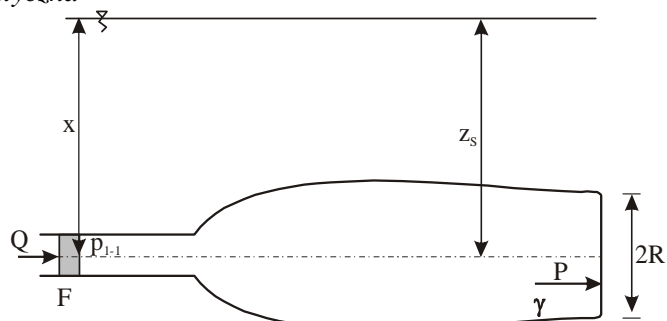
Rys. I-41

Objętość bryły parcia równa będzie sumie objętości walca o promieniu podstawy R o wysokości $(x-R)$ i połowie objętości walca o promieniu podstawy R o wysokości $2R$. Wartość siły parcia obliczona na podstawie (I-69) wynosi zatem:

$$P = V\gamma = \left[\pi R^2 (x - R) + \frac{1}{2} \pi R^2 2R \right] \gamma \quad (\text{I-109})$$

$$P = x\pi R^2 \gamma \quad (\text{I-110})$$

Metoda analityczna



Rys. I-42

Wartość siły parcia na dno P obliczone wg (I-70) wynosi:

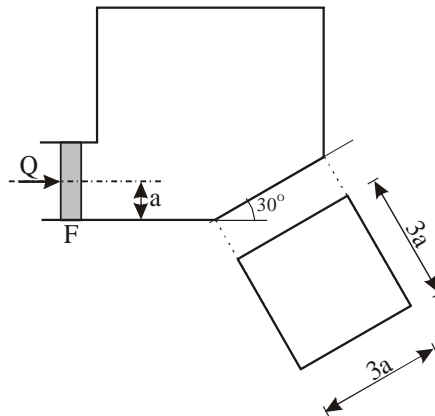
$$P = z_s A \gamma = x\pi R^2 \gamma \quad (\text{I-111})$$

PRZYKŁAD I-22

Oblicz parcie cieczy na kwadratową ścianę w dnie zbiornika.

Dane: a, Q, F, γ

Szukane: P, M_O



Rys. I-43

Rozw.:

Aby uwzględnić działanie tłoka, należy utworzyć zwierciadło zastępcze. Będzie znajdowało się one na wysokości x ponad środkiem ciężkości tłoka wynikającej z zamieniany ciśnienia pochodzącego od tłoka na ciśnienie pochodzące od warstwy cieczy o ciężarze objętościowym γ i wysokości x równej:

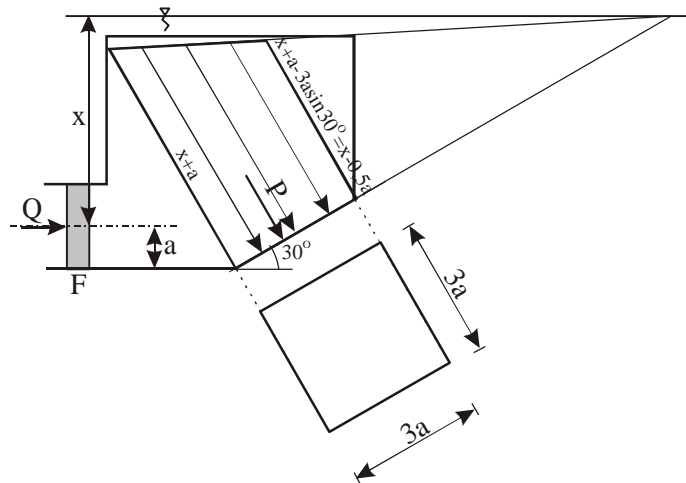
$$x = \frac{Q}{F\gamma} \quad (\text{I-112})$$

1. *Metoda graficzno – analityczna*

Bryła parcia jest granisatosłupem o podstawie trapezu i wysokości $3a$. Wartość siły parcia na dno P ze wzoru (I-69) wynosi:

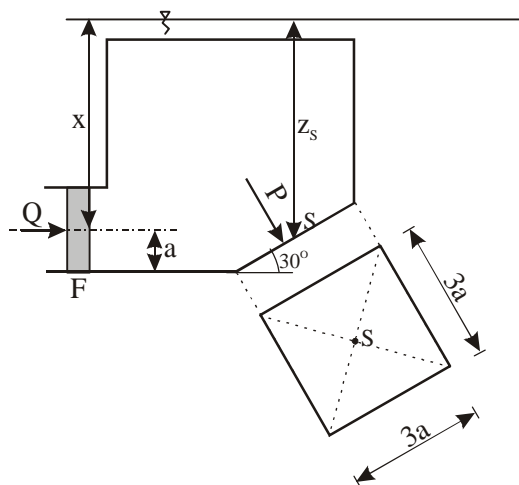
$$P = \frac{1}{2}(x - 0,5a + x + a)3a \cdot 3a\gamma \quad (\text{I-113})$$

$$P = 9(x + 0,25a)a^2\gamma \quad (\text{I-114})$$



Rys. I-44

2. Metoda analityczna



Rys. I-45

Po ustaleniu wysokości położenia zwierciadła zastępczego cieczy, obliczyć można na podstawie (I-70) wartość siły parcia cieczy na dno:

$$P = \gamma_s A = (x + a - \frac{1}{2} 3a \sin 30^\circ) (3a)^2 \gamma = (x + a - 0,75a) 9a^2 \gamma \quad (\text{I-115})$$

$$P = 9(x - 0,25a) a^2 \gamma \quad (\text{I-116})$$

PRZYKŁAD I-23

Mur betonowy ma wysokość H . Jaka powinna być jego grubość b , by:

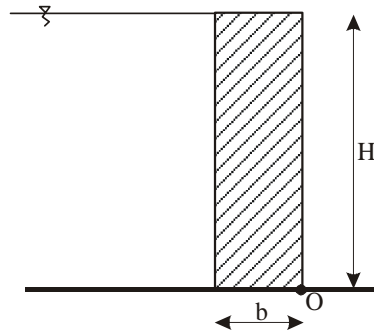
a) nie został przesunięty pod wpływem parcia wody,

b) nie został obrócony wokół punktu (osi) O .

Obliczenia przeprowadzić na 1 m długości muru.

Dane: $H = 10$ m, $\gamma_b = 25000$ N/m³,
 $\mu = 0,65$ (współczynnik tarcia o podłoże),
 $n = 1,4$ (współczynnik bezpieczeństwa)

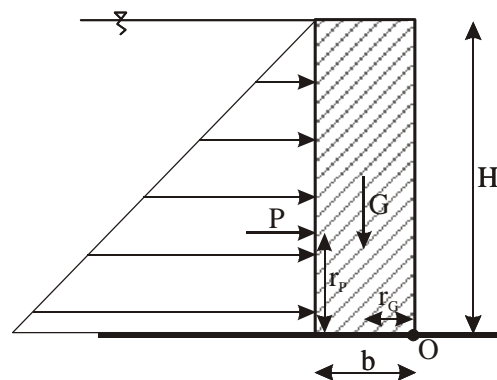
Szukane: b



Rys. I-46

Rozw:

Do obliczeń przyjęto najbardziej niekorzystny przypadek, czyli taki, że woda sięga do szczytu muru.



Rys. I-47

a) Warunek na przesunięcie muru (parcie musi być mniejsze niż tarcie):

$$P \leq T = \mu \cdot G \quad (\text{I-117})$$

b) Warunek na obrót względem punktu O:

$$P \cdot r_p \leq G \cdot r_G \quad (\text{I-118})$$

Wartość siły parcia (i jej ramienia) policzona metodą graficzno – analityczną:

$$P = \frac{H^2}{2} \cdot 1 \cdot \gamma_w = \frac{10^2}{2} \cdot 1 \cdot 9810 = 490500 \text{ N} \quad (\text{I-119})$$

$$r_p = H / 3 = 3,33 \text{ m} \quad (\text{I-120})$$

Wartość ciężaru i jego ramienia:

$$G = b \cdot H \cdot 1 \cdot \gamma_b = b \cdot 10 \cdot 1 \cdot 25000 = 250000[\text{N}] \cdot b \quad (\text{I-121})$$

$$r_G = b / 2 \quad (\text{I-122})$$

Po postawieniu tak obliczonych wartości sił do warunku (I-117):

$$490500 \leq 250000 \cdot b \cdot 0,65 \quad (\text{I-123})$$

Stąd szerokość muru $b \geq 3,02 \text{ m}$.

Analogicznie dla warunku b (równanie (I-118)):

$$490500 \cdot 3,33 \leq 250000 \cdot 0,5 \cdot b^2, \quad (\text{I-124})$$

czyli grubość muru $b \geq 3,61 \text{ m}$.

Należy zatem przyjąć wariant bezpieczniejszy, czyli większą wartość szerokości, a następnie nałożyć na nią współczynnik bezpieczeństwa $n = 1,4$, co oznacza, że:

$$b \geq n \cdot 3,61 = 1,4 \cdot 3,61 = 5,4 \text{ m} \quad (\text{I-125})$$

czyli należy zaprojektować mur o grubości większej niż 5,4 m.

PRZYKŁAD I-24

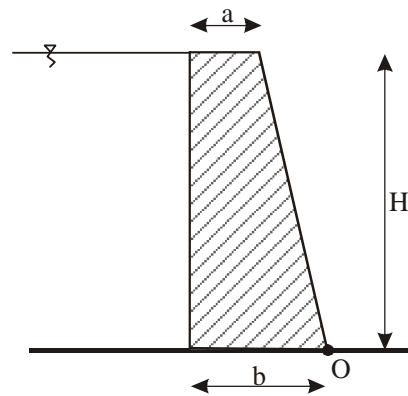
Betonowy mur o wysokości H ma przekrój trapezu, którego górna krawędź wynosi a . Ile powinna wynosić grubość b tego muru przy podłożu, aby:

- a) nie został przesunięty pod wpływem parcia wody,
- b) nie został obrócony wokół punktu (osi) O.

Obliczenia przeprowadzić na 1 m długości muru, w przypadku, gdy woda sięga górnej krawędzi muru.

Dane: $H = 10 \text{ m}$, $a = 3 \text{ m}$, $\gamma_b = 25000 \text{ N/m}^3$,
 $\mu = 0,65$ (współczynnik tarcia o podłoże),
 $n = 1,4$ (współczynnik bezpieczeństwa),

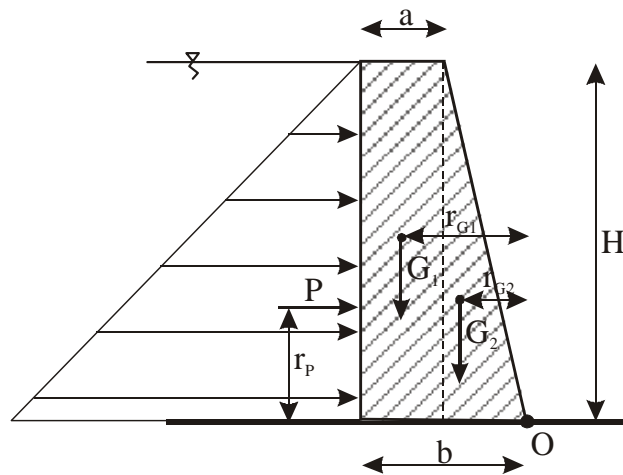
Szukane: b .



Rys. I-48

Rozw:

Do obliczeń przyjęto najbardziej niekorzystny przypadek, czyli taki, że woda sięga do szczytu muru.



Rys. I-49

a) Warunek na przesunięcie muru (parcie musi być mniejsze od tarcia):

$$P \leq T = \mu \cdot G = \mu(G_1 + G_2) \quad (\text{I-126})$$

b) Warunek na obrót względem punktu O:

$$P \cdot r_p \leq G_1 \cdot r_{G1} + G_2 \cdot r_{G2} \quad (\text{I-127})$$

$$P = \frac{H^2}{2} \cdot 1 \cdot \gamma_w = \frac{10^2}{2} \cdot 1 \cdot 9810 = 490500 \text{ N} \quad (\text{I-128})$$

$$r_p = H / 3 = 3,33 \text{ m} \quad (\text{I-129})$$

$$G_1 = a \cdot H \cdot 1 \cdot \gamma_b = 3 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 25000 = 750000 \text{ N} \quad (\text{I-130})$$

$$r_{G1} = b - a / 2 = b - 1,5 \text{ m} \quad (\text{I-131})$$

$$G_2 = \frac{1}{2}(b - a) \cdot H \cdot 1 \cdot \gamma_b \quad (\text{I-132})$$

$$G_2 = \frac{1}{2}(b - 1,5) \cdot 10 \cdot 1 \cdot 25000 = (b - 1,5) \cdot 125000 \text{ N} \quad (\text{I-133})$$

$$r_{G2} = \frac{2}{3}(b - a) = \frac{2}{3}(b - 1,5) \text{ m} \quad (\text{I-134})$$

Po postawieniu tak obliczonych wartości sił do warunku (I-126): $490500 \leq 0,65 \cdot (75000 + (b - 1,5) \cdot 125000)$ obliczyć można szerokość muru: $b \geq 3 \text{ m}$. Dla warunku (I-127): $490500 \cdot 3,33 \leq 750000 \cdot (b - 1,5) + (b - 1,5)^2 \cdot 125000$, czyli grubość muru $b \geq 3,67 \text{ m}$.

Należy zatem przyjąć wariant bezpieczniejszy, czyli większą wartość szerokości.

Dodatkowo nałożono na tę wartość współczynnik bezpieczeństwa $n = 1,4$ czyli: $b \geq n \cdot 3,67 = 1,4 \cdot 3,67 = 5,14 \text{ m}$.

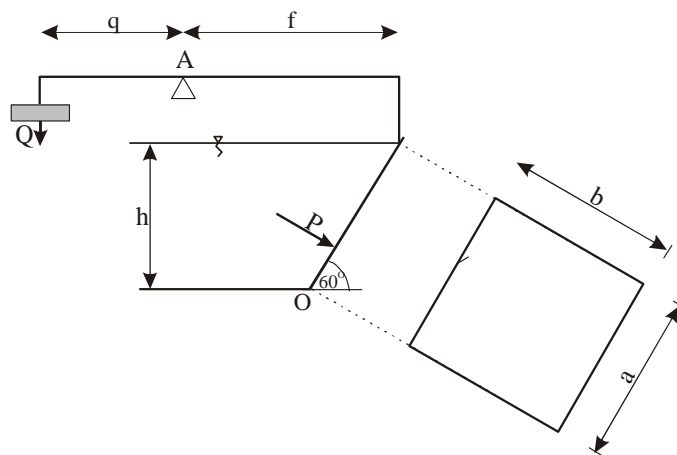
Ostatecznie zatem należy zaprojektować mur o grubości większej niż 5,14 m.

PRZYKŁAD I-25

Obliczyć ciężar Q przeciwwagi, potrzebny do utrzymania w równowadze prostokątnej kłapy jazu wymiarach $a \times b$, mogącej otwierać się względem punktu O.

Dane: B, h, q, f, α

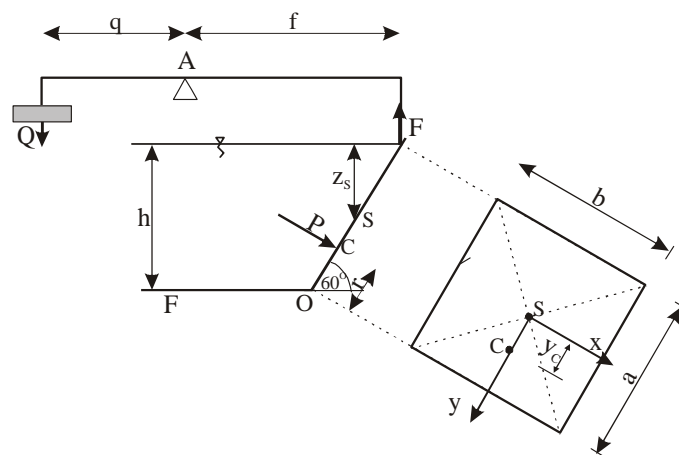
Szukane: Q



Rys. I-50

Na wspomnianą kłepę działają dwie siły: ciężar Q i siła parcia P . Aby znaleźć związek pomiędzy tymi siłami należy zapisać równanie momentów sił względem punktu O i A .

W tym celu wprowadzono „pomocniczą” siłę F (patrz rys. I-51).



Rys. I-51

$$a = \frac{h}{\sin 60^\circ} = \frac{2h}{\sqrt{3}} \quad (\text{I-135})$$

Wartość siły parcia obliczona metodą analityczną wynosi:

$$P = \gamma_s A = \frac{h}{2} ab\gamma = 0,5abh\gamma \quad (\text{I-136})$$

Ramię siły parcia względem punktu O wynosi $r = a - y_c$, gdzie:

$$y_c = \frac{I}{y_s A} = \frac{\frac{ba^3}{12}}{\frac{a}{2} ab} = \frac{a}{6} \quad (\text{I-137})$$

Zatem ramię siły parcia względem punktu wynosi: $r = \frac{1}{3}a$.

Równanie momentów względem punktu O:

$$F \cdot h \cdot \text{tg}60^0 = P \cdot r \quad (\text{I-138})$$

Zatem:

$$F = \frac{P \cdot r}{h / \text{tg}60^0} = \frac{0,5abh\gamma \cdot \frac{1}{3}a}{h / \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 b \gamma \quad (\text{I-139})$$

Równanie momentów względem punktu A:

$$Q \cdot q = F \cdot f \quad (\text{I-140})$$

$$Q = \frac{Ff}{q} = \frac{\sqrt{3}a^2bf\gamma}{6q} \quad (\text{I-141})$$

PRZYKŁAD I-26

Wyznaczyć pionową siłę Q potrzebną do podniesienia prostokątnej kłapy oddzielającej zbiornik od prostokątnego kanału o głębokości napelnienia h i szerokości b mogącej obracać się względem punktu (osi O).

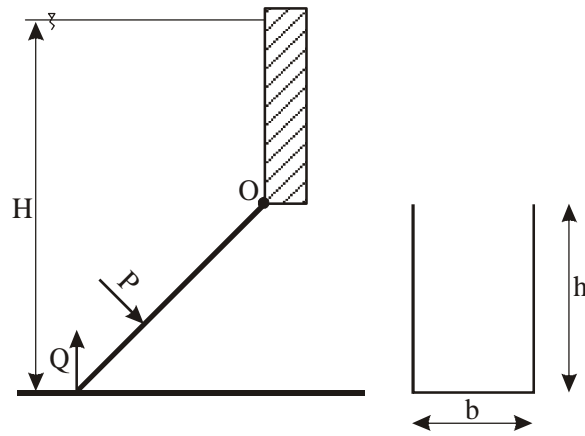
Dane: $b = 1 \text{ m}, h = 2 \text{ m}, H = 3 \text{ m}, \alpha = 45^\circ$

Szukane: Q

Rozw.:

Równanie równowagi kłapy (równanie momentów względem punktu O):

$$P \cdot r_p = Q \cdot r_Q \Rightarrow Q = \frac{P \cdot r_p}{r_Q} \quad (\text{I-142})$$

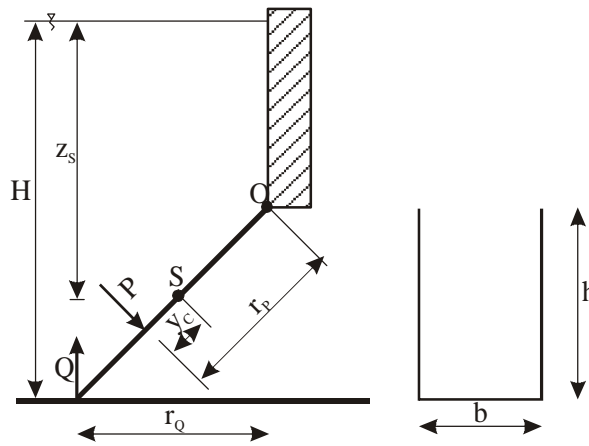


Rys. I-52

Ramię siły Q wynosi:

$$r_Q = h = 2 \text{ m}$$

(I-143)



Rys. I-53

Wartość parcia P obliczyć można metodą analityczną:

$$\begin{aligned}
 P &= \gamma \cdot z_s \cdot A = \gamma \left(H - \frac{h}{2} \right) \frac{h}{\sin \alpha} b \\
 &= 9810 \cdot \left(3 - \frac{2}{2} \right) \frac{2}{\sqrt{2}/2} 1 = 39240\sqrt{2} = 55494 \text{ N}
 \end{aligned}$$

(I-144)

Ramię siły parcia:

$$y_c = \frac{I}{y_s A} = \frac{\frac{b \left(\frac{h}{\sin \alpha} \right)^3}{12}}{\frac{H - \frac{h}{2}}{\sin \alpha} \frac{h}{\sin \alpha} b} = \frac{h^3}{6h(2H - h)\sin \alpha} \quad (\text{I-145})$$

$$y_c = \frac{2^3}{6 \cdot 2(2 \cdot 3 - 2)\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ m} \quad (\text{I-146})$$

$$r_p = \frac{h}{2 \sin \alpha} + y_c = \frac{2}{2 \sin 45^\circ} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{7}{6} \sqrt{2} = 1,65 \text{ m} \quad (\text{I-147})$$

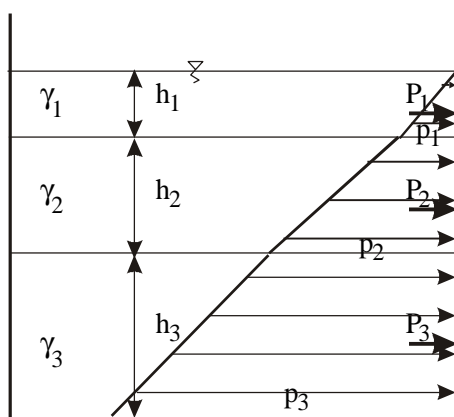
Zatem szukana wartość siły Q wynosi:

$$Q = \frac{P \cdot r_p}{r_Q} = \frac{55494 \cdot 1,65}{2} = 45783 \text{ N} \quad (\text{I-148})$$

PRZYKŁAD I-27

Wyznaczyć parcie na ścianę zbiornika o szerokości b wypełnionego trzema różnymi cieczami (jak na rys. I-54).

Dane: $b, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_, h_1, h_2, h_3$
Szukane: P



Rys. I-54

Rozw.:

W przypadku występowania w zadaniu cieczy o różnych gęstościach zastosowanie pojęcia bryły parcia jest niewygodne, gdyż dla uzyskania parcia objętość bryły dla każdej z cieczy powinna być wymnożona przez inny ciężar właściwy. Należy zatem korzystać z wykresu ciśnienia $p(z)$.

Wartość siły parcia:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad (\text{I-149})$$

Ciśnienia na dole kolejnych warstw cieczy wynoszą odpowiednio:

$$p_1 = \gamma_1 h_1 \quad (\text{I-150})$$

$$p_2 = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 \quad (\text{I-151})$$

$$p_3 = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3 \quad (\text{I-152})$$

Na tej podstawie, obliczyć można parcia od poszczególnych cieczy:

$$P_1 = \frac{1}{2} \gamma_1 h_1^2 b \quad (\text{I-153})$$

$$P_2 = \frac{1}{2} [\gamma_1 h_1 + (\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2)] h_2 b \quad (\text{I-154})$$

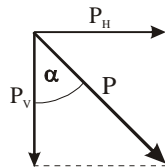
$$P_3 = \frac{1}{2} [\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + (\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3)] h_3 b \quad (\text{I-155})$$

I.3. PARCIE NA ŚCIANY ZAKRZYWIONE

I.3.1. Obliczenie wartości siły parcia

Elementarne powierzchnie dA tworzące rozpatrywaną powierzchnię krzywą mają różną orientację w przestrzeni. Prostopadłe do nich, elementarne parcia dP_i nie są więc do siebie równoległe. Dlatego *wartość wypadkowej siły parcia P nie może być obliczona jako algebraiczna suma wartości elementarnych sił.*

Zatem siłę parcia całkowitego można rozłożyć na dwie składowe: pionową P_V i poziomą P_H .



Rys. I-55

Składowa pozioma parcia P_H

Obliczenia wartości tej składowej parcia jest praktycznie obliczeniem wartości siły parcia na rzut rozpatrywanej ściany na pionową ścianę (czyli na ścianę płaską), do jej obliczeń stosuje się metody omówione w rozdziale I.2:

- metodę graficzno – analityczną,
- analityczną.

Składowa pozioma parcia jest prostopadła do rzutu rozpatrywanej powierzchni i działa zawsze od cieczy w kierunku ściany.

Składowa pionowa parcia P_V

Aby obliczyć wartość tej składowej, skorzystać można jedynie z metody graficzno-analitycznej postępując następująco:

- ♦ wykonać prostokątny rzut ściany zakrzywionej na powierzchnię zwierciadła cieczy,
- ♦ dla tego rzutu skonstruować bryłę składowej pionowej parcia (bryła jest ograniczona: powierzchnią ściany, zwierciadłem cieczy i tworzącymi pionowymi),
- ♦ obliczyć ciężar bryły parcia: $P_V = V_V \cdot \gamma$.

Wektor P_V jest prostopadły do powierzchni zwierciadła cieczy i zwrócony jest: do góry (jeżeli ściana znajduje się nad cieczą), a ku dołowi gdy ciecz jest nad ścianą na którą parcie liczymy.

Wartość całkowitej siły parcia P działającego na powierzchnię krzywą obliczyć można zatem jako:

$$P = \sqrt{P_H^2 + P_V^2} \quad (\text{I-156})$$

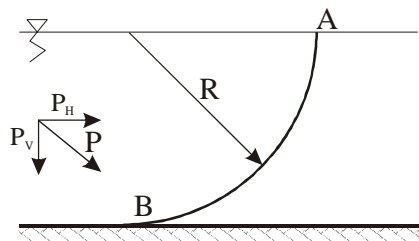
Kierunek działania siły P jest zawsze prostopadły do powierzchni, a jej kąt nachylenia do poziomu obliczyć można następująco:

$$\alpha = \text{arctg} \frac{P_V}{P_H} \quad (\text{I-157})$$

PRZYKŁAD I-28

Obliczyć wartość siły parcia na ścianę AB będącą ćwiartką walca o promieniu podstawy R i wysokości b (rys. I-56).

Dane: R, b, γ
Szukane: P



Rys. I-56

Rozw.:

Wypadkowe parcie P na ścianę AB należy rozłożyć na składowe: P_H i P_V .

1. Składowa pozioma parcia P_H

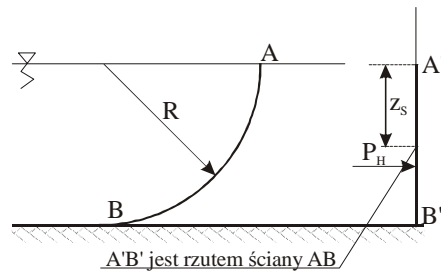
Wartość tej składowej obliczyć można dwoma metodami.

a) metoda analityczna

$$P_H = \gamma \cdot z_S \cdot A, \quad (\text{I-158})$$

gdzie A jest powierzchnią ściany, a z_S - zagłębieniem środka ciężkości rzutu rozpatrywanej ściany na dowolną powierzchnię pionową pod powierzchnią zwierciadła cieczy.

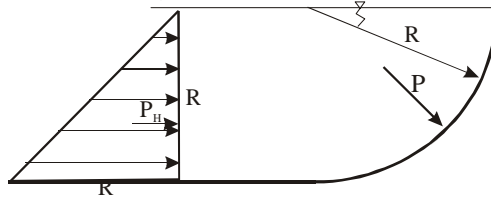
$$P_H = \gamma \cdot z_S \cdot A = \frac{1}{2} R^2 \cdot b \cdot \gamma \quad (\text{I-159})$$



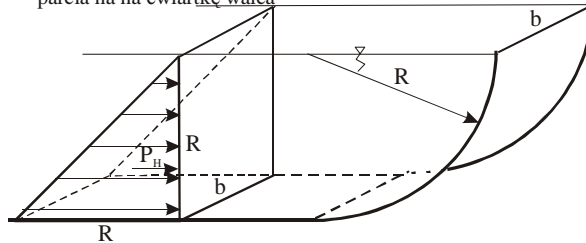
Rys. I-57

b) metoda graficzno – analityczna

Wykres składowej poziomej parcia na na ćwiartkę walca



Bryła składowej poziomej parcia na na ćwiartkę walca



Rys. I-58

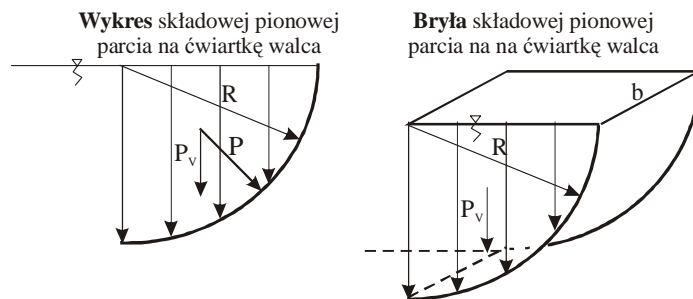
Bryła parcia będzie graniastosłupem o wysokości b i podstawie będącej trójkątem równoramiennym o boku R (rys. I-58).

$$P_H = V_H \cdot \gamma = \frac{1}{2} R^2 b \gamma \quad (I-160)$$

2. Składowa pionowa parcia P_V

Bryła parcia składowej pionowej parcia jest ograniczona: ścianą, jej rzutem na powierzchnię zwierciadła cieczy i płaszczyznami pionowymi, a zatem jest ćwiartką walca o promieniu R i wysokości b (rys I-59), zatem wartość P_V wynosi:

$$P_V = V_V \cdot \gamma = \frac{1}{4} \pi R^2 b \gamma \quad (I-161)$$

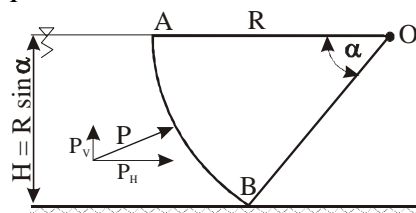


Rys. I-59

PRZYKŁAD I-29

Obliczyć parcie na segmentowe zamknięcie jazu. Szerokość segmentu wynosi b promień R , a kąt pomiędzy ryglami α . Oś obrotu znajduje się na poziomie zwierciadła wody górnej.

Dane: $R = 8 \text{ m}$, $b = 6 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$
 Szukane: P

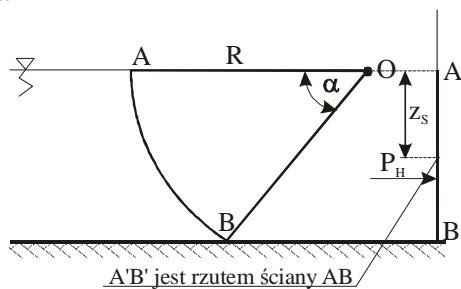


Rys. I-60

Rozw.:

1. Składowa pozioma parcia P_H

a) metoda analityczna



Rys. I-61

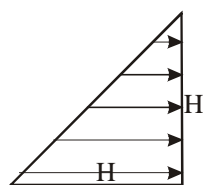
$$P_H = \gamma \cdot z_s \cdot A = \frac{2}{3} H^2 b \gamma = \frac{1}{2} (R \sin \alpha)^2 b \gamma = \frac{1}{2} (8 \cdot \frac{1}{2})^2 6 \cdot 9,81 = 471 \text{ k (I-162)}$$

b) graficznie - analityczna

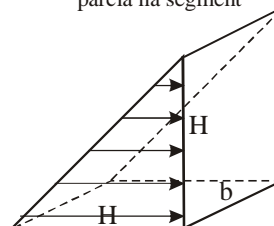
Jak w poprzednim zadaniu, należy utworzyć bryłę składowej poziomej parcia, a następnie obliczyć jej ciężar:

$$P_H = V_H \cdot \gamma = \frac{1}{2} R^2 \sin^2 \alpha \cdot b \gamma = \frac{1}{2} 8^2 \frac{1}{4} 6 \cdot 9,81 = 471 \text{ kN} \quad (\text{I-163})$$

Wykres składowej poziomej parcia na segment



Bryła składowej poziomej parcia na segment

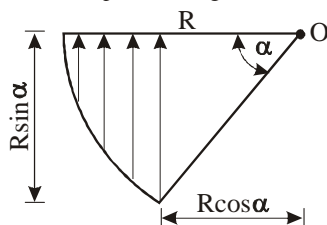


Rys. I-62

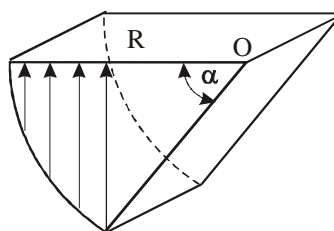
2. Składowa pionowa parcia P_V

Na podstawie opisanej wcześniej metody, wyodrębnić należy bryłę składowej pionowej parcia, a następnie obliczyć jej ciężar.

Wykres składowej pionowej parcia na segment



Bryła składowej pionowej parcia na segment



Rys. I-63

$$P_V = V_V \cdot \gamma = V_{\text{wyc}} - V_{\Delta} = \left(\pi R^2 \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{1}{2} R \sin \alpha \cdot R \cos \alpha \right) \cdot b \gamma$$

$$= \left(\pi 8^2 \frac{30^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} 8 \frac{1}{2} \cdot 8 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 6 \cdot 9,81 = 170 \text{ kN} \quad (\text{I-164})$$

Wektor całkowitego parcia ma długość:

$$P = \sqrt{P_H^2 + P_V^2} = \sqrt{471^2 + 170^2} \cong 500 \text{ kN} \quad (\text{I-165})$$

i jest nachylony do poziomu pod kątem

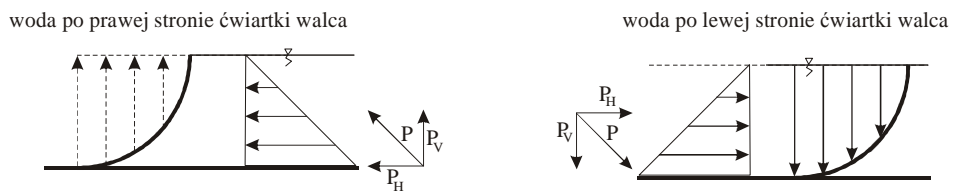
$$\text{tg } \alpha = \frac{P_H}{P_V} = \frac{471}{170} = 2,77 \Rightarrow \alpha = 70^\circ \quad (\text{I-166})$$

I.3.2. Redukcja wykresów parcia

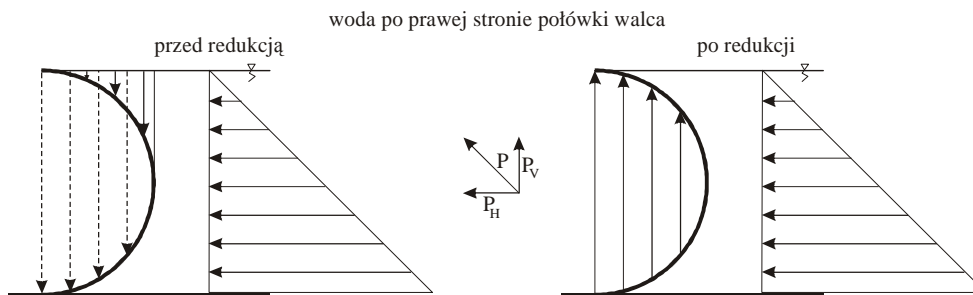
W celu skrócenia obliczeń, w przypadku, gdy na ścianę działa tylko jedna ciecz, wykresy parcia można redukować. Na poniższych rysunkach przedstawiono kilka przykładów redukcji wykresów parcia (poziomego i pionowego) na ścianę w kształcie fragmentu walca w przypadku, gdy:

- ciecz działa tylko od jednej strony ściany,
- na ścianę działa ciecz z obu jej stron.

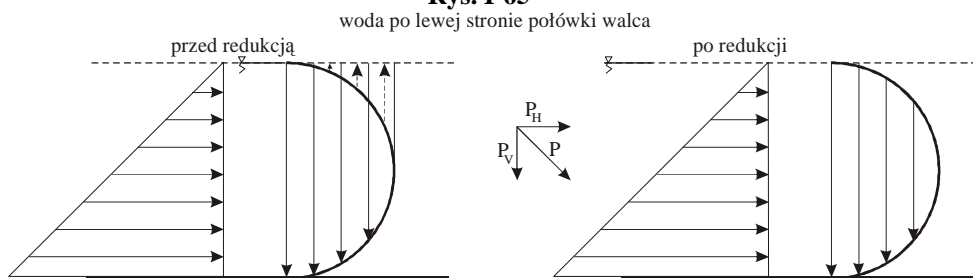
a) ciecz działa na ścianę tylko z jednej strony



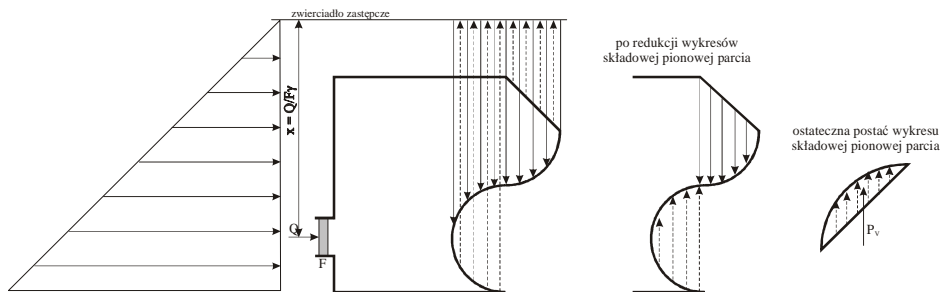
Rys. I-64



Rys. I-65

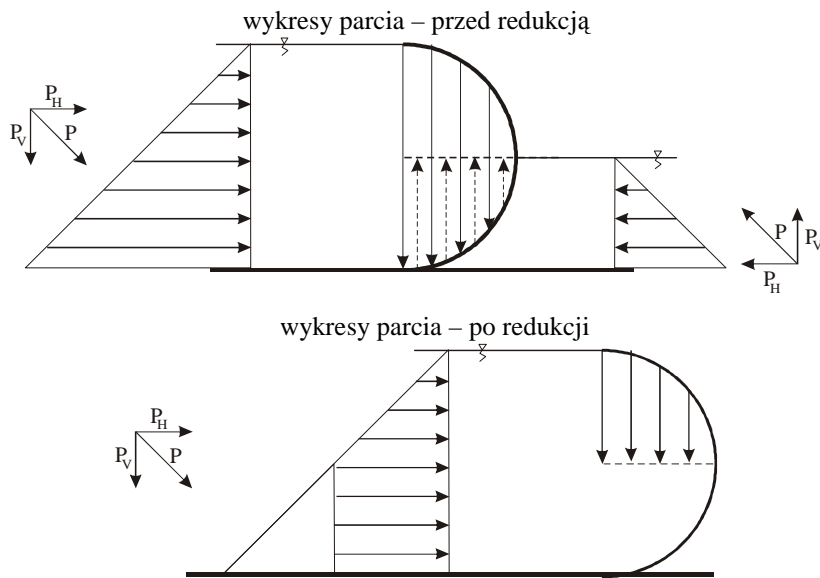


Rys. I-66



Rys. I-67

b) ciecz działa na ścianę w kształcie połówki walca z dwóch jego stron

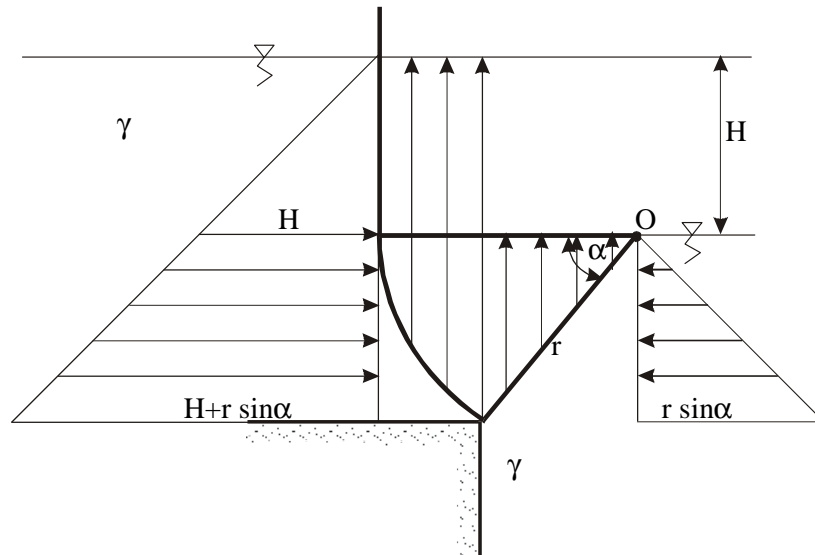


Rys. I-68

PRZYKŁAD I-30

Obliczyć parcie cieczy na segment (rys. I-69) będący wycinkiem walca o długości L i promieniu podstawy r .

Dane: $H = 2 \text{ m}$, $r = 5 \text{ m}$, $b = 6 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$
 Szukane: P

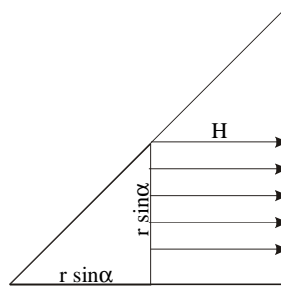


Rys. I-69

Rozw.:

1. Składowa pozioma parcia P_H

Ponieważ na segment działa tylko jedna ciecz, można dokonać redukcji wykresów składowej poziomej parcia (rys. I-70).



Rys. I-70

$$P_H = V_H \cdot \gamma = HR \sin \alpha \cdot b \gamma = 2 \cdot 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 6 \cdot 9,81 = 47,4 \text{ kN} \quad (\text{I-167})$$

2. Składowa pionowa parcia P_V

$$P_V = V_V \cdot \gamma = \left(\pi R^2 \frac{\alpha}{360^\circ} + H(R - R \cos \alpha) \right) \cdot b \gamma$$

$$= \left(\pi 5^2 \frac{45^\circ}{360^\circ} - 2 \left(5 - 5 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \cdot 6 \cdot 9,81 = 76,5 \text{ kN} \quad (\text{I-168})$$

Wektor całkowitego parcia ma długość:

$$P = \sqrt{P_H^2 + P_V^2} = \sqrt{76,5^2 + 47,4^2} \cong 90 \text{ kN} \quad (\text{I-169})$$

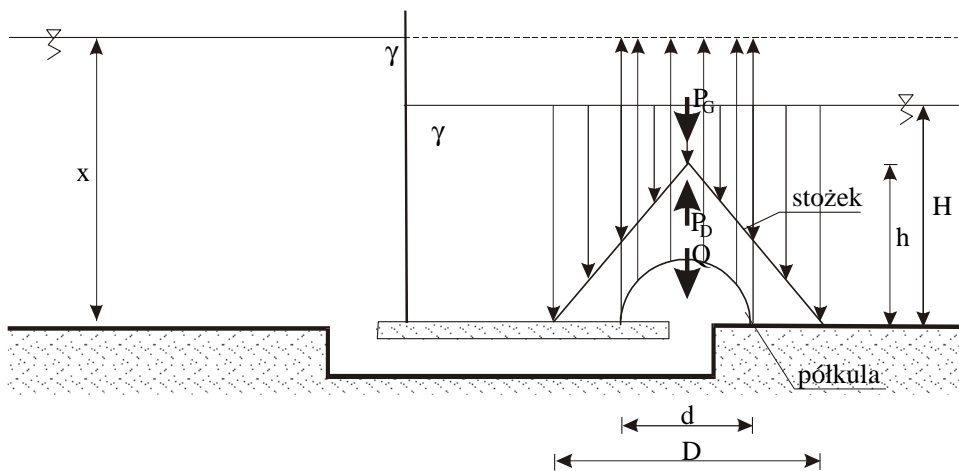
i jest nachylony do poziomu pod kątem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_H}{P_V} = \frac{76,5}{47,4} = 1,6 \Rightarrow \alpha = 58^\circ \quad (\text{I-170})$$

I.3.3. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem równowagi sił

PRZYKŁAD I-31

Przepływ cieczy między komorami uniemożliwia zawór stożkowo - kulisty spoczywający na dnie prawej komory (rys. I-71). Ciężar zaworu wynosi Q . Przy jakim napełnieniu x z lewej strony komory zawór uniesie się i odsłoni otwór?



Rys. I-71

Dane: h, H, d, D, γ, Q

Szukane: x

Rozw.:

Siłą, która może podnieść zawór jest składowa pionowa parcia.

Uwzględniając ciężar Q zaworu można zapisać warunek równowagi sił na niego działających:

$$P_G + Q = P_D, \quad (\text{I-171})$$

gdzie P_G jest parciem na górną część zaworu:

$$P_G = (\text{obj. walca} - \text{obj. stożka}) \cdot \gamma \quad (\text{I-172})$$

$$P_G = \left[\frac{\pi D^2}{4} H - \frac{1}{3} \frac{\pi D^2}{4} h \right] \cdot \gamma = \left[H - \frac{1}{3} h \right] \frac{\pi D^2}{4} \cdot \gamma \quad (\text{I-173})$$

P_D - parcie na dolną część zaworu

$$P_D = (\text{obj. walca} - \text{obj. półkuli}) \cdot \gamma \quad (\text{I-174})$$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$Q = P_D - P_G = \left[x - \frac{D}{3} - H + \frac{1}{3} h \right] \frac{\pi D^2}{4} \cdot \gamma, \quad (\text{I-175})$$

$$P_D = \left[\frac{\pi D^2}{4} x - \frac{4}{6} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right] \cdot \gamma = \left[x - \frac{D}{3} \right] \frac{\pi D^2}{4} \cdot \gamma \quad (\text{I-176})$$

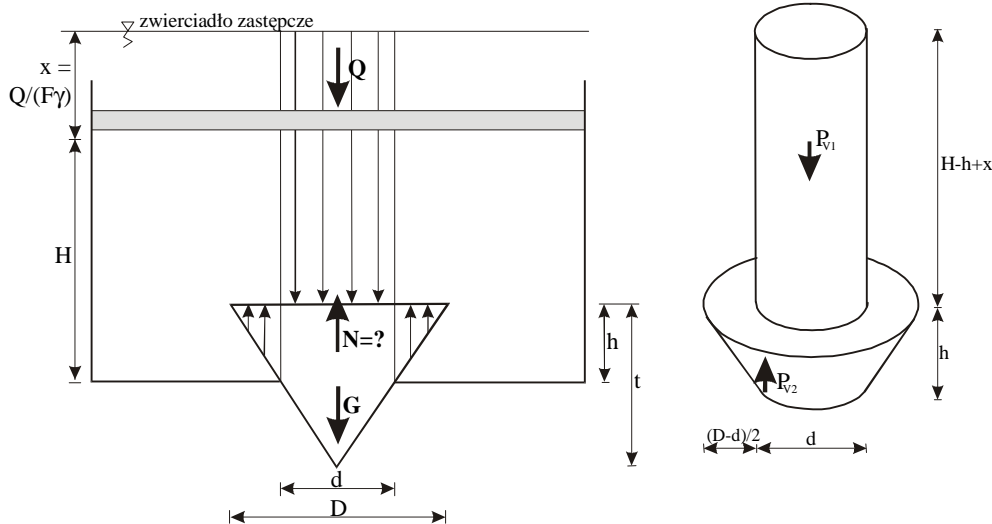
skąd można wyliczyć szukane napełnienie x , po przekroczeniu którego zawór podniesie się i odsłoni wylot przewodu.

PRZYKŁAD I-32

Otwór o średnicy d w dnie zbiornika zamykany jest stożkiem o ciężarze G . Zbiornik jest wypełniony cieczą do wysokości H , przy czym zwierciadło cieczy spoczywa szczelny tłok powierzchni F , obciążony siłą Q . Obliczyć siłę N potrzebną do wyciągnięcia stożka z otworu.

Dane: $G, Q, F, D, d, H, t, \gamma$

Szukane: N



Rys. I-72

Rozw.:

Aby uwzględnić działanie tłoka, należy zamienić jego działanie na działanie warstwy cieczy o takim samym ciężarze jak ciecz w zbiorniku i wysokości $x = Q/(F\cdot\gamma)$ ponad rzeczywistym zwierciadłem cieczy.

Aby zawór wyciągnąć, wartość szukanej siły N musi być większa od wartości sumy sił:

- wypadkowego parcia (w tym przypadku parcie poziome redukuje się, a zatem uwzględniamy jedynie składową pionową parcia $P_{V1} - P_{V2}$),
- ciężaru G .

Warunek równowagi stożka ma zatem postać: $N = G + P_{V1} - P_{V2}$.

Bryła parcia siły P_{V1} (patrz rys. I-72) jest walcem o wysokości $(H - h + x)$:

$$P_{V1} = \left(\frac{\pi d^2}{4} (H - h + x) \right) \gamma \quad (\text{I-177})$$

Bryła parcia siły P_{V2} (patrz rys. I-72) jest częścią wspólną ściętego stożka o wysokości h i walca o wysokości h :

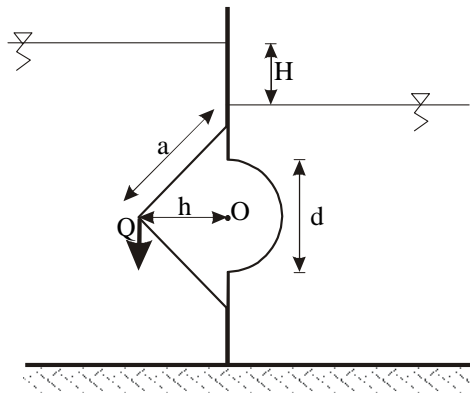
$$P_{V2} = \left(\frac{1}{3} \frac{\pi D^2}{4} t - \frac{1}{3} \frac{\pi d^2}{4} (t - h) - \frac{\pi d^2}{4} h \right) \gamma \quad (\text{I-178})$$

I.3.4. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem równowagi momentów sił

PRZYKŁAD I-33

Dla utrzymania stałej różnicy poziomów w zbiorniku, w jego ścianie działowej wmontowano zawór obracający się wokół osi O. Obliczyć, jaką siłę należy przyłożyć, by zawór pozostawał w równowadze pokazanej na rys. I-73. Z badać, czy Q zależy od H .

Dane: $a = 1 \text{ m}$, $d = 0,5 \text{ m}$, $h = 0,4 \text{ m}$.
Szukane: Q

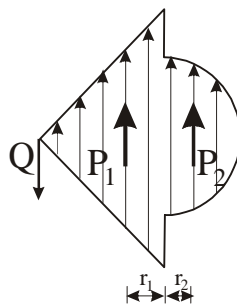


Rys. I-73

Rozw.:

Aby zawór pozostawał w równowadze, musi być spełniony warunek:

$$\sum M_0 = 0 \quad (I-179)$$



Rys. I-74

czyli:

$$Q \cdot h - P_1 \cdot r_1 + P_2 \cdot r_2 = 0 \quad (\text{I-180})$$

gdzie:

$$P_1 = V_1 \gamma = \frac{1}{3} \pi (a^2 - h^2) \gamma = 8,6 \text{ kN} \quad (\text{I-181})$$

$$P_2 = V_2 \gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 \gamma = 0,3 \text{ kN} \quad (\text{I-182})$$

$$r_1 = \frac{1}{3} h = 0,13 \text{ m} \quad (\text{I-183})$$

$$r_2 = \frac{2}{3\pi} d = 0,106 \text{ m} \quad (\text{I-184})$$

Zatem:

$$Q = \frac{P_1 \cdot r_1 - P_2 \cdot r_2}{h} = \frac{8,6 \cdot 0,13 - 0,3 \cdot 0,106}{0,4} = 2,7 \text{ kN} \quad (\text{I-185})$$

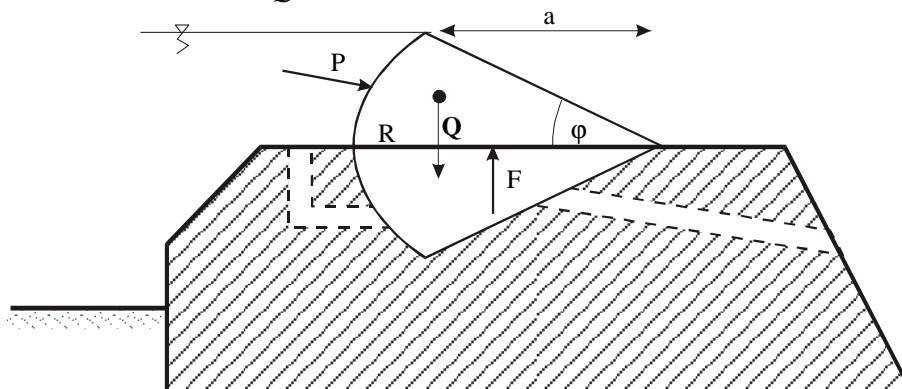
Wielkość siły Q nie zależy od różnicy poziomów w zbiorniku.

PRZYKŁAD I-34

Jaki powinien być ciężar Q segmentu, aby utrzymał się on w położeniu pokazanym na rys. I-75.

Dane: $R = 10 \text{ m}, a = 7 \text{ m}, b = 1,0 \text{ m}, \varphi = 30^\circ$

Szukane: Q



Rys. I-75

Rozw.:

Aby segment pozostawał w równowadze, musi być spełniony warunek:

$$\sum M_0 = 0 \quad (\text{I-186})$$

Siła parcia nie daje momentu, bo przechodzi przez punkt O.

$$Q \cdot a = F \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow Q = F \cdot \frac{R}{2a} \quad (\text{I-187})$$

Ponieważ rozkład ciśnień pod segmentem jest hydrostatyczny:

$$F = h \cdot R \cdot b \cdot \gamma = R \sin \varphi \cdot R \cdot b \cdot \gamma = 10^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9,81 = 490,5 \text{ kN} \quad (\text{I-188})$$

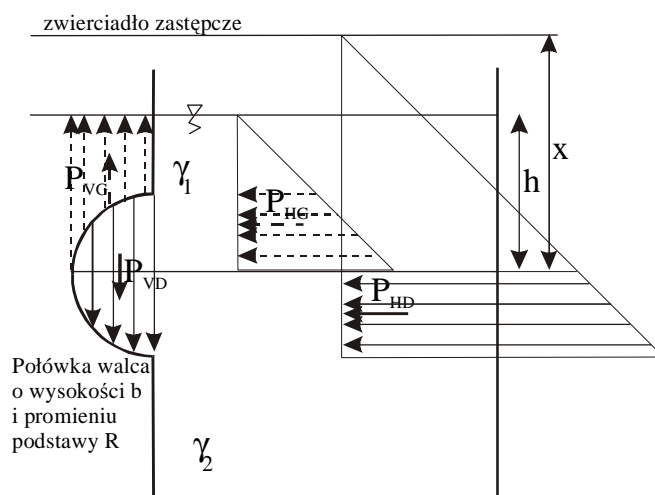
$$Q = F \cdot \frac{R}{2a} = 490,5 \cdot \frac{10}{2 \cdot 7} = 350 \text{ kN} \quad (\text{I-189})$$

I.3.5. Rozwiązywanie zadań w przypadku, gdy na daną ścianę działają ciecze o różnych ciężarach właściwych

PRZYKŁAD I-35

Obliczyć parcie na połówkę walca znajdującego się w ścianie zbiornika wypełnionego dwoma cieczami (rys. I-76).

Dane: $\gamma_1, \gamma_2, h, R, b$
Szukane: P



Rys. I-76

Rozw.:

1. **Parcie na górną część** (ćwiartkę) walca pochodzi tylko od cieczy o ciężarze właściwym γ_1 :

$$P_{HG} = (h - R + h)Rb\gamma_1 \quad (\text{I-190})$$

$$P_{VG} = \left(Rh - \frac{1}{4}\pi R^2\right)b\gamma_1 \quad (\text{I-191})$$

2. **Parcie na dolną część** (ćwiartkę) walca pochodzi zarówno od cieczy o ciężarze właściwym γ_1 , jak i γ_2 . Aby uwzględnić działanie górnej cieczy należy zamienić działanie warstwy cieczy o γ_1 , na działanie warstwy cieczy o γ_2 , czyli utworzyć zwierciadło zastępcze na wysokości x :

$$\gamma_1 h = \gamma_2 x \quad (\text{I-192})$$

$$P_{HD} = (x + x + R)Rb\gamma_2 \quad (\text{I-193})$$

$$P_{VD} = \frac{1}{2}\pi R^2 b\gamma_1 \quad (\text{I-194})$$

Parcie całkowite wynosi:

$$P = \sqrt{(P_{HG} + P_{VD})^2 + (P_{VG} - P_{VD})^2} \quad (\text{I-195})$$

PRZYKŁAD I-36

Zawór o ciężarze G , składający się z dwóch półkul (rys. I-77), zamyka otwór o średnicy d wykonany w poziomej ścianie przedzielającej zbiornik. Po przyłożeniu do tłoka w dolnej komorze zbiornika siły Q , zawór przesunął się do góry. Oblicz tę siłę.

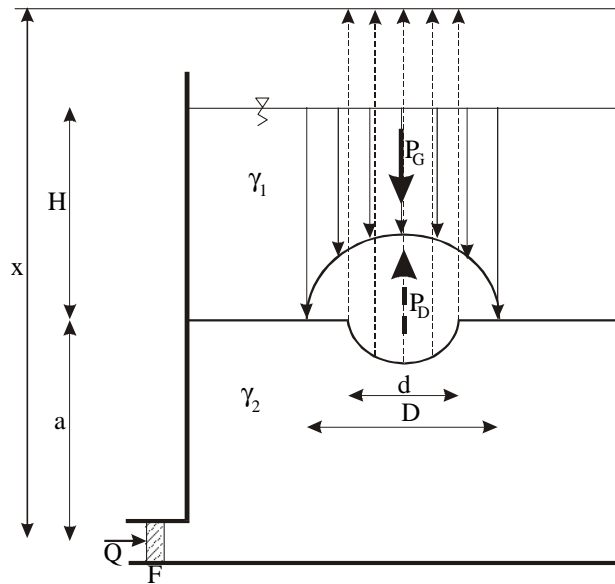
Dane: $G, d, D, H, a, \gamma_1, \gamma_2,$

Szuk: Q

Rozw.:

Aby uwzględnić działanie tłoka, należy podnieść zwierciadło wody dolnej o wysokość x .

$$x = \frac{Q}{F \cdot \gamma_2} \quad (\text{I-196})$$



Rys. I-77

Warunek równowagi sił działających na zawór:

$$G + P_G = P_D \quad (\text{I-197})$$

Siły parcia działające na zawór wynoszą:

$$P_G = \left(\frac{\pi D^2}{4} H - \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right) \gamma_1 \quad (\text{I-198})$$

$$P_D = \left(\frac{\pi d^2}{4} (x - a) + \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right) \gamma_2 \quad (\text{I-199})$$

Po podstawieniu:

$$G = \left(\frac{\pi D^2}{4} H - \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2} \right)^3 \right) \gamma_1 \quad (\text{I-200})$$

$$G = \left(\frac{\pi d^2}{4} \left(\frac{Q}{F \cdot \gamma_2} - a \right) + \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right) \gamma_2 \quad (\text{I-201})$$

Z ostatniego równania należy wyznaczyć szukaną wartość \$Q\$.

I.3.6. Wypór

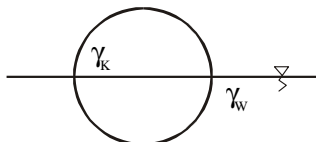
Wypór jest to wypadkowe parcie cieczy działającej na ciało zanurzone częściowo lub całkowicie (czyli skierowaną ku górze składową pionową parcia).

PRZYKŁAD I-37

Kula o ciężarze objętościowym γ_K pływa w cieczy. Obliczyć ciężar objętościowy cieczy, przy którym zanurzy się ona tylko do połowy swej objętości.

$$\begin{aligned} \text{Dane:} & \quad \gamma_K = 7 \text{ kN/m}^3 \\ \text{Szukane:} & \quad \gamma_C \end{aligned}$$

Rozw.:



Rys. I-78

Ciężar kuli:

$$G = V \cdot \gamma_K = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \gamma_K \quad (\text{I-202})$$

Wypór:

$$W = \frac{V}{2} \cdot \gamma_C = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \gamma_C \quad (\text{I-203})$$

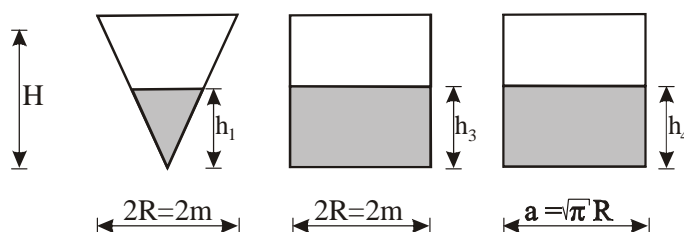
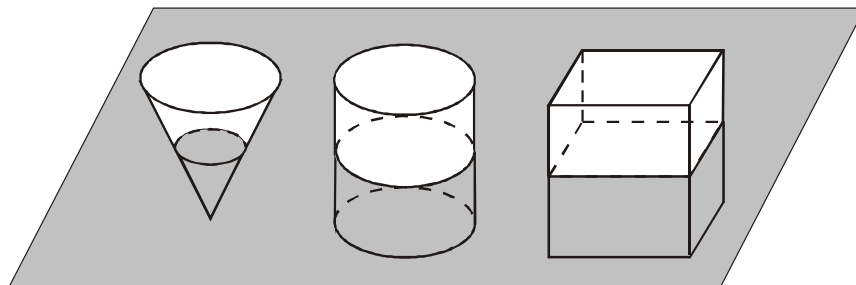
Kula będzie pływać w cieczy, gdy jej ciężar będzie zrównoworzony przez wypór, czyli: $G = W$, a zatem:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \gamma_K = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \gamma_C \quad \Rightarrow \quad \gamma_C = 2 \cdot \gamma_K = 14 \text{ kN/m}^3 \quad (\text{I-204})$$

PRZYKŁAD I-38

Na jaką głębokość h zanurzy się w wodzie korkowy walec, prostopadłościan i stożek o wysokości H i polu podstawy równym πR^2 (gęstość korka ρ_K).

$$\begin{aligned} \text{Dane:} & \quad \rho_K = 200 \text{ kg/m}^3, R = 1 \text{ m}, H = 2 \text{ m}, \gamma_w = 9810 \text{ N/m}^3 \\ \text{Szukane:} & \quad h_1, h_2, h_3 \end{aligned}$$



Rys. I-79

Rozw.:

Ciężar bryły jest iloczynem objętości tej bryły i jej ciężaru właściwego:

$$G = V \cdot \gamma_K \quad (I-205)$$

Wypór wyraża się iloczynem objętości części zanurzonej danej bryły i ciężaru właściwego wody:

$$W = \frac{V}{2} \cdot \gamma_C = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \gamma_C \quad (I-206)$$

Korzystając z warunku równowagi $G = W$ poszczególnych brył otrzymuje się równanie z jedną niewiadomą – szukaną głębokością zanurzenia danej bryły.

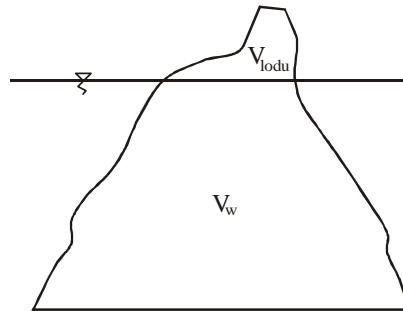
Wyniki obliczeń zebrano w poniższej tabeli.

	stożek	walec	prostokąt
Ciężar: $G = V \cdot \gamma_K$	$\frac{1}{3} \pi R^2 H \cdot \gamma_K$	$\pi R^2 H \cdot \gamma_K$	$\pi R^2 H \cdot \gamma_K$
Wypór: $W = V_{zan} \cdot \gamma_w$	$\frac{1}{3} \pi \left(\frac{R h_1}{H}\right)^2 h_1 \cdot \gamma_w$	$\pi R^2 h_3 \cdot \gamma_w$	$\pi R^2 h_4 \cdot \gamma_w$
Głębokość zanurzenia obliczona z warunku $G = W$	$h = \sqrt[3]{\frac{\gamma_K}{\gamma_w} H}$	$h_3 = \frac{\gamma_K}{\gamma_w} H$	$h_4 = \frac{\gamma_K}{\gamma_w} H$
Głębokość	1,17 m	0,4 m	0,4 m

PRZYKŁAD I-39

Jaka część góry lodowej wystaje ponad powierzchnię morza?

Dane: $\rho_{\text{lodu}} = 0,92 \text{ g/cm}^3$, $\rho_{\text{morza}} = 1,03 \text{ g/cm}^3$,



Rys. I-80

Rozw.:

Ciężar góry lodowej o objętości V_{lodu} :

$$G_L = V_{\text{lodu}} \cdot \rho_{\text{lodu}} \cdot g \quad (\text{I-207})$$

Ciężar wypartej wody o objętości V_w :

$$W = V_w \cdot \rho_{\text{morza}} \cdot g \quad (\text{I-208})$$

Góra pływa w morzu gdy:

$$W = G_L \Leftrightarrow V_{\text{lodu}} \cdot \rho_{\text{lodu}} \cdot g = V_w \cdot \rho_{\text{morza}} \cdot g \quad (\text{I-209})$$

Zatem stosunek objętości:

$$\frac{V_w}{V_{\text{lodu}}} = \frac{\rho_{\text{lodu}}}{\rho_{\text{morza}}} = \frac{0,92}{1,03} = 89,3\% \quad (\text{I-210})$$

Objętość wypartej wody V_w jest równa objętości zanurzonej części góry, lodowej, czyli nad powierzchnią morza wystaje niecałe 11 % tej góry.

PRZYKŁAD I-40

Określić najmniejszą powierzchnię kry lodowej o średniej grubości h , zdolnej utrzymać bałwanka o masie m . Gęstość lodu wynosi $0,92 \text{ g/cm}^3$.

Dane: $h = 0,5 \text{ m}$, $m = 70 \text{ kg}$, $\rho_L = 0,92 \text{ g/cm}^3$
Szukane: F



Rys. I-81

Rozw.:

Warunek równowagi:

$$W = G_L + G_{czb} \quad (\text{I-211})$$

gdzie:

$$\text{wypór: } W = F \cdot x \cdot \gamma_w \quad (\text{I-212})$$

$$\text{ciężar lodu: } G_L = F \cdot h \cdot \gamma_L \quad (\text{I-213})$$

$$\text{ciężar bałwanka: } G_{czl} = m \cdot g \quad (\text{I-214})$$

Przyjmując, że bałwanek zacznie tonąć, gdy kra całkowicie się zanurzy, czyli $h = x$ otrzymujemy:

$$F \cdot h \cdot \gamma_w = F \cdot h \cdot \gamma_L + m \cdot g \quad (\text{I-215})$$

Skąd:

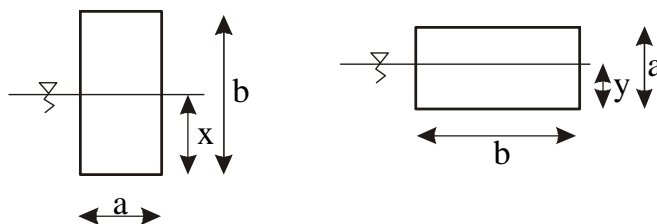
$$F = \frac{m \cdot g}{h \cdot (\rho_w - \rho_L) g} = \frac{70 \cdot 9,81}{0,5 \cdot (1000 - 920) \cdot 9,81} = 1,75 \text{ m}^2 \quad (\text{I-216})$$

PRZYKŁAD I-41

W którym położeniu (pionowym czy poziomym) dębowa bela w kształcie prostokąta o wymiarach $a \times a \times b$ zanurzy się głębiej?

Dane: $a = 0,5 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $\rho_{debu} = 700 \text{ kg/m}^3$

Szukane: x , y



Rys. I-82

Rozw.:

Ciężar beli:

$$G = a^2 \cdot b \cdot \rho_{debu} \cdot g = 0,5^2 \cdot 2 \cdot 700 \cdot 9,81 = 1,72 \text{ kN} \quad (\text{I-217})$$

Wypór w położeniu pionowym (rys. I-82):

$$W_1 = a^2 \cdot x \cdot \gamma_w = 0,5^2 \cdot x \cdot 9,81 = 2,45 \cdot x \text{ [kN]} \quad (\text{I-218})$$

Warunek równowagi:

$$W_1 = G \quad (\text{I-219})$$

$$2,45 \cdot x = 1,72 \text{ kN} \Rightarrow x = 0,70 \text{ m} \quad (\text{I-220})$$

Wypór w położeniu poziomym (rys. I-82):

$$W_2 = a \cdot b \cdot y \cdot \gamma_w = 0,5 \cdot 2 \cdot y \cdot 9,81 = 9,81 \cdot y \text{ [kN]} \quad (\text{I-221})$$

Warunek równowagi:

$$W_2 = G \quad (\text{I-222})$$

$$9,81 \cdot y = 1,72 \text{ kN} \Rightarrow y = 0,18 \text{ m} \quad (\text{I-223})$$

Bela zanurzy się głębiej gdy jest ustawiona pionowo o: $x - y = 0,52 \text{ m}$.

I.4. RÓWNOWAGA WZGLĘDNA CIECZY

Podstawowe równanie hydrostatyki ma postać:

$$dp = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz) \quad (\text{I-224})$$

gdzie: p – ciśnienie w punkcie cieczy,
 ρ – gęstość cieczy,
 a_x, a_y, a_z – składowe w poszczególnych kierunkach osi wypadkowej jednostkowych sił masowych działających na ciecz (siła jednostkowa to siła przypadająca na jednostkę masy).

I.4.1. Naczynie z cieczą wirujące ze stałą prędkością kątową wokół swej osi pionowej

Walcowate naczynie wypełnione cieczą do wysokości h wprowadzono w ruch obrotowy wokół osi pionowej ze stałą prędkością kątową ω . Na każdy element cieczy znajdującej się w tym naczyniu działają następujące siły masowe (patrz rys. I-83):

- siła ciężkości $G' = mg$ (gdzie m jest masą elementu cieczy),
- siła odśrodkowa $I' = m\omega^2 r$ (ruch jednostajny po okręgu o promieniu r).

Jednostkowe siły masowe (czyli liczone na jednostkę masy elementu) wynoszą:

- siła ciężkości $G = g$,
- siła odśrodkowa $J = \omega^2 \cdot r$,

gdzie r oznacza promień wodzący punktu, w którym obliczana jest siła (rys I-83).

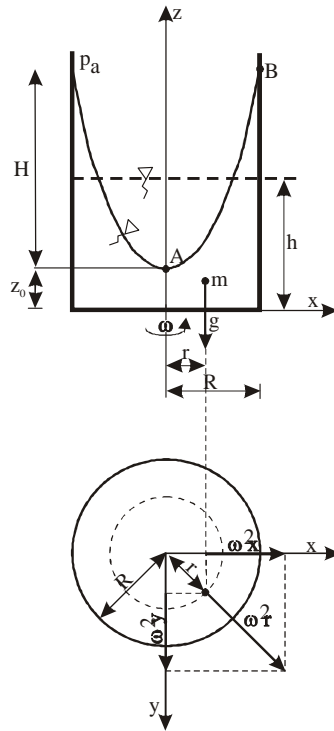
Składowe tych sił względem przyjętego jak na rys. I-83 układu współrzędnych (x, y, z) (oś z pokrywa się z osią wirowania naczynia, osie x i y leżą na poziomie dna naczynia), poruszającego się wraz z naczyniem są równe:

$$\begin{array}{lll} G_x = 0 & G_y = 0 & G_z = -g \\ J_x = \omega^2 \cdot x & J_y = \omega^2 \cdot y & J_z = 0 \end{array}$$

Składowe jednostkowej wypadkowej sił masowych wynoszą zatem:

$$a_x = \omega^2 x, a_y = \omega^2 y, a_z = -g \quad (\text{I-225})$$

Swobodna powierzchnia cieczy jest rodzajem powierzchni jednakowych ciśnień taką, że na każdy jej element działa ciśnienie atmosferyczne. Tak więc na powierzchni tej $p = p_a = \text{const}$, zatem $dp = 0$, czyli równanie równowagi (I-224) przybierze postać:



Rys. I-83

$$\omega^2 \cdot (x \cdot dx + y \cdot dy) - g \cdot dz = 0 \quad (\text{I-226})$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - g \cdot z = c, \quad (\text{I-227})$$

gdzie c jest stałą całkowania.

Po podstawieniu $x^2 + y^2 = r^2$ (równanie okręgu o promieniu r) uzyskamy całkę ogólną postaci:

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - g \cdot z = c \quad (\text{I-228})$$

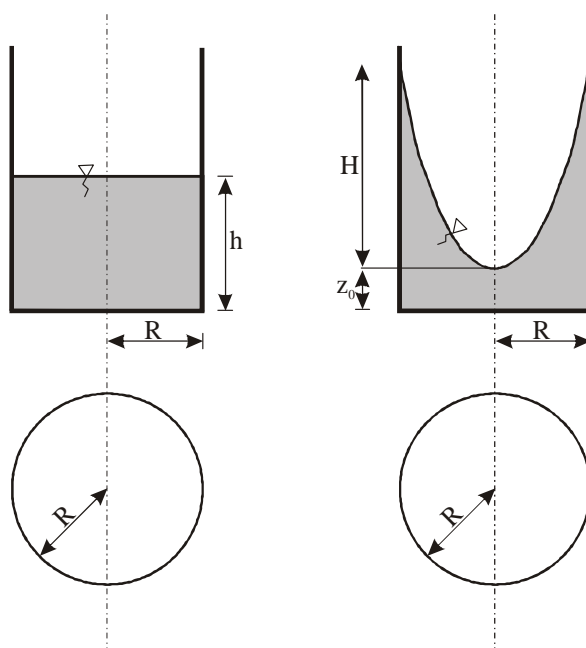
Chcąc wyprowadzić całkę szczególną (równanie swobodnej powierzchni cieczy), do powyższego równania należy podstawić współrzędne punktu A ($r = 0$, $z = z_0$) leżącego na brzegu obszaru. Stała całkowania wynosi zatem $c = -g \cdot z_0$

Równanie dla powierzchni swobodnego zwierciadła ciecży w naczyniu obracającym się ze stałą prędkością kątową ω przy przyjętym układzie współrzędnych jak na rys. I-83 ma ostatecznie postać:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z_0, \quad \text{gdzie } z = z(r) \quad (\text{I-229})$$

Uwaga! Jeżeli przyjmiemy początek układu współrzędnych w innym punkcie, wówczas zmienią się współrzędne punktu A konieczne do wyznaczenia stałej całkowania w równaniu (I-228), czyli i równanie (I-229) zmieni swą postać.

Ponieważ zazwyczaj wielkością daną nie jest wartość z_0 , a głębokość napełnienia naczynia przed wprawieniem go w ruch wirowy h , dlatego należy pozbyć się z_0 z równania (I-229). Należy wykorzystać tu fakt, że ilość ciecży w naczyniu nie uległa zmianie po wprawieniu go w ruch wirowy (rys. I-84).



Rys. I-84

Objętość ciecży przed wprawieniem naczynia w ruch wirowy:

$$V_0 = \pi R^2 \cdot h \quad (\text{I-230})$$

gdzie h jest napełnieniem ciecżą naczynia znajdującego się w spoczynku bezwzględnym.

Ponieważ objętość paraboloidy obrotowej o wysokości H odpowiada połowie objętości opisanego na niej walca, objętość cieczy po uruchomieniu wprawieniu naczynia w ruch wirowy (w przypadku, gdy $z_0 \geq 0$) wynosi:

$$V_K = \pi R^2 \cdot \left[z_0 + \frac{H}{2} \right] \quad (\text{I-231})$$

Ponieważ ilość cieczy nie zmieniła się, więc:

$$V_0 = V_K \Rightarrow z_0 = h - \frac{H}{2} \quad (\text{I-232})$$

Dla obliczenia nieznannej wysokości H , należy do równania powierzchni zwierciadła wody (I-229) podstawić współrzędne skrajnego punktu B zwierciadła ($r = R$ i $z = H + z_0$):

$$H + z_0 = \frac{\omega^2 R^2}{2g} + z_0 \Rightarrow H = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \quad (\text{I-233})$$

Po podstawieniu (I-232) do (I-233) obliczyć można:

$$z_0 = h - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (\text{I-234})$$

Ostateczna postać równania zwierciadła w naczyniu wirującym przy układzie współrzędnych przyjętym jak na rys. I-83 ma postać:

$$z = h + \frac{\omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right) \quad (\text{I-235})$$

I.4.2. Naczynie z cieczą poruszające się ruchem jednostajnie zmiennym, prostoliniowym

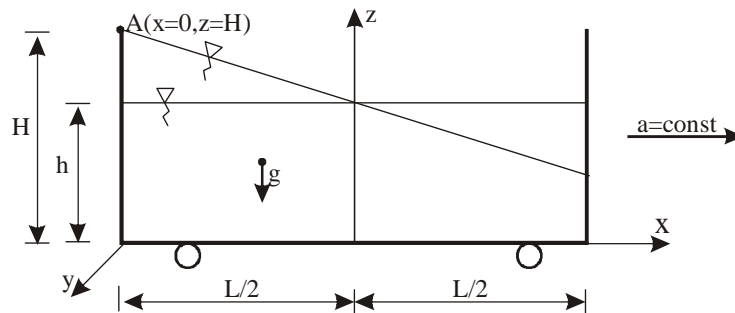
Rozpatrujemy naczynie prostopadłościenne (rys. I-85) o wysokości H i długości L wypełnione cieczą do wysokości h poruszające się po torze prostoliniowym (niekoniecznie poziomym) ze stałym przyspieszeniem a . Na każdy element cieczy znajdującej się w tym naczyniu działają jednostkowe siły masowe:

- siła ciężkości G ,
- siła bezwładności F wynikająca z poruszania się naczynia z przyspieszeniem a .

Składowe tych sił względem przyjętego układu współrzędnych poruszającego wraz z naczyniem są następujące:

$$G_x = 0, \quad G_y = 0, \quad G_z = -g,$$

$$F_x = -a, \quad F_y = 0, \quad F_z = 0.$$



Rys. I-85

Ostatecznie składowe jednostkowej wypadkowej sił masowych wynoszą:

$$a_x = -a, a_y = 0, a_z = -g \quad (\text{I-236})$$

Ponieważ wyprowadzamy równanie swobodnego zwierciadła na które działa stałe ciśnienie atmosferyczne, zatem lewa część równania równowagi (I-223) zeruje się. Podstawiając składowe do równania równowagi i scałkowaniu otrzymujemy:

$$ax + gz = c \quad (\text{I-237})$$

gdzie c jest stałą całkowania.

Podstawiając warunek na brzegu powierzchni: $A(x=0, z=h)$ stała całkowania wynosi $c = gh$

Równanie powierzchni zwierciadła wody w naczyniu poruszającym się ze stałym przyspieszeniem a dla układu współrzędnych przyjętego jak na rys. I-85 przyjmuje postać:

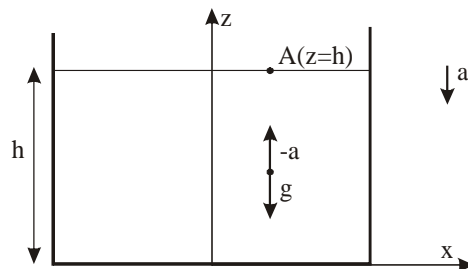
$$z = -\frac{a}{g}x + h \quad (\text{I-238})$$

I.4.3. Naczynie z cieczą poruszające się ze stałym przyspieszeniem w dół

Poprzednie rozważania dotyczyły przypadków, gdy jedyną pionową siłą masową działającą na ciecz była siła ciężkości. W przypadku, gdy tak nie jest, wzór $p = p_0 + \gamma h$ na podstawie którego obliczyć można ciśnienie w punkcie cieczy przestaje obowiązywać.

Rozpatrzmy przypadek, gdy naczynie z cieczą porusza się ze stałym przyspieszeniem w dół (rys. I-86). Wtedy na każdy element cieczy znajdującej się

w tym naczyniu działają następujące jednostkowe siły masowe: siła ciężkości G i siła bezwładności F wynikająca z poruszania się naczynia z przyspieszeniem a .



Rys. I-86

Składowe tych sił względem przyjętego układu współrzędnych poruszającego wraz z naczyniem są następujące: $G_x = 0, G_y = 0, G_z = -g, F_x = 0, F_y = 0, F_z = a$.

Składowe jednostkowych sił masowych działające na ciecz:

$$a_x = 0, a_y = 0, a_z = a - g \quad (\text{I-239})$$

Ponieważ (jak poprzednio) wyprowadzamy równanie swobodnego zwierciadła na które działa stałe ciśnienie atmosferyczne, zatem lewa część równania równowagi (I-224) zeruje się. Podstawiając składowe do równania równowagi otrzymujemy:

$$\rho (a - g) dz = 0 \quad (\text{I-240})$$

Po scałkowaniu:

$$(a - g) z = c \quad (\text{I-241})$$

Przyjmując warunek na brzegu obszaru, $A (z = h)$, stała całkowania c wynosi: $c = (a - g) \cdot h$, czyli równanie swobodnego zwierciadła cieczy przyjmuje postać:

$$z = h \quad (\text{I-242})$$

co oznacza, że zwierciadło to układu się poziomo na wysokości h ponad dnem naczynia.

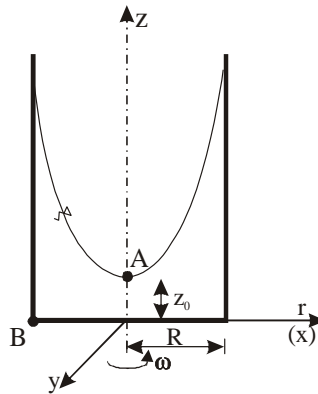
I.4.4. Zadania

PRZYKŁAD I-42

Wyznaczyć ciśnienie w punkcie B naczynia w kształcie walca o promieniu podstawy R , które obraca się wokół pionowej osi ze stałą prędkością obrotową ω .

Dane: $R = 15 \text{ cm}, \omega = 15 \text{ rad /s}, z_0 = 4,7 \text{ cm}$

Szukane: p_A



Rys. I-87

Rozw.:

Równanie równowagi (I-224) wyraża się jako: $dp = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz)$

Na naczynie działają następujące jednostkowe siły masowe: siła ciężkości $G = g$ i siła odśrodkowa $I = \omega^2 r$. Składowe jednostkowej wypadkowej sił masowych wynoszą zatem:

$$a_x = \omega^2 x, a_y = \omega^2 y, a_z = -g \quad (\text{I-243})$$

Po scałkowaniu równanie równowagi przyjmuje postać:

$$p = \rho \left(\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - g \cdot z \right) + c \quad (\text{I-244})$$

gdzie c jest stałą całkowania.

Po podstawieniu równania okręgu ($x^2 + y^2 = r^2$)

$$p = \rho \left(\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - g z \right) + C \quad (\text{I-245})$$

Przyjmując warunek początkowy w punkcie A ($r=0, z=z_0, p=p_a$), stała całkowania wynosi:

$$c = p_a + \rho \cdot z_0 \quad (\text{I-246})$$

Równanie dla powierzchni zwierciadła wody przyjmuje zatem postać:

$$p = \rho \left(\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - g \cdot z \right) + p_a + \rho z_0 \quad (\text{I-247})$$

W punkcie B ($r=R, z=0, p=p_A$), ciśnienie wyniesie zatem:

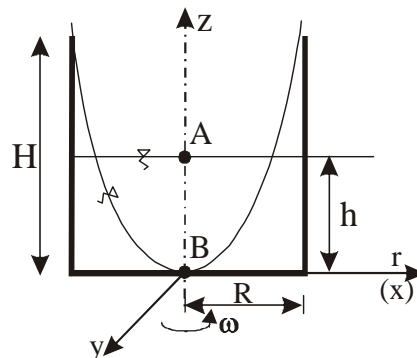
$$p_A = \rho \frac{1}{2} \omega^2 R^2 + p_a + \gamma z_0 = p_a + \gamma \left(\frac{\omega^2 R^2}{2g} + z_0 \right) \quad (\text{I-248})$$

$$p_A = 101325 + 9810 \left(\frac{15^2 \cdot 0,15^2}{2 \cdot 9,81} + 4,7 \right) = 149963 \text{ Pa} \cong 150 \text{ kPa} \quad (\text{I-249})$$

PRZYKŁAD I-43

Dane jest naczynie w kształcie walca o wysokości H obracające się wokół pionowej osi ze stałą prędkością obrotową ω taką, że paraboloida zwierciadła styka się z dnem. Ile wody wyleje się z naczynia ?

Dane: $R = 15 \text{ cm}, h = 20 \text{ cm}, H = 25 \text{ cm}$
 Szukane: V



Rys. I-88

Rozw.:

Podstawowe równanie hydrostatyki ma postać: $dp = \rho(a_x dx + a_y dy + a_z dz)$

Na naczynie działają następujące jednostkowe siły masowe: siła ciężkości $G = g$ i siła odśrodkowa $I = \omega^2 r$. Składowe jednostkowej wypadkowej sił masowych wynoszą: $a_x = \omega^2 x, a_y = \omega^2 y, a_z = -g$

Po scałkowaniu równanie równowagi przyjmie postać:

$$p = \rho \left(\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - g \cdot z \right) + c = \rho \left(\frac{\omega^2}{2} r^2 - g \cdot z \right) + c, \quad (\text{I-250})$$

gdzie c jest stałą całkowania.

Przyjmując *warunek początkowy* w punkcie B ($r = 0, z = 0, p = p_a, \omega = \omega_{gr}$), stała całkowania jest równa $C = p_a$.

Równanie dla powierzchni zwierciadła wody ($p = p_a$) przyjmuje zatem postać:

$$\omega = \frac{\sqrt{2gz}}{r} \quad (\text{I-251})$$

Aby obliczyć *graniczną prędkość kątową*, postawiono *warunek początkowy* A ($r = R, z = h, p = p_a, \omega = \omega_{gr}$)

$$\omega_{gr} = \frac{\sqrt{2gh}}{R} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,2}}{0,15} = 13,2 \text{ rad/s} \quad (\text{I-252})$$

Zwierciadło wody układa się w kształt *paraboloidy obrotowej* o wysokości x , która wynosi (po podstawieniu do równania (I-250) współrzędnych punktu C ($r = R, z = x, \omega = \omega_{gr}$))

$$x = \frac{\omega_{gr}^2 \cdot R^2}{2g} \quad (\text{I-253})$$

Objętość *paraboloidy* o wysokości x wynosi:

$$V_{par} = \frac{1}{2} \pi R^2 x = \frac{1}{2} \pi R^2 \frac{\omega_{gr}^2 \cdot R^2}{2g} = \frac{\pi}{4g} \omega_{gr}^2 \cdot R^4 \quad (\text{I-254})$$

Objętość *wylanej wody*:

$$V_{wyl} = V_{poczatkowa} - (V_{wirowki} - V_{paraboloidy}) \quad (\text{I-255})$$

$$V_{wyl} = \pi R^2 h - \left(\pi R^2 H - \frac{\pi}{4g} \omega_{gr}^2 \cdot R^4 \right) = \pi R^2 \left(h - H + \frac{\omega_{gr}^2 \cdot R^2}{4g} \right) \quad (\text{I-256})$$

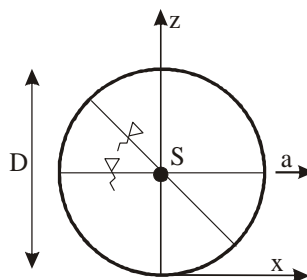
$$V_{wyl} = 3,14 \cdot 0,15^2 \left(0,25 - 0,20 + \frac{13,2^2 \cdot 0,15^4}{4 \cdot 9,81} \right) = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad (\text{I-257})$$

Z naczynia wyleje się 3,5 litra wody.

PRZYKŁAD I-44

Walec o średnicy D i długości L wypełniony do połowy cieczą (rys. I-89), przesuwa się (bez tarcia) w poziomie ze stałym przyspieszeniem a . Ile musi wynosić to przyspieszenie, by zwierciadło wody wewnątrz walca obróciło się o kąt α ?

Dane: $D, L, \alpha = 45^\circ$
Szukane: a



Rys. I-89

Rozw.:

Składowe jednostkowych sił masowych działające na ciecz:

$$a_x = -a, a_z = -g \quad (\text{I-258})$$

Podstawiając te przyspieszenia do równania równowagi (I-224):

$$dp = \rho (-adx - gdz) \quad (\text{I-259})$$

Po scałkowaniu:

$$ax + gz = c \quad (\text{I-260})$$

Podstawiając jako warunek brzegowy współrzędne punktu S ($x = 0, z = D/2$), obliczyć można stałą całkowania: $c = g D/2$.

Równanie zwierciadła cieczy przyjmuje zatem postać:

$$z = -\frac{a}{g}x + \frac{D}{2} \quad (\text{I-261})$$

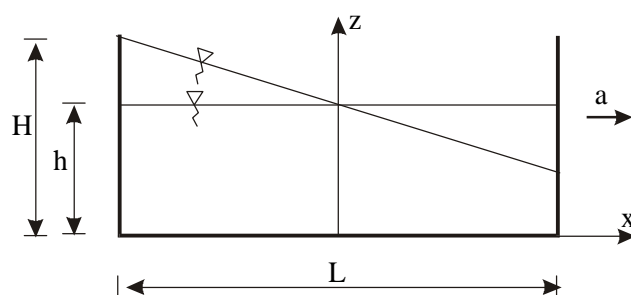
Korzystając z własności funkcji liniowej zauważyć można, że ponieważ $\tan 45^\circ = 1$, więc $-a/g = 1$, czyli $a = -g$.

Aby zwierciadło wody ułożyło się pod kątem 45° do poziomemu, przyspieszenie musi być co do wartości równe przyspieszeniu ziemskiemu.

PRZYKŁAD I-45

Prostopadłościenne naczynie o wymiarach $L \times H \times b$ wypełnione jest cieczą do wysokości h . Obliczyć jakie musi być przyspieszenie a poruszającego się naczynia, by ciecz sięgała jego krawędzi?

Dane: $L = 3 \text{ m}, H = 1,5 \text{ m}, h = 1 \text{ m}$
Szukane: a



Rys. I-90

Rozw.:

Składowe jednostkowych sił masowych działające na ciecz:

$$a_x = -a, a_z = -g \quad (\text{I-262})$$

Podstawiając te przyspieszenia do równania równowagi (I-224):

$$dp = \rho (-adx - gdz) \quad (\text{I-263})$$

Po scałkowaniu:

$$ax + gz = c \quad (\text{I-264})$$

Podstawiając warunek początkowy ($x = 0, z = h$), obliczyć można stałą całkowania: $c = gh$. Równanie zwierciadła cieczy można zapisać jako:

$$z = -\frac{a}{g}x + h \quad (\text{I-265})$$

Podstawiając warunek brzegowy ($x = -L/2, z = H$) powyższe równanie zwierciadła cieczy przyjmuje zatem postać:

$$H = -\frac{a}{g} \cdot \left(\frac{L}{2}\right) + h \quad (\text{I-266})$$

Skąd wyliczyć można przyspieszenie:

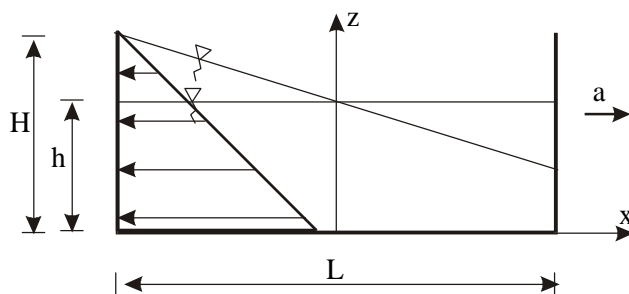
$$a = \frac{2g}{L} \cdot (H - h) = \frac{2 \cdot 9,81}{3} \cdot (1,5 - 1) = 3,27 \text{ m/s} = 11,7 \text{ km/h} \quad (\text{I-267})$$

PRZYKŁAD I-46

Naczynie w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $L \times H \times b$ wypełniono cieczą do wysokości h i wprowadzono w ruch ze stałym przyspieszeniem. Przy jakim przyspieszeniu a parcie na tylną ścianę tego naczynia będzie maksymalne (przy założeniu, że w trakcie ruchu ciecz nie wylewa się z naczynia)?

Dane: $L, H, h, \gamma, P_{\max}$

Szukane: a



Rys. I-91

Rozw.:

Parcie na tylną ścianę naczynia liczone metodą graficzno – analityczną wynosi:

$$P_{\max} = \frac{H^2}{2} L \gamma \Rightarrow H = \sqrt{\frac{2P_{\max}}{\gamma L}} \quad (\text{I-268})$$

Składowe jednostkowych sił masowych działające na ciecz:

$$a_x = -a, a_z = -g \quad (\text{I-269})$$

Podstawiając te przyspieszenia do równania równowagi (I-224):

$$dp = \rho (-adx - gdz) \quad (\text{I-270})$$

Po scałkowaniu:

$$ax + gz = c \quad (\text{I-271})$$

Podstawiając warunek początkowy ($x = 0, z = h$), obliczyć można stałą całkowania: $c = gh$. Zatem równanie zwierciadła cieczy można zapisać jako:

$$z = -\frac{a}{g}x + h \quad (\text{I-272})$$

Podstawiając warunek brzegowy ($x = -L/2, z = H$) powyższe równanie zwierciadła cieczy przyjmuje zatem postać:

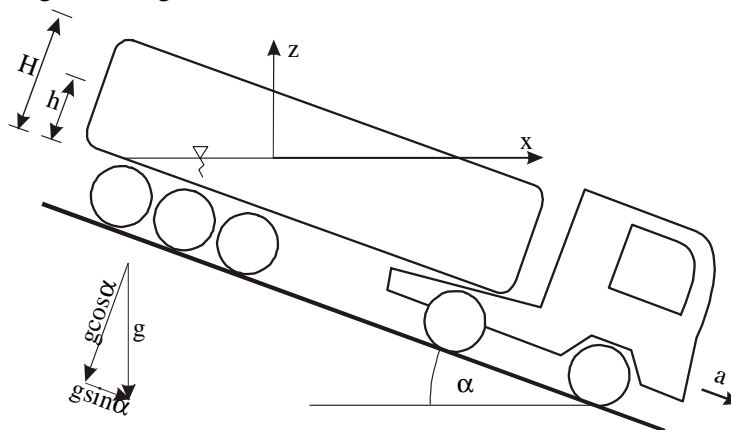
$$H = -\frac{a}{g} \cdot \left(\frac{L}{2}\right) + h \quad (\text{I-273})$$

Podstawiając wyliczoną wcześniej wartość H szukane przyspieszenie ma wartość:

$$a = \frac{2g}{L} \cdot (H - h) = \frac{2g}{L} \cdot \left(\sqrt{\frac{2P_{\max}}{\gamma L}} - h\right) \quad (\text{I-274})$$

PRZYKŁAD I-47

Cysterna zjeżdża na bieżni łańcuchowej ze wzniesienia nachylnego pod kątem α do poziomu (rys. I-92). Pomijając opory ruchu wykazać, że ciecz w cysternie ułoży się równoległe do drogi.



Rys. I-92

Rozw.:

Składowe jednostkowych sił masowych działające na ciecz:

$$a_x = -g \sin \alpha, a_z = -g \cos \alpha \quad (\text{I-275})$$

Podstawiając te wielkości do równania równowagi (I-224), przy założeniu $p = p_a$:

$$g \sin \alpha dx + g \cos \alpha dz = 0 \quad (\text{I-276})$$

Po scałkowaniu:

$$\sin \alpha x + \cos \alpha z = c \quad (\text{I-277})$$

Podstawiając warunek początkowy ($x = 0, z = 0$), stała całkowania wynosi: $c = 0$.

Równanie zwierciadła cieczy zapisuje się:

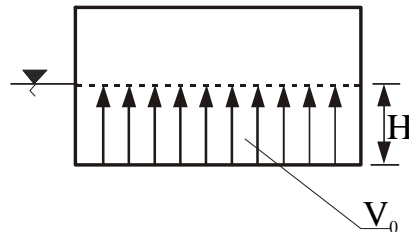
$$z = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x = -\operatorname{tg} \alpha x \quad (\text{I-278})$$

Czyli zwierciadło cieczy układa się równoległe do dna.

I.5. PŁYWANIE CIAŁ

I.5.1. Ogólne warunki równowagi (pływania)

Na ciało stałe zanurzone w cieczy działa siła wyporu W i przeciwie do niej skierowana siła ciężkości G . Ciało to pozostaje w równowadze, gdy suma sił zewnętrznych (wypór + ciężar) jest równa zero: $|\overline{W}| = |\overline{G}|$. Jeżeli równanie nie jest spełnione obiekt tonie lub wypływa.



Rys. I-93

W przypadku ciała zanurzonego częściowo (rys. I-93):

$$W = \gamma \cdot V_0 \quad (\text{I-279})$$

gdzie: W – siła wyporu, wyporność,
 γ – ciężar właściwy cieczy,
 $V_0 = f(H)$ – objętość części zanurzonej (bryły wyporu).

Wraz ze zmianą zanurzenia zmienia się wypór W , a układ sił zmierza do równowagi.

Położenie pływania jest to takie położenie ciała pływającego, przy którym wypór równoważy ciężar ciała ($G = W$), a środek ciężkości i wyporu znajdują się na jednej prostej (zatem ciało pozostaje w równowadze sił i momentów).

Wychylenie z tego położenia wywołuje powstanie momentu sił powodującego obrót zwierciadła.

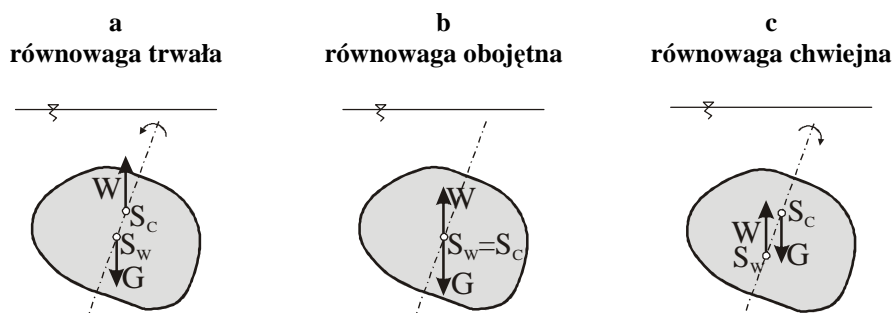
Oś pływania jest to prosta przechodząca przez środek wyporu i środek ciężkości ciała znajdującego się w położeniu pływania. Oś ta jest związana z ciałem i odchylenia się razem z nim.

I.5.2. Równowaga ciała pływającego całkowicie zanurzonego

O stanie równowagi ciała całkowicie zanurzonego w ciecz decyduje położenia jego środka ciężkości. Środek wyporu bowiem nie zmienia swego położenia przy przechyle, ponieważ nie zmienia się kształt bryły wyporu.

Ciało całkowicie zanurzone może pozostać w równowadze (rys. I-94):

- **równowadze trwałej** gdy środek ciężkości znajduje się poniżej środka wyporu (istnieje moment prostujący), czyli ciało wychylone z położenia równowagi samo do niego powraca po usunięciu przyczyny wychylenia;
- **równowadze obojętnej** gdy ciało jest jednorodne i środek ciężkości pokrywa się z środkiem wyporu, czyli ciało pływa w dowolnej pozycji;
- **równowadze chwiejnej** – nietrwałej gdy środek ciężkości znajduje się powyżej środka wyporu (powstaje moment przewracający), czyli ciało wychylone z położenia równowagi coraz bardziej się od niego oddala.



Rys. I-94 Warunki równowagi ciał całkowicie zanurzonych w cieczy

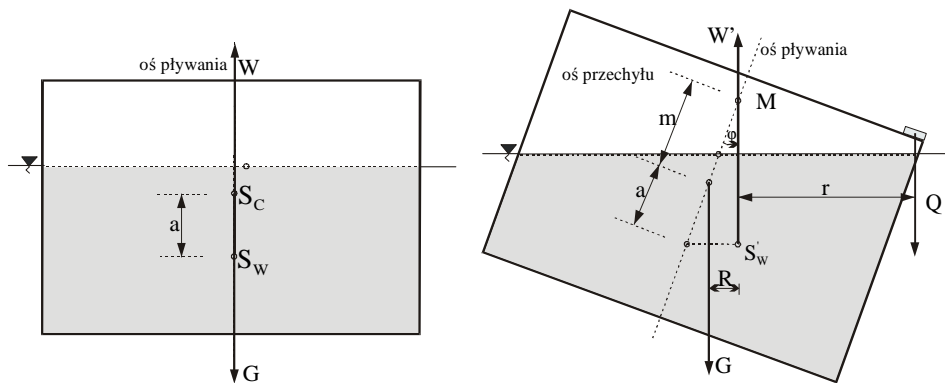
I.5.3. Równowaga ciała pływającego częściowo zanurzonego

Wychylenie obiektu z położenia pływania (rys. I-95) przy zachowaniu warunku $W = G$ powoduje zmianę kształtu bryły wyporu bez zmiany jej objętości V_0 .

Środek wyporu S_W przesuwa się do punktu S_W' i powstaje para sił prostujących obiekt momentem siły:

$$M_s = W \cdot R = G \cdot m \cdot \sin \varphi \cong W \cdot m \cdot \varphi \quad (\text{I-280})$$

(przy niewielkich kątach $\sin \varphi \cong \varphi [\text{rad}]$).



Rys. I-95

Metacentrum M jest to punkt przecięcia kierunku siły wyporu z osią pływania przy niewielkim wychyleniu ciała z położenia pływania.

Wysokość metacentryczna m jest to wysokość wzniesienia metacentrum ponad środkiem ciężkości ciała pływającego.

O wielkości momentu prostującego decyduje zatem **wysokość metacentryczna m** zależna od geometrii i rozkładu masy obiektu.

Ciało częściowo zanurzone pozostaje w (rys. I-96):

- **równowadze trwałej** gdy $m > 0$, (istnieje moment prostujący) – ciało wychylone z położenia równowagi samo do niego powraca po usunięciu przyczyny wychylenia,
- **równowadze obojętnej** gdy $m = 0$, (brak momentu prostującego) – po wychyleniu ciało pozostaje w nadanym mu położeniu,
- **równowadze chwiejnej** – nietrwałej gdy $m < 0$, (przy wychyleniu powstaje moment przewracający) – ciało wychylone z położenia równowagi coraz bardziej się od niego oddala.

	a równowaga trwała	b równowaga obojętna	c równowaga chwiejna
położenie ciała przed wychyleniem			
położenie ciała po wychyleniu			

Rys. I-96 Warunki równowagi ciał częściowo zanurzonych

I.5.4. Wyznaczenie wysokości metacentrycznej

Wzór na wysokość metacentryczną wyprowadza się, rozważając moment obrotowy pary sił W i G , jaki powstaje na skutek wychylenia ciała z położenia równowagi o kąt φ .

$$m = \frac{I}{V_0} - a \quad (\text{I-281})$$

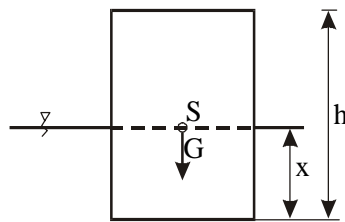
gdzie: m – wysokość metacentryczna,
 I – moment bezwładności płaszczyzny pływania względem osi przechyłu,
 V_0 – objętość bryły wyporu,
 a – odległość środka ciężkości ciała od środka wyporu w położeniu pływania.

Uwaga: Do obliczenia wysokości metacentrycznej przyjmuje się przypadek najniekorzystniejszy, $m = m_{\min}$ uzyskiwany dla $I = I_{\min}$, a więc moment bezwładności względem podłużnej osi symetrii obiektu pływającego.

PRZYKŁAD I-48

Cylindryczna boja o średnicy D , wysokości h i ciężarze G znajduje się w wodzie morskiej o ciężarze właściwym γ_M . Wykazać, że dla zadanych wielkości boja znajduje się w równowadze nietrwalej o obliczyć siłę Q w łańcuchu kotwiącym koniecznym do utrzymania boi w pionie.

Dane: $D = 1,5 \text{ m}$, $h = 2,0 \text{ m}$, $G = 7500 \text{ N}$, $\gamma_M = 10 \text{ kN/m}^3$
Szukane: m , Q



Rys. I-97

Rozw.:

Objętość boi:

$$V = \frac{\pi D^2}{4} h = \frac{\pi \cdot 1,5^2}{4} 2 = 3,53 \text{ m}^3 \quad (\text{I-282})$$

Ciężar boi:

$$G = 7500 \text{ N} \quad (\text{I-283})$$

Wypór (patrz rozdział I.3.6)

$$W = \gamma_M \cdot x \cdot \frac{\pi D^2}{4} \quad (\text{I-284})$$

Korzystając z warunku równowagi ciała, obliczyć można głębokość jego zanurzenia:

$$W = G \Leftrightarrow x = \frac{4 \cdot W}{\pi \cdot D^2 \cdot \gamma_M} = \frac{4 \cdot 7500}{3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 10^4} = 0,42 \text{ m} \quad (\text{I-285})$$

Odległość między środkiem ciężkości a środkiem wyporu:

$$a = \frac{h}{2} - \frac{x}{2} = \frac{1,5}{2} - \frac{0,42}{2} = 0,54 \text{ m} \quad (\text{I-286})$$

Moment bezwładności:

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 1,5^4}{64} = 0,25 \text{ m}^4 \quad (\text{I-287})$$

Wysokość metacentryczna policzona według wzoru (I-281) wynosi::

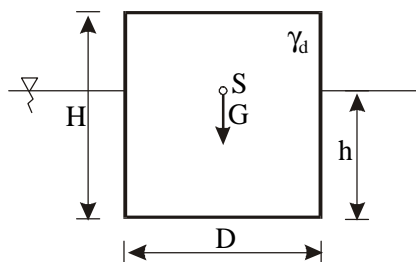
$$m = \frac{I}{V} - a = \frac{0,25}{3,53} - 0,54 = -0,47 \text{ m} \quad (\text{I-288})$$

Wysokość metacentryczna jest mniejsza od zera, czyli równowaga jest chwiejna.

PRZYKŁAD I-49

Jaka może być maksymalna wysokość drewnianego cylindra o średnicy D i ciężarze właściwym γ_d , aby pływał w równowadze stałej z osią pływania skierowaną pionowo w wodzie.

Dane: $D = 0,8 \text{ m}$, $\gamma_d = 5000 \text{ N/m}^3$
Szukane: H



Rys. I-98

Rozw.:

Ciężar cylindra:

$$G = \frac{\pi D^2}{4} H \cdot \gamma_d \quad (\text{I-289})$$

Wypór:

$$W = \frac{\pi D^2}{4} \cdot h \cdot \gamma \quad (\text{I-290})$$

Korzystając z warunku równowagi ciała, obliczyć można głębokość jego zanurzenia:

$$W = G \Leftrightarrow \frac{\pi D^2}{4} \cdot h \cdot \gamma = \frac{\pi D^2}{4} \cdot H \cdot \gamma_d \Leftrightarrow H = \frac{\gamma}{\gamma_d} h \quad (\text{I-291})$$

Aby klocek był w równowadze trwałej wysokość metacentryczna musi być większa od zera.

$$m = \frac{I}{V} - a = \frac{\pi D^4}{\frac{\pi D^2}{4} H} - \left(\frac{H}{2} - \frac{h}{2} \right) > 0 \quad (\text{I-292})$$

Po przekształceniu i podstawieniu wyznaczonego wcześniej związku pomiędzy głębokościami h i H otrzymujemy:

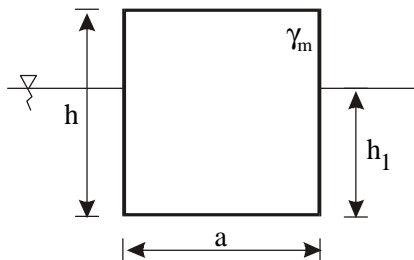
$$H < \sqrt{\frac{\gamma}{8(\gamma - \gamma_d)}} D = \sqrt{\frac{9810}{8 \cdot (9810 - 5000)}} \cdot 0,8 \quad (\text{I-293})$$

Czyli cylinder drewniany musi mieć wysokość mniejszą niż 0,5 m.

PRZYKŁAD I-50

Sprawdzić stateczność pustego, cienkościennego, metalowej barki w kształcie prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times h$.

Dane: $a = 6 \text{ m}$, $b = 0,4 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$, $G = 4000 \text{ N}$, $\gamma_{met} = 20 \text{ kN/m}^3$



Rys. I-99

Rozw.:

Ciężar barki:

$$W = a \cdot b \cdot h_1 \cdot \gamma = 6 \cdot 0,4 \cdot h_1 \cdot 9810 = 23544 \cdot h_1 \text{ [N]} \quad (\text{I-294})$$

Z równania równowagi obliczyć można głębokość zanurzenia barki:

$$G = W \Leftrightarrow 4000 = 23544 \cdot h_1 \Rightarrow h_1 = 0,17 \text{ m} \quad (\text{I-295})$$

Z równania równowagi obliczyć można głębokość zanurzenia barki:

$$G = W \Leftrightarrow 4000 = 23544 \cdot h_1 \Rightarrow h_1 = 0,17 \text{ m} \quad (\text{I-296})$$

Odległość między środkiem ciężkości a środkiem wyporu:

$$a_1 = z_{s1} - \frac{h_1}{2} = 0,8 - \frac{0,17}{2} = 0,715 \text{ m} \quad (\text{I-297})$$

Moment bezwładności względem osi w płaszczyźnie pływania:

$$I_1 = \frac{ba^3}{12} = \frac{40 \cdot 6^4}{12} = 720 \text{ m}^4 \quad (\text{I-298})$$

Objętość części zanurzonej:

$$V_1 = 6 \cdot 40 \cdot 0,17 = 40,8 \text{ m}^3 \quad (\text{I-299})$$

Wysokość metacentryczna:

$$m_1 = \frac{I_1}{V_1} - a_1 = \frac{720}{40,8} - 0,715 = 17 \text{ m} \quad (\text{I-300})$$

Wysokość metacentryczna jest dodatnia, czyli barka jest w równowadze trwałej.

II. HYDRAULIKA RUROCIĄGÓW

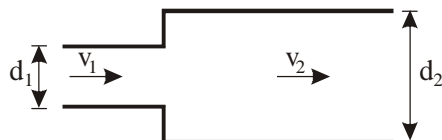
W zamkniętych przewodach całkowicie wypełnionych cieczą, ruch cieczy odbywa się dzięki różnicy ciśnień panujących w dwóch przekrojach strumienia.

Zawarte w niniejszym rozdziale obliczenia dotyczą ustalonego przepływu cieczy w rurociągach pod ciśnieniem (z pominięciem pomp i turbin), co oznacza, że parametry ruchu (prędkość i ciśnienie w przewodzie) zależą tylko od położenia przekroju, natomiast nie zmieniają swych wartości w czasie.

II.1. RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI PRZEPIYWU

Równanie ciągłości wynika z zasady zachowania masy. W sztywnym przewodzie w ujęciu jednowymiarowym przy ruchu ustalonym cieczy nieściśliwej, równanie to ma postać:

$$Q = \text{const} \quad (\text{II-1})$$



Rys. II-1

Dla przypadku rurociągu o zmiennej średnicy oznacza to, że:

$$Q = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \text{const} \quad (\text{II-2})$$

gdzie: v_1, v_2 – średnie w przekroju prędkości przepływu na odcinkach rurociągów o średnicach d_1 i d_2 ;

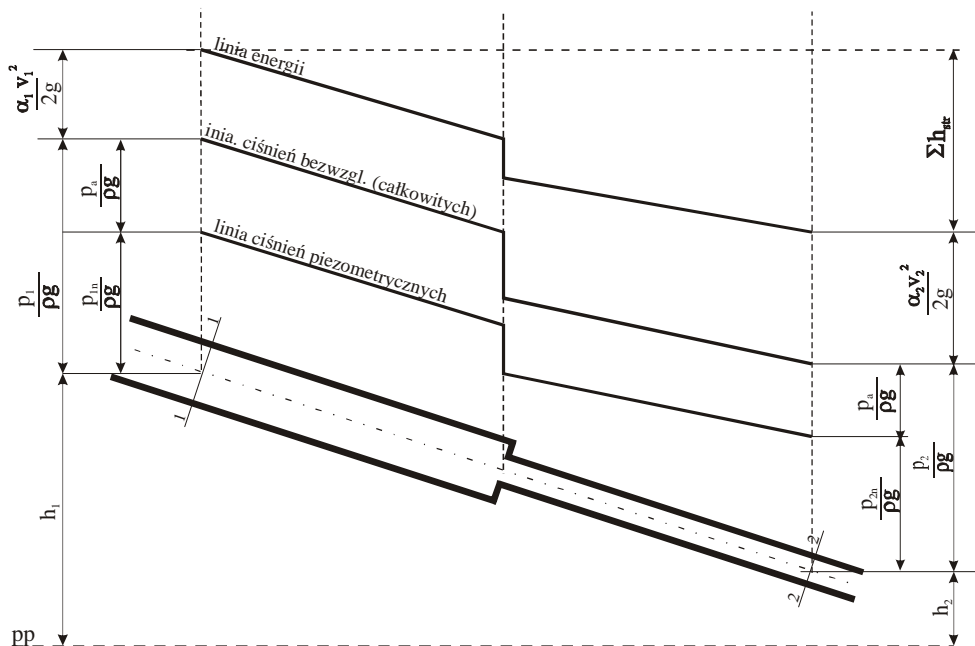
A_1, A_2 – pola powierzchni przekrojów.

II.2. RÓWNANIE BERNOULLIEGO

Równanie Bernoulliego wynika z zasady zachowania energii. Można go sformułować następująco:

W przepływie cieczy rzeczywistej energia mechaniczna strumienia płynącej cieczy maleje w kierunku ruchu o wysokość strat hydraulicznych.

Graficznym obrazem przebiegu zmian energii mechanicznej na rozpatrywanym odcinku strumienia, opisanych równaniem Bernoulliego jest **linia energii**. Przebieg zmian energii potencjalnej strumienia obrazuje **linia ciśnień** obniżona w stosunku do linii energii o wysokość energii kinetycznej $v^2/2g$. **Linia ciśnień piezometrycznych** przebiega poniżej linii ciśnień o wartość p_a/γ . Jest to linia na której układa się zwierciadło cieczy piezometrach podłączonych w przekrojach rurociągu.



Rys. II-2

Przy przyjętym poziom porównawczym i dwóch przekrojach przewodu jak na rys. II-2 równanie Bernoulliego można zapisać następująco:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \sum h_{str} = \text{const} \quad (\text{II-3})$$

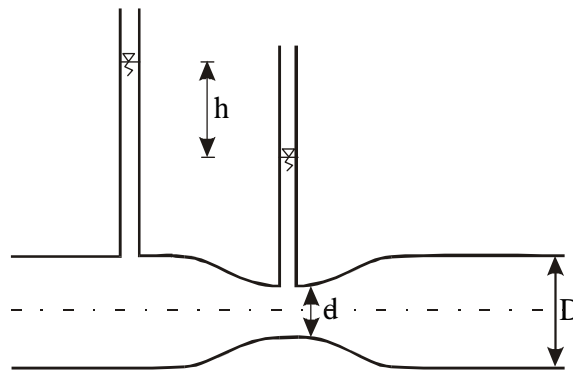
gdzie: z_1, z_2 – wysokość położenia środków ciężkości przekrojów 1-1 i 2-2 przewodu ponad przyjęty poziom porównawczy,
 p_1, p_2 – ciśnienie w środku ciężkości przekrojów 1-1 i 2-2,
 $\frac{p_1}{\gamma}, \frac{p_2}{\gamma}$ – wysokości ciśnienia w przekrojach 1-1 i 2-2 przewodu ,

- $\frac{v_1^2}{2g}, \frac{v_2^2}{2g}$ – wysokości energii kinetycznej (wysokości średnich prędkości przepływu) w przekrojach 1-1 i 2-2,
- $\left. \begin{matrix} z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \\ z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \end{matrix} \right\}$ – wysokości energii potencjalnej cieczy w przekrojach 1-1 i 2-2,
- $\sum h_{\text{str}}$ – suma wysokości strat energii na pokonanie oporów ruchu między przekrojami 1-1 i 2-2,
- α_1, α_2 – współczynniki St. Venanta wynikające ze stosowania wartości prędkości średnich w przekrojach przewodu. W przypadku ruchu burzliwego współczynniki te można pominąć, gdyż ich wartości są bliskie 1.

PRZYKŁAD II-1 Zwężka Ventouriego

Obliczyć przepływ w rurociągu, jeżeli przy zwężeniu różnica wysokości słupa wody w piezometrach wynosi h . Ponieważ przejścia są łagodne, a zwężka krótka, straty energii można pominąć.

Dane: $d = 0,15 \text{ m}, D = 0,30 \text{ m}, h = 0,5 \text{ m}$
 Szukane: Q



Rys. II-3

Rozw.:

Warunek ciągłości (II-2) przyjmuje postać:

$$Q = \text{const} = v_1 \frac{\pi D^2}{4} = v_2 \frac{\pi d^2}{4} \quad (\text{II-4})$$

gdzie v_1, v_2 są średnimi prędkościami w przekrojach w których podłączone są piezometry.

Po przekształceniu powyższego równania zapisać można związek między prędkościami:

$$v_1 = v_2 \left(\frac{d}{D} \right)^2 \quad (\text{II-5})$$

Przyjmując poziom porównawczy w osi rurociągu, równanie Bernoulliego zapisane we wspomnianych przekrojach (przy założeniu braku strat energii) ma postać:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{II-6})$$

Podstawiając (II-5) do (II-6) uzyskujemy formułę:

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{II-7})$$

Różnica ciśnień (czyli lewa strona równania) odczytana z piezometrów wynosi h . Z ostatniego wzoru wyliczyć można zatem prędkość v_2 :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{1 - \left(\frac{0,15}{0,3} \right)^4}} = 3,23 \text{ m/s} \quad (\text{II-8})$$

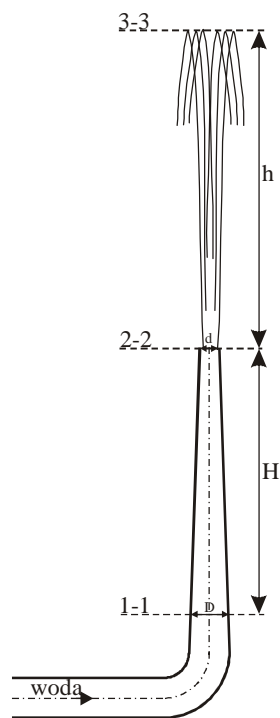
Z równania ciągłości wyliczyć zatem można szukaną wartość przepływu:

$$Q = v_2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 3,23 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,15^2}{4} = 0,057 \text{ m}^3/\text{s} = 57 \text{ l/s} \quad (\text{II-9})$$

PRZYKŁAD II-2

Woda wypływa z rurociągu w sposób pokazany na rysunku II-4. Obliczyć na jaką wysokość h wzniesie się woda, wiedząc, że w przekroju 1-1 położonym o wysokość H poniżej wylotu przewodu występuje nadciśnienie p_1 . Straty energii pominać.

Dane: $D = 0,30 \text{ m}$, $d = 0,15 \text{ m}$, $H = 1 \text{ m}$, $p_1 = 155 \text{ kPa}$
Szukane: h



Rys. II-4

Rozw.:

Z równanie ciągłości zapisanego dla przekrojów 1-1 i 2-2 można zapisać związek między prędkościami w tych przekrojach:

$$Q = \text{const} = v_1 \frac{\pi D^2}{4} = v_2 \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow v_2 = v_1 \left(\frac{D}{d} \right)^2 \quad (\text{II-10})$$

Równanie Bernoulliego zapisane w przekrojach 1-1 i 2-2 (przy przyjęciu poziomu porównawczego w przekroju 1-1) ma postać:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{II-11})$$

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_a}{\gamma} - H \quad (\text{II-12})$$

Podstawiając zależność (II-10) do (II-12) obliczyć można wartość prędkości v_2 :

$$\frac{v_1^2 \left(\frac{D}{d}\right)^4 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_a}{\gamma} - H \Leftrightarrow v_1 = \sqrt{2g \frac{p_1 - p_a - H\gamma}{\gamma \left(\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right)}} \quad (\text{II-13})$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot \frac{150000 - 101325 - 1 \cdot 9810}{9810 \cdot \left(\left(\frac{0,30}{0,15}\right)^4 - 1\right)}} = 2,27 \text{ m/s} \quad (\text{II-14})$$

Równanie Bernoulliego zapisane w przekrojach 1-1 i 3-3 (przy przyjęciu poziomu porównawczego w przekroju 1-1):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H + h + \frac{p_a}{\gamma} + 0 \quad (\text{II-15})$$

Z powyższego równania, po podstawieniu danych i obliczonej prędkości v_1 obliczyć można szukaną wartość wysokości h na jaką wzniesie się woda wylatując z rurociągu:

$$h = \frac{v_1^2}{2g} - h + \frac{p_1 - p_a}{\gamma} = \frac{2,27^2}{2 \cdot 9,81} - 1 + \frac{150000 - 101325}{9810} = 4,23 \text{ m} \quad (\text{II-16})$$

II.3. OBLICZENIE WYSOKOŚCI STRAT ENERGII

Człon $\sum h_{\text{str}}$ w równaniu Bernoulliego (II-3) wyraża sumę wysokości strat energii:

- lokalnych wynikających z pokonywania oporów miejscowych (np. na poszerzeniu rurociągu),
- na długości przewodu związane wywołane tarcie cieczy o ścianki rurociągu.

II.3.1. Straty lokalne

Straty lokalne są związane z przeszkodami występującymi na drodze płynącego strumienia, np.: nagłe poszerzenie lub zwężenie rurociągu, zawory, kryzy, wodomierze, kolanka itp.

Wielkość tych strat oblicza się ze wzoru Weissbacha:

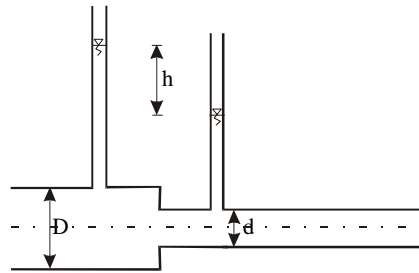
$$h_{\text{lok}} = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-17})$$

- gdzie: v – średnia prędkość przepływu za przeszkodą wywołującą lokalną stratę energii (wyjątek stanowi strata na wylocie z rurociągu, gdzie v oznacza prędkość tuż przed przekrojem wylotu),
- ζ – bezwymiarowy współczynnik straty lokalnej zależny od rodzaju przeszkody, geometrii rurociągu itp. Wartości tych współczynników zawiera norma PN-76/M-34034. Można je także znaleźć w tablicach [10].

PRZYKŁAD II-3

Wyznaczyć wartość współczynnika ζ dla nagłego zwężenia przekroju rurociągu przy założeniu, że różnica wskazań piezometrów wynosi h . Odcinek rurociągu potraktować jako krótki.

Dane: $d = 0,15 \text{ m}$, $D = 0,30 \text{ m}$, $h = 0,5 \text{ m}$, $Q = 0,07 \text{ m}^3/\text{s}$
 Szukane: ζ



Rys. II-5

Rozw.:

Warunek ciągłości przyjmuje postać:

$$Q = \text{const} = v_1 \frac{\pi D^2}{4} = v_2 \frac{\pi d^2}{4} \quad (\text{II-18})$$

gdzie v_1 , v_2 są średnimi prędkościami w przekrojach w których podłączone są piezometry. Po podstawieniu wartości liczbowych wartości prędkości wynoszą:

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi D^2} = 1 \text{ m/s}, \quad v_2 = \frac{4Q}{\pi d^2} = 4 \text{ m/s}, \quad (\text{II-19})$$

Równanie Bernoulliego zapisane dla przekroju przed zwężeniem i za zwężeniem, przy założeniu, że strata na tarcie na odcinku pomiędzy tymi przekrojami jest pomijalnie mała, ma postać:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{II-20})$$

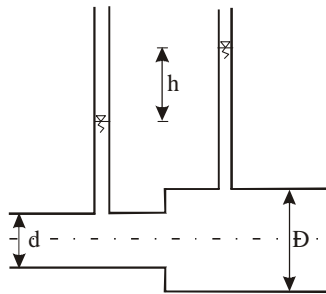
Zatem szukany współczynnik wynosi:

$$\zeta = \left(\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \right) \frac{2g}{v_2^2} = \frac{2gh + v_1^2 - v_2^2}{v_2^2} = 0,938 \quad (\text{II-21})$$

PRZYKŁAD II-4

Obliczyć różnicę wysokości słupów wody w piezometrach h dla nagłego poszerzenia rurociągu którym płynie woda z natężeniem Q . Odcinek rurociągu potraktować jako krótki.

Dane: $d = 0,25 \text{ m}$, $D = 0,50 \text{ m}$, $Q = 0,1 \text{ m}^3/\text{s}$
Szukane: h



Rys. II-6

Rozw.:

Warunek ciągłości przyjmuje postać:

$$Q = \text{const} = v_1 \frac{\pi d^2}{4} = v_2 \frac{\pi D^2}{4} \quad (\text{II-22})$$

v_1, v_2 są średnimi prędkościami w przekrojach w których podłączone są piezometry. Po podstawieniu wartości liczbowych wartości prędkości wynoszą:

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d^2} = 2,04 \text{ m/s}, \quad v_2 = \frac{4Q}{\pi D^2} = 0,51 \text{ m/s}, \quad (\text{II-23})$$

Równanie Bernoulliego zapisane dla przekroju przed poszerzeniem i za poszerzeniem, przy założeniu, że strata na tarcie na odcinku pomiędzy tymi przekrojami jest pomijalnie mała, ma postać:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{II-24})$$

Oznaczając różnicę wysokości ciśnień odczytanych piezometrów jako h otrzymujemy:

$$h = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} - \zeta \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{II-25})$$

Współczynnik ζ odczytany z tablic [10] jest równy:

$$\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \left(\frac{0,5}{0,25}\right)^2 = 4 \Rightarrow \zeta = 9 \quad (\text{II-26})$$

Różnica wysokości h słupów wody w piezometrach wynosi zatem:

$$h = \frac{2,04^2 - 0,51^2}{2 \cdot 9,81} - 9 \frac{0,51^2}{2g} = 1,56 \text{ m} \quad (\text{II-27})$$

II.3.2. Straty na długości

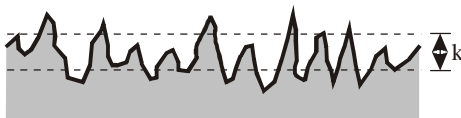
Straty na długości (liniowe) wywołane są tarciem cieczy o ściany przewodu. Wysokość tych strat można ją obliczyć korzystając z formuły Darcy'ego-Weissbacha:

$$h_{dl} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-28})$$

gdzie: l – długość rozpatrywanego odcinka rurociągu,
 d – średnica rurociągu,
 v – średnia prędkość przepływu w rurociągu,
 λ – bezwymiarowy współczynnik tarcia będący funkcją:

Dla przewodów o przekroju kołowym współczynnik λ w ruchu laminarnym jest odwrotnie proporcjonalny do liczny Reynoldsa i oblicza się wg wzoru Hagen – Poiseuille'a:

$$\lambda = 64/Re \quad (\text{II-29})$$



Rys. II-7 Bezwzględna chropowatość powierzchni

Na wartość oporów przepływu w ruchu turbulentnym wpływa także chropowatość powierzchni przewodu. Wartość współczynnika oporów liniowych jest funkcją:

$$\lambda = f\left(\frac{k}{d}, Re\right) \quad (\text{II-30})$$

gdzie: k – chropowatość bezwzględna przewodu (średnia wysokość nierówności ścian przewodu – rys. II-5),
 $Re = v \cdot d / \nu$ – liczba Reynoldsa,
 ν – kinematyczny współczynnik lepkości cieczy,

Wartość współczynnika λ dla przewodów o przekroju kołowym odczytać można z nomogramu Moody'ego (PN-76/M-34034 – rys. II-6).

PRZYKŁAD II-5 Straty liniowe w ruchu laminarnym

Obliczyć wysokość strat liniowych w rurociągu o długości L i średnicy d .

Dane: $L = 1000 \text{ m}$, $d = 0,1 \text{ m}$, $v = 0,02 \text{ m/s}$, $t = 20^\circ\text{C}$
Szukane: h_{dl}

Rozw.:

Wysokość strat energii na długości oblicza się ze wzoru:

$$h_{dl} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-31})$$

Aby wyliczyć wartość współczynnika λ , należy ustalić reżim ruchu, czyli obliczyć liczbę Reynoldsa:

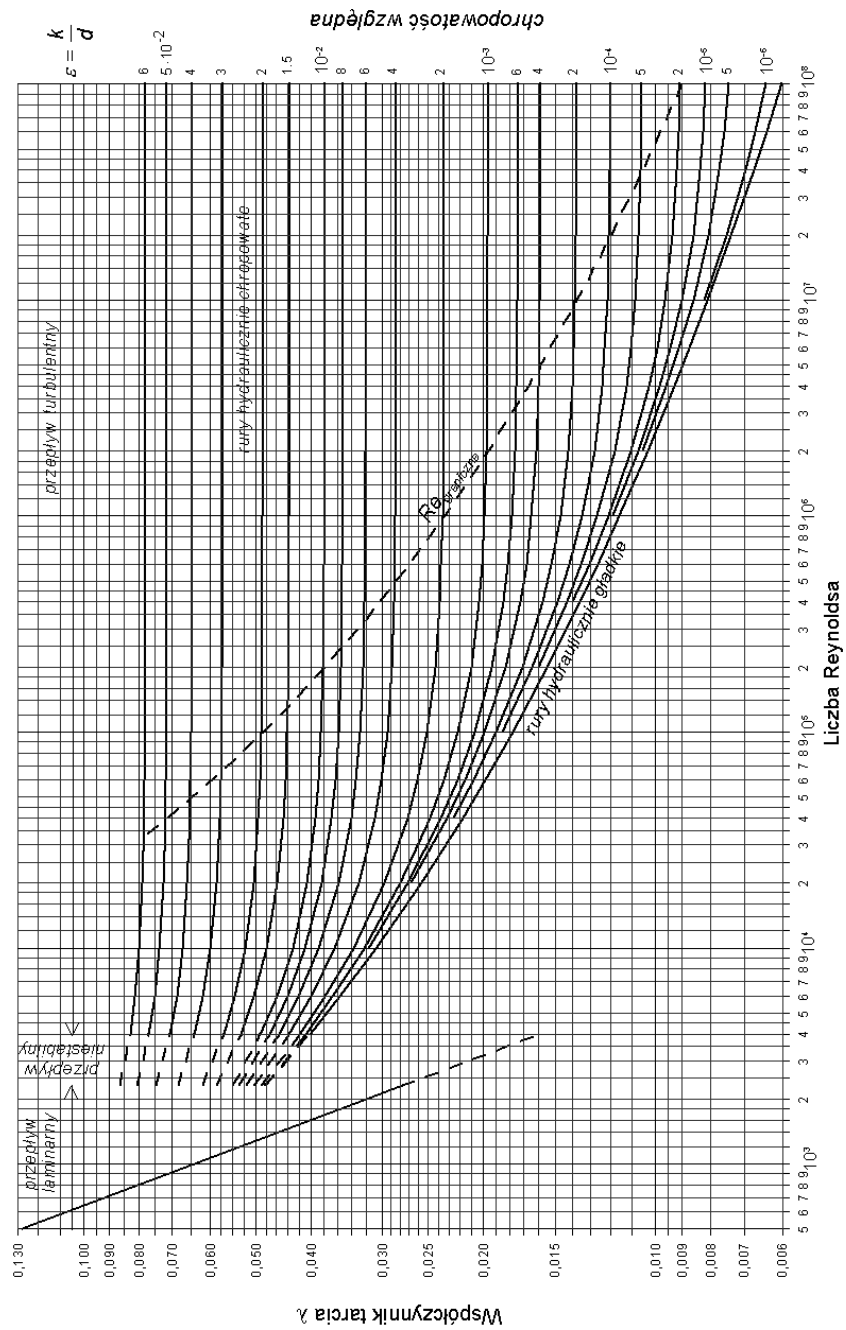
$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{0,02 \cdot 0,1}{10^{-6}} = 2000 < 2320 \quad (\text{II-32})$$

Ruch jest laminarny, czyli:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{2000} = 0,032 \quad (\text{II-33})$$

Straty liniowe wynoszą zatem:

$$h_{dl} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,032 \cdot \frac{1000}{0,1} \cdot \frac{0,02^2}{2 \cdot 9,81} \cong 0,01 \text{ m} \quad (\text{II-34})$$

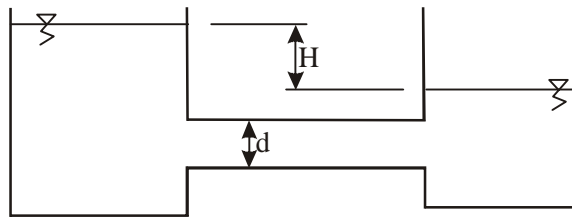


Rys. II-8 Nomogram Moody'ego (tablice [10])

PRZYKŁAD II-6 Straty liniowe w ruchu laminarnym

Rurociągiem o długości L pomiędzy dwoma zbiornikami płynie olej o temperaturze t z natężeniem przepływu Q . Obliczyć maksymalną różnicę H poziomów zwierciadeł oleju w zbiornikach przy której przepływ będzie laminarny ($Re < 2400$). W obliczeniach pominąć stratę energii na wlocie do rurociągu.

Dane: $L = 1000$ m, $Q = 1,8$ m³/s, $t = 20^\circ\text{C}$ ($\nu = 10^{-3}$ m²/s)
Szukane: H



Rys. II-9

Rozw.:

Uzależniając prędkość we wzorze na liczbę Reynoldsa od natężenia przepływu otrzymuje się:

$$Re = v \frac{d}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d^2} \frac{d}{\nu} = \frac{4Q}{\pi d \nu} \quad (\text{II-35})$$

Stąd po podstawieniu danych obliczyć można nieznaną wartość średnicy:

$$d = \frac{4Q}{\pi \nu Re} = \frac{4 \cdot 1,8}{3,14 \cdot 10^{-3} \cdot 2300} = 1,0 \text{ m} \quad (\text{II-36})$$

a prędkości:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 1,8}{3,14 \cdot 1^2} = 2,3 \text{ m/s} \quad (\text{II-37})$$

Wysokość strat energii na długości w ruchu laminarnym oblicza się ze wzoru:

$$h_{dl} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-38})$$

Po pominięciu straty na wlocie do rurociągu, wysokość strat liniowych jest równa szukanej różnicy poziomów wody w zbiornikach i wynosi:

$$H = h_{dl} = \frac{64}{2300} \frac{1000}{1} \frac{2,3^2}{2 \cdot 9,81} = 7,6 \text{ m} \quad (\text{II-39})$$

PRZYKŁAD II-7 Straty liniowe w ruchu turbulentnym

Obliczyć wysokość strat liniowych w rurociągu o długości L i średnicy d .

$$\begin{aligned} \text{Dane:} & \quad L = 1000 \text{ m}, d = 0,1 \text{ m}, v = 0,5 \text{ m/s}, t = 20^\circ\text{C}, k = 0,4 \text{ mm} \\ \text{Szukane:} & \quad h_{dl} \end{aligned}$$

Rozw.:

Aby wyznaczyć współczynnik λ konieczny do obliczenia wielkości strat energii, należy określić reżim ruchu, czyli obliczyć wartość liczby Reynoldsa:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{0,5 \cdot 0,1}{10^{-6}} = 50\,000 > 2320 \quad (\text{II-40})$$

Ruch jest turbulentny, czyli wartość współczynnika strat liniowych odczytać należy z nomogramu Moody'ego (rys. II-8).

$$\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{k}{d}\right) = f(50\,000; 0,004) = 0,031 \quad (\text{II-41})$$

Szukane straty liniowe wynoszą zatem:

$$h_{dl} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,031 \cdot \frac{1000}{0,1} \cdot \frac{0,5^2}{2 \cdot 9,81} = 3,95 \text{ m} \quad (\text{II-42})$$

II.4. RODZAJE RUROCIĄGÓW

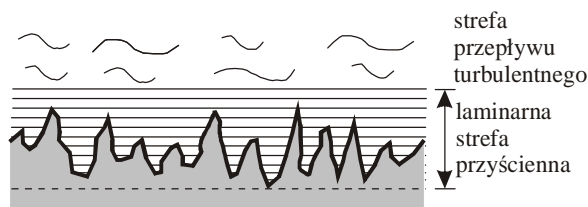
Podczas przepływu cieczy w rurociągu tworzy się cienka warstwa przyścienna w której panuje ruch laminarny. Dopiero poza nią mogą występować poprzeczne pulsacje charakterystyczne dla ruchu turbulentnego.

Wyróżnia się trzy strefy hydraulicznych warunków przepływu (rys. II-7). Jeżeli warstwa przyścienna pokrywa wszystkie nierówności ruchu, czyli szorstkość ścian przewodu nie ma wpływu na ruch cząstek w przewodzie, przewód pracuje jako **gładki**. W przeciwnym przypadku mówi się o rurociągu **chropowatym**.

Ze względu na rodzaj strat energii rurociągi dzielą się na:

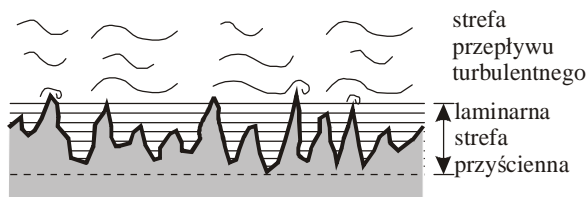
- a) **krótkie**, składające się z krótkich odcinków pojedynczych i dużej ilości armatury. Udział strat energii na długości rurociągu jest zatem pomijalny. Przykładem tego typu rurociągów są np. instalacje wewnętrzne.
- b) **długie** to takie, w których wartość strat liniowych jest pomijalnie mała w stosunku do wartości strat lokalnych. Trzeba jednak przeanalizować straty na zaworach, gdyż często są one tak duże, że nie można ich zaniedbać.

a) strefa przewodów hydraulicznie gładkich



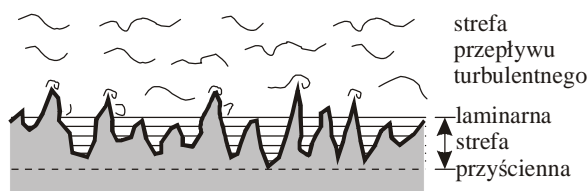
- grubość warstwy laminarnej jest większa od bezwzględnej chropowatości ścian przewodu,
- przykryte warstwą laminarną nierówności ścian przewodu nie mają wpływu na ruch cząstek w turbulentnym obszarze przepływu
- straty energii są proporcjonalne do prędkości

b) przejściowa forma przepływu



- grubość warstwy laminarnej nie pokrywa wszystkich nierówności ścian przewodu,
- niecałkowicie przykryte warstwą laminarną nierówności ścian przewodu wpływają na opory ruchu
- straty energii są proporcjonalne do prędkości w potęgze $1,75 \div 2,0$

c) strefa przewodów hydraulicznie szorstkich

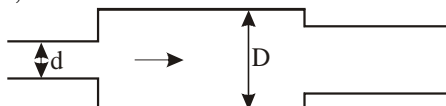


- strefa ruchu turbulentnego obejmuje prawie cały przekrój przewodu, warstwa laminarna jest szczątkowa,
- nierówności ścian przewodu wystające ponad warstwę laminarną powodują powstawanie wirów w turbulentnym obszarze przepływu
- straty energii są proporcjonalne do kwadratu prędkości

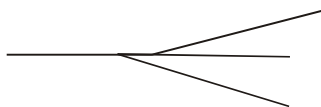
Rys. II-10 Strefy hydraulicznych warunków przepływu

W zależności od połączenia rurociągów rozróżnić można następujące rodzaje rurociągów:

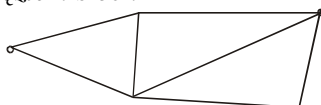
- a) **szeregowe**, czyli składające się z połączonych kolejno przewodów o różnych średnicach,



- b) **promieniste**, składające się z kilku przewodów, w których przepływ pomiędzy dowolnymi dwoma punktami może odbywać się tylko po jednej drodze,



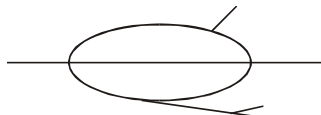
- c) **pierścieniowe**, czyli złożone z kilku gałęzi (przewody o stałej sieci), w których przepływ pomiędzy jego dowolnymi dwoma punktami może odbywać się wieloma drogami. Miejsce w którym schodzą się przynajmniej trzy przewody nazywa się **węzłem** sieci.



Szczególnym przypadkiem rurociągów pierścieniowych są rurociągi **równoległe** w przypadku których poszczególne gałęzie rurociągu rozpoczynają się i kończą się wspólnych węzłach.



Sieć rurociągów składa się z rurociągów pojedynczych oraz rozgałęzionych w sposób opisany powyżej.



Fragmentem sieci rurociągów mogą być **przewody wydatkujące po drodze**. Są to odcinki o stałej średnicy z których płynąca woda jest odprowadzana do odbiorców, Odbiorcy Ci są równomiernie rozmieszczeni wzdłuż odcinka, a ich wydatek zbliżony.



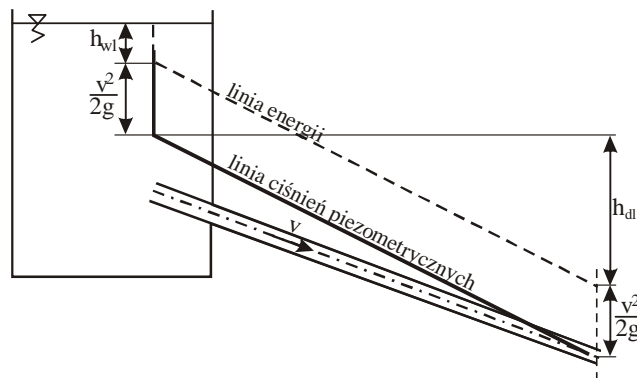
II.5. KONSTRUOWANIE LINII CIŚNIEŃ PIEZIOMETRYCZNYCH

W rozdziale II.2. zdefiniowano linię ciśnień piezometrycznych. Linia ta obrazuje przebieg zmian energii potencjalnej strumienia. Ponieważ wysokość ciśnienia atmosferycznego p_a/γ wynosi 10 m, więc dla wygody w obliczeniach używa się tylko linii ciśnień piezometrycznych i linię energii pomniejszoną o wartość p_a/γ .

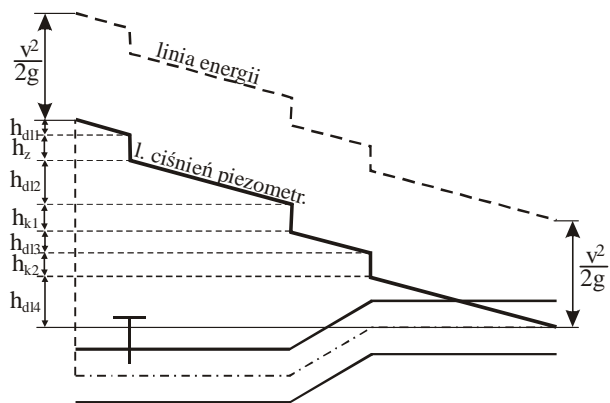
Na rysunkach II-11 do II-17 przedstawiono przykłady konstrukcji linii ciśnień piezometrycznych i linii energii w różnych układach rurociągów.

Przyjęte oznaczenia:

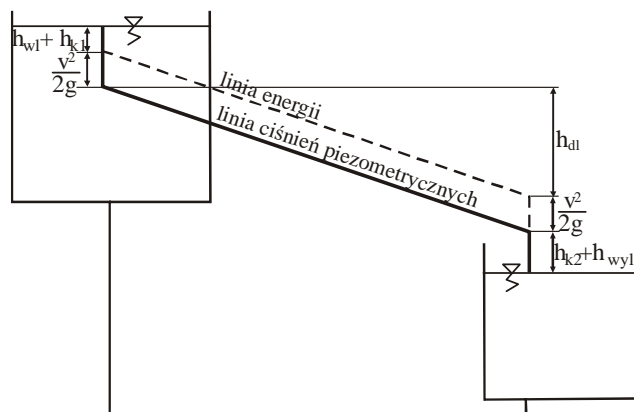
- v – średnia prędkość w rurociągu,
- h_{dl} – wysokość strat liniowych w odcinkach rurociągu,
- $h_{wl}, h_z, h_k, h_{wyl}, h_{zw}$ – wysokości strat lokalnych (na wlocie, zaworze, przy zmianie kierunku, wylocie, zwężeniu),
- H_A, H_B, H_C – wysokości ciśnienia w punktach A, B, C przewodu.



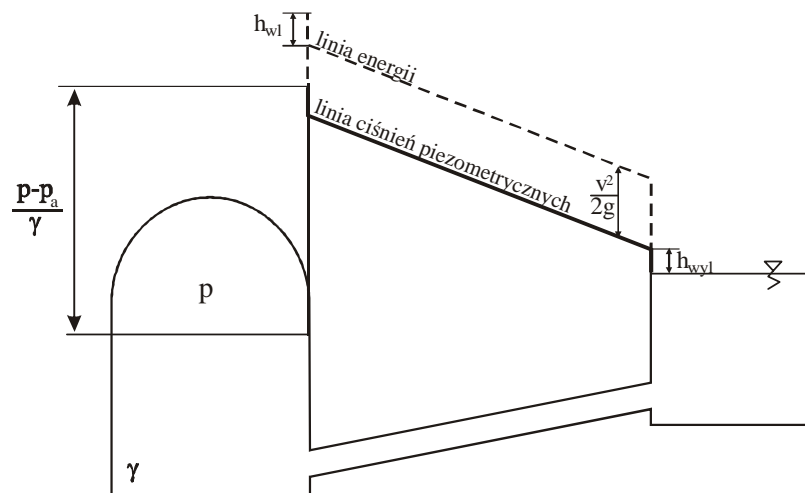
Rys. II-11 Rurociąg pojedynczy z wylotem w atmosferę



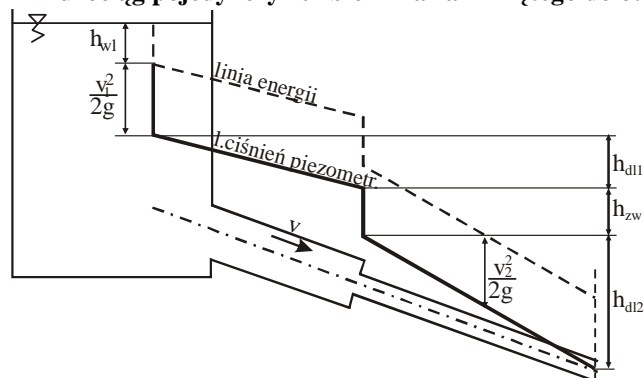
Rys. II-12 Rurociąg pojedynczy z zaworem i dwoma zmianami kierunku



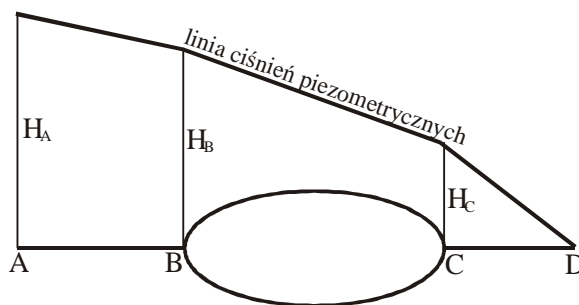
Rys. II-13 Rurociąg pojedynczy łączący dwa zbiorniki otwarte



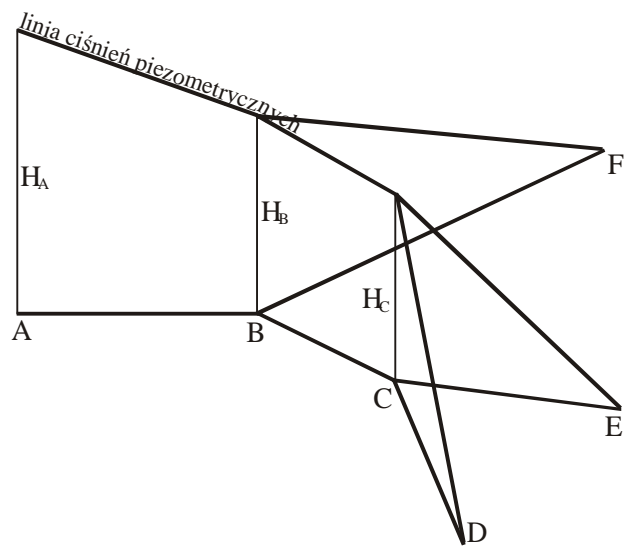
Rys. II-14 Rurociąg pojedynczy ze zbiornika zamkniętego do otwartego



Rys. II-15 Rurociągi długie w układzie szeregowym



Rys. II-16 Rurociągi długie w układzie równoległym



Rys. II-17 Rurociągi długie w układzie rozgałęzionym

II.6. RUROCIĄG POJEDYNCZY

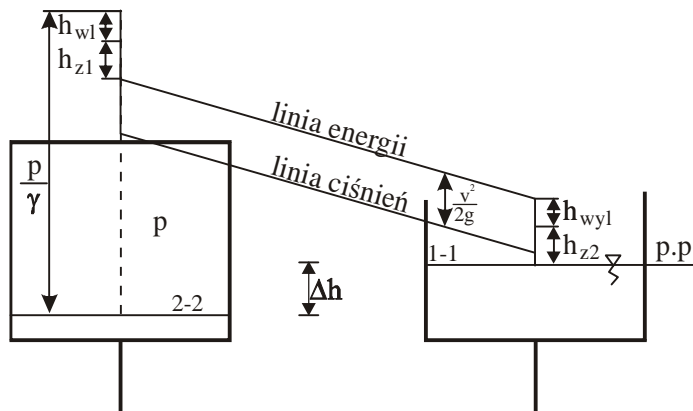
Ze względu na wielkości występujące w równaniu Bernoulliego, dla obliczania tego typu rurociągów wyróżnia się typy zadań:

- H – obliczanie wysokości ciśnienia na wlocie do rurociągu lub w dowolnym jego punkcie, albo różnicy wysokości na końcach rozpatrywanego odcinka rurociągu,
- Q – wyznaczanie natężenia przepływu cieczy,
- d – projektowanie średnicy rurociągu (na końcu rozdziału podano jako przykład sposób obliczania średnicy w lewarze).

PRZYKŁAD II-8 Obliczenie Δh

Dane: $Q = 10 \text{ l/s}$, $l = 100 \text{ m}$, $d = 100 \text{ mm}$, $p = 2700 \text{ hPa}$,
 $k = 0,15 \text{ mm}$, $t = 20^\circ\text{C}$,

Szukane: Δh



Rys. II-18

Rozw.:

Prędkość wyliczona z równania ciągłości (II-2) wynosi:

$$Q = v \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 70 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,1^2} = 1,27 \text{ m/s} \quad (\text{II-43})$$

Równanie Bernoulliego dla poziomu porównawczego i przekrojów 1-1 i 2-2 przyjętych jak na rys. II-18 ma postać:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \Delta h + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{str} \quad (\text{II-44})$$

Prędkości v_1 i v_2 są to prędkości na poziomie zwierciadła w zbiornikach. Ich wartości przyjmuje się równą 0, gdyż powierzchnia przekroju poprzecznego zbiornika jest wielokrotnie większa od przekroju rurociągu, zatem z równania ciągłości:

$$F_{rur} \ll F_{zb} \Rightarrow v_{zb} F_{zb} \ll v_{rur} F_{rur} \Rightarrow v_{zb} \ll v_{rur} \Rightarrow v_{zb} \approx 0 \quad (\text{II-45})$$

$$\Delta h = \frac{p_a}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} + \sum h_{str} \quad (\text{II-46})$$

Suma strat jest sumą strat lokalnych i straty na długości rurociągu.

$$\sum h_{str} = \sum h_{lok} + h_{dl} = (\zeta_{wl} + \zeta_{z1} + \zeta_{z2} + \zeta_{wyl}) \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-47})$$

$$\Delta h = \frac{p_a}{\gamma} - \frac{p}{\gamma} + \left(\zeta_{wl} + \zeta_{z1} + \zeta_{z2} + \zeta_{wyl} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-48})$$

$$\lambda = f\left(\frac{k}{d}; Re\right) = f\left(\frac{0,15}{100}; \frac{1,27 \cdot 0,1}{10^{-6}}\right) = f(1,5 \cdot 10^{-3}; 1,27 \cdot 10^5) \quad (\text{II-49})$$

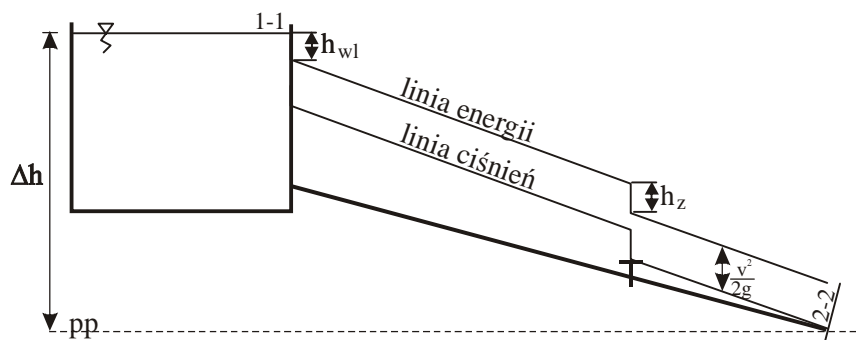
Współczynnik λ odczytany z nomogramu Moody'ego wynosi 0,023.

$$\Delta h = \frac{101,325 - 250}{9,81} + \left(0,5 + 2 \cdot 0,98 + 1 + 0,023 \frac{1000}{0,1} \right) \frac{1,27^2}{2g} \quad (\text{II-50})$$

Szukana różnica położenia Δh zwierciadeł w zbiornikach wynosi 2 m.

PRZYKŁAD II-9 Obliczenie Q

Dane: $l = 100$ m, $d = 100$ mm, $p = 1000$ hPa,
 $k = 0,15$ mm, $t = 20^\circ\text{C}$, $\zeta_{wl} = 0,5$, $\zeta_{zaw} = 0,8$,
Szukane: Δh



Rys. II-19

Rozw.:

Prędkość z równania ciągłości (II-2) wynosi:

$$Q = v \frac{\pi d^2}{4} \quad (\text{II-51})$$

Równanie Bernoulliego zapisane dla przekroju w zwierciadle wody w zbiorniku i przekroju na wylocie z rurociągu (rys. II-19) ma postać:

$$\Delta h + \frac{p_a}{\gamma} + 0 = 0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \sum h_{str} \quad (\text{II-52})$$

Po podstawieniu wartości strat lokalnych i strat liniowych:

$$\Delta h = \left(1 + \zeta_{wl} + \zeta_{zaw} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-53})$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy formułę:

$$v = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{1 + \zeta_{wl} + \zeta_{zaw} + \zeta_{wyl} + \lambda \frac{l}{d}}} \quad (\text{II-54})$$

Po podstawieniu danych liczbowych do powyższego równania:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{2,3 + \lambda \frac{100}{0,1}}} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{9,81}{2,3 + 1000 \cdot \lambda}} \quad (\text{II-55})$$

Aby z równania (II-55) obliczyć prędkość należy znać współczynnik λ . Niestety jego wartość zależy od liczby Re , która jest funkcją szukanej wartości prędkości. Dlatego równanie to należy rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń.

I przybliżenie

Przyjmujemy, współczynnik λ' jest funkcją jedynie chropowatości względnej, czyli $\lambda' = f\left(\frac{k}{d}\right) = f\left(\frac{0,15}{100}\right)$. Z nomogramu Moody'ego odczytać należy przybliżoną wartość tego współczynnika. Znając jego wartość (wynosi ona 0,023) ze wzoru (II-55) obliczyć można przybliżoną wartość prędkości:

$$v' = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 0,5}{2,3 + 1000 \cdot 0,023}} = 0,62 \text{ m/s} \quad (\text{II-56})$$

II przybliżenie

Należy jeszcze sprawdzić czy powyższa wartość prędkości jest prawdziwa. Na podstawie prędkości z pierwszego przybliżenia, obliczyć można wartość liczby Reynoldsa:

$$Re'' = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{0,62 \cdot 0,1}{10^{-6}} = 6,2 \cdot 10^{-4} \quad (\text{II-57})$$

i wartość współczynnika λ'' :

$$\lambda'' = f\left(\frac{k}{d}; Re\right) = f\left(\frac{0,15}{100}; 6,2 \cdot 10^{-4}\right) = 0,024 \quad (\text{II-58})$$

Ze wzoru (II-55) określić można teraz wartość prędkości:

$$v' = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 0,5}{2,3 + 1000 \cdot 0,024}} = 0,61 \text{ m/s} \quad (\text{II-59})$$

Należy sprawdzić, czy różnica prędkości obliczona w pierwszym i drugim przybliżeniu jest mniejsza od 0,5 m/s. Jeżeli tak nie jest, należy jeszcze raz przeprowadzić iterację.

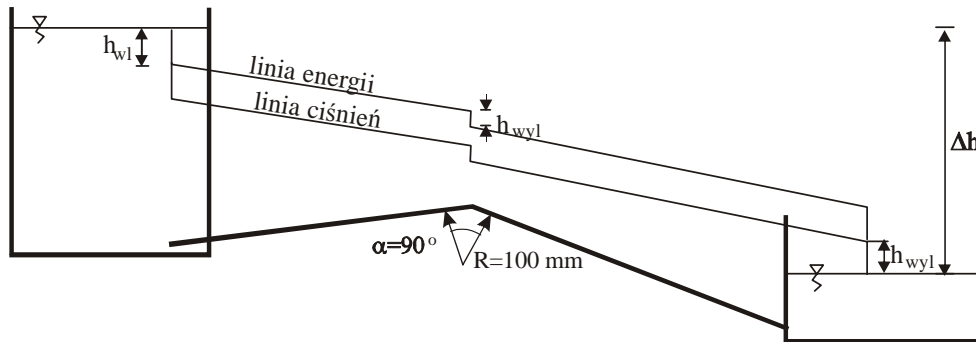
W naszym zadaniu różnica ta nie jest wielka (wynosi 0,01 m/s), czyli możemy zakończyć procedurę iteracyjną i przyjąć wartość prędkości v równą 0,61 m/s.

Na tej podstawie można obliczyć szukaną wartość przepływu:

$$Q = v \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,61 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} = 4,8 \text{ l/s} \quad (\text{II-60})$$

PRZYKŁAD II-10 Obliczenie d

Dane: $Q = 6 \text{ l/s}$, $l = 100 \text{ m}$, $d = 50 \text{ mm}$, $\Delta h = 1 \text{ m}$,
 $R = 100 \text{ mm}$, $\alpha = 90^\circ$, $k = 0,15 \text{ mm}$, $t = 20^\circ\text{C}$,
Szukane: d



Rys. II-20

Rozw.:

Równanie Bernoulliego zapisane w przekrojach pokrywających się ze zwierciadłami wody w zbiornikach ma postać:

$$\Delta h + \frac{p_a}{\gamma} + 0 = 0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \sum h_{str} \quad (\text{II-61})$$

Suma strat:

$$\sum h_{str} = \sum h_{lok} + \sum h_{dl} = \left(\zeta_{wl} + \zeta_{luk} + \zeta_{wyl} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-62})$$

Wstawiając równanie (II-62) do (II-61) otrzymujemy:

$$\Delta h = \left(\zeta_{wl} + f \left(\frac{d}{R} \right) + \zeta_{wyl} + \lambda \frac{l}{d} + 1 \right) \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-63})$$

Po podstawieniu wartości liczbowych uzyskujemy równość:

$$\Delta h = \left(1,30 + f \left(\frac{d}{0,1} \right) + 1 + \lambda \frac{50}{d} + 1 \right) \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-64})$$

Niestety zarówno strata lokalna na łuku, jak i strata na długości, a także prędkość zależą od szukanej wartości średnicy. Dlatego nie da się tak uwikłanej formy równania rozwiązać wprost.

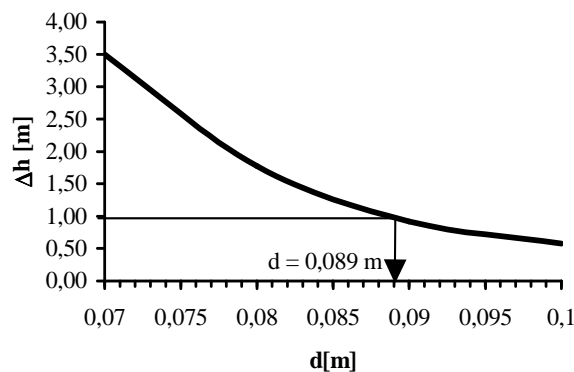
Znalezienia szukanej wartości średnicy należy dokonać metodą „prób i błędów”, czyli należy przyjąć jakąś wartość średnicy, podstawić ją do równania (II-64) i sprawdzić, czy równość jest prawdziwa. Jeżeli nie, należy przyjąć inną wartość średnicy.

Wyniki obliczeń zebrano w poniższej tabeli:

d [m]	v [m/s]	ζ [-]	k/d [-]	Re [-]	λ [-]	Δh [m]
0,1	0,764	2,206	4,00E-03	7,64E+04	0,03	0,58
0,09	0,944	0,25	4,44E-03	8,49E+04	0,032	0,92
0,08	1,194	0,206	5,00E-03	9,55E+04	0,035	1,77

Szukana wartość średnicy to 0,089 m. Należy sprawdzić w tablicach, rury o jakich średnicach są produkowane i przyjąć średnicę najbliższą wyniku obliczeń.

Wartość średnicy odczytać można także z wykresu (dla $\Delta h = 1$ m, $d = 0,089$ m).

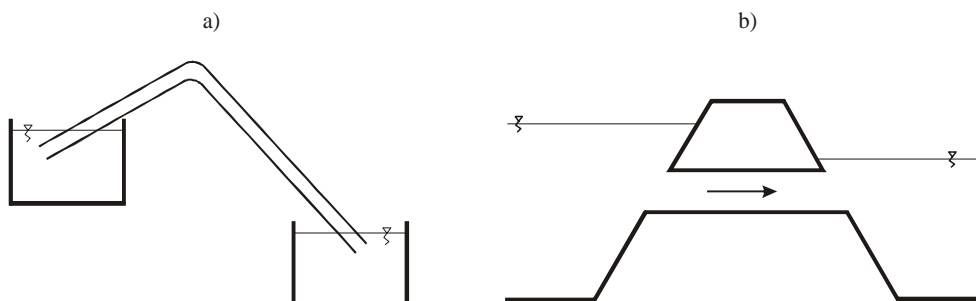


Rys. II-21

II.7. LEWARY, SYFONY

Istnieją dwa szczególne, często spotykane w praktyce inżynierskiej rodzaje rurowciągów pojedynczych: lewary i syfony. Oba rodzaje tych przewodów służą do przeprowadzania wody z poziomu wyższego do niższego z ominięciem przeszkody:

- lewar – ponad przeszkodą, którą może być krawędź naczynia lub wał przeciwpowodziowy,
- syfon – pod przeszkodą taką jak np. droga, rzeka, inny rurowciąg.

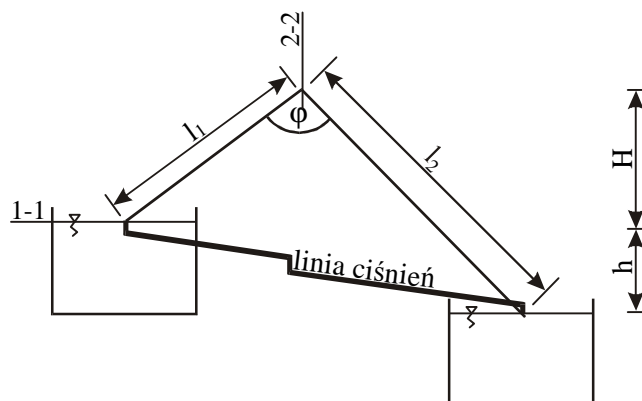


Rys. II-22 a) lewar, b) syfon

PRZYKŁAD II-11 Lewar

Lewar jest rurociągiem, którego oś przebiega na pewnym odcinku ponad zwierciadłem wody w zbiorniku górnym (zasilającym). Dlatego też składa się z dwóch części: wznoszącej oraz opadającej. Warunkiem pracy lewara jest całkowite wypełnienie go wodą. Ruch w tym przewodzie odbywa się dzięki podciśnieniu.

Zaprojektować średnicę lewara tak, by przy danych zestawionych poniżej przeprowadził on przepływ Q . Wlot do lewara o ostrych krawędziach. W rurociągu znajduje się woda o temperaturze 20°C . Sprawdzić warunek lewara w temperaturze $t = 30^\circ\text{C}$.



Rys. II-23

Dane: $Q = 25 \text{ l/s}$, $l_1 = 4 \text{ m}$, $l_2 = 6 \text{ m}$, $h = 1,2 \text{ m}$, $H = 1,0 \text{ m}$
 $\varphi = 40^\circ$, $k = 0,14 \text{ mm}$

Szukane: Q , sprawdzić warunek lewara w 30°C .

Rozw.:

Równanie Bernoulliego zapisane względem przekroju 1-1:

$$h + \frac{p_a}{\gamma} + 0 = 0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \sum h_{STR} \Leftrightarrow h = \frac{v^2}{2g} + \sum h_{STR} \quad (\text{II-65})$$

Suma strat ciśnienia jest sumą: strat lokalnych na wlocie do rurociągu i załamaniu, a także straty liniowej.

$$\sum h_{STR} = \left(\zeta_{wl} + \zeta_{zal} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-66})$$

Po podstawieniu (II-66) do (II-65) otrzymujemy:

$$h = \left(1 + \zeta_{wl} + \zeta_{zal} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-67})$$

Wartość współczynników strat lokalnych wynosi: $\zeta_{wl} = 0,5$ i $\zeta_{zal} = 0,14$.

W powyższym równaniu występują dwie niewiadome (d , v i λ) i dlatego można go rozwiązać metodą prób. Należy przyjąć średnicę i obliczając kolejno wielkości występujące w równaniu (II-67) wyznaczyć wartość h , a następnie sprawdzić, czy jest ona równa założonym 1,2 m. Jeżeli tak nie jest, do obliczeń należy przyjąć inną średnicę. Wyniki zebrano w poniższej tabeli

d [m]	v [m/s]	k/d [-]	Re [-]	λ [-]	h [m]
0,04	19,90	0,0035	796178,3	0,028	174,47
0,1	3,18	0,0014	318471,3	0,022	1,98
0,11	2,63	0,0013	289519,4	0,021	1,25

Przyjęta średnica $d = 0,11$ m.

Sprawdzenie warunku lewara oznacza, że wysokość ciśnienia w najwyższym punkcie lewara musi być większa od wysokości ciśnienia, przy którym w danej temperaturze ciecz zaczyna wrzeć, czyli:

$$\frac{p_B}{\gamma} > \frac{p_0}{\gamma} \quad (\text{II-68})$$

Wysokość p_0/γ dla temperatury 30°C wynosi 0,42 m.

Równanie Bernoulliego zapisane względem przekroju 2-2:

$$0 + \frac{p_a}{\gamma} + 0 = H + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \sum h'_{STR} \quad (\text{II-69})$$

gdzie p_B jest ciśnieniem w najwyższym punkcie lewara.

Suma strat energii jest sumą straty lokalnej na wlocie do rurociągu i straty liniowej.

$$\frac{p_B}{\gamma} = \frac{p_a}{\gamma} - H - \left(1 + \zeta_{wl} + \lambda \frac{l_1}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-70})$$

Po podstawieniu wartości liczbowych:

$$\frac{p_B}{\gamma} = \frac{101325}{9810} - 1 - \left(1 + 0,5 + 0,021 \frac{4}{0,11} \right) \frac{2,63^2}{2 \cdot 9,81} = 8,53 \text{ m} \quad (\text{II-71})$$

Praca lewara nie zostanie zatem przerwana nawet w temperaturze 30°C, bo:

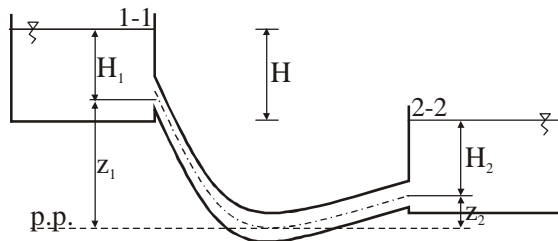
$$\frac{p_B}{\gamma} = 8,53 \text{ m} > \frac{p_0}{\gamma} = 0,42 \text{ m} \quad (\text{II-72})$$

PRZYKŁAD II-12 Syfon

Syfony oblicza się tak samo, jak wszystkie pojedyncze przewody pod ciśnieniem. Syfon będzie pracował tak długo, jak długo utrzymywać się będzie jakakolwiek różnica poziomów między zwierciadłami. W odróżnieniu od lewara rurociągi te nie mają ograniczeń swojej pracy.

Obliczyć natężenie przepływu wody przez syfon o średnicy d , długości l i chropowatości bezwzględnej k . Syfon ten przeprowadza wodę temperaturze 20°C ze zbiornika 1 do zbiornika 2. Różnica poziomów zwierciadeł wody w zbiornikach wynosi H .

Dane: $l = 100 \text{ m}$, $d = 0,5 \text{ m}$, $H = 1,0 \text{ m}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $k = 0,05 \text{ mm}$
Szukane: Q



Rys. II-24

Rozw.:

Równanie Bernoulliego zapisane względem przekroju 1-1:

$$z_1 + H_1 + \frac{p_a}{\gamma} + 0 = z_2 + H_2 + \frac{p_a}{\gamma} + \sum h_{STR} \quad (\text{II-73})$$

Uwzględniając, że:

$$z_1 + H_1 - z_2 - H_2 = H \quad (\text{II-74})$$

równanie (II-73) przybiera postać:

$$H = \sum h_{STR} \quad (\text{II-75})$$

Suma strat energii występujących podczas przepływu wody jest sumą: strat lokalnych na wlocie do rurociągu, zmianie jego kierunku, na wylocie, a także strat liniowej.

$$\sum h_{STR} = \left(\zeta_{wl} + \zeta_{zal} + \zeta_{zyl} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-76})$$

gdzie v jest prędkością wody w syfonie. Przyjęto następujące wielkości poszczególnych współczynników: $\zeta_{wl} = 0,55$, $\zeta_{zal} = 0,30$, $\zeta_{zyl} = 1$, a zatem:

$$H = \sum h_{STR} = \left(0,55 + 0,30 + 1 + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-77})$$

Z powyższego równania można wyliczyć prędkość:

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1,85 + \lambda \frac{l}{d}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 1}{1,85 + \lambda \frac{100}{0,5}}} = \sqrt{\frac{19,62}{1,85 + 200\lambda}} \quad (\text{II-78})$$

Ze względu na nieznaną wartość współczynnik strat na długości λ , zadanie należy rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń.

Założono, że współczynnik λ zależy jedynie od chropowatości względnej, czyli

$$\lambda = f\left(\frac{k}{d}\right) = f\left(\frac{0,05}{500}\right) = f(0,0001) = 0,012$$

Tak odczytaną z nomogramu Moody'ego (rys. II-8) wartość współczynnika λ należy podstawić do równania (II-78) i obliczyć prędkość:

$$v = \sqrt{\frac{19,62}{1,85 + 200 \cdot 0,012}} = 2,15 \text{ m/s} \quad (\text{II-79})$$

Teraz obliczyć można liczbę Reynoldsa:

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{2,15 \cdot 0,5}{10^{-6}} = 1,1 \cdot 10^6 \quad (\text{II-80})$$

A zatem odczytać można z wykresu Moody'ego (II-8) rzeczywistą wartość λ :

$$\lambda = f\left(\frac{k}{d}, Re\right) = f(0,0001; 1,1 \cdot 10^6) = 0,0135 \quad (\text{II-81})$$

Z równania (II-78) wyznaczyć można rzeczywistą wartość prędkości:

$$v = \sqrt{\frac{19,62}{1,85 + 200 \cdot 0,0135}} = 2,08 \text{ m/s} \quad (\text{II-82})$$

a na jej podstawie szukaną wartość natężenia przepływu:

$$Q = v \frac{\pi d^2}{4} = 2,08 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,5^2}{4} = 0,408 \text{ m}^3/\text{s} = 408 \text{ l/s} \quad (\text{II-83})$$

II.8. RUROCIĄGI DŁUGIE

Podstawowe układy rurociągów to:

- układ szeregowy,
- układ rozgałęziony,
- układ równoległy.

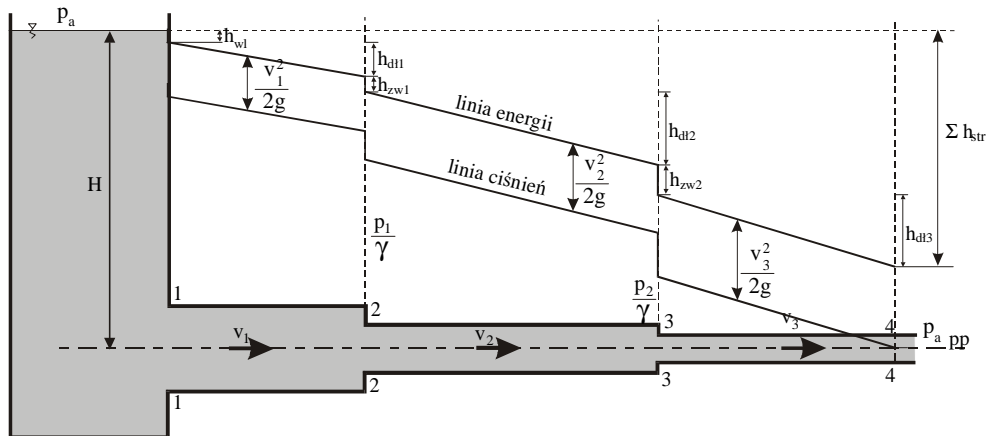
Przy rozwiązywaniu zagadnień związanych z rurociągami długimi, obowiązują tak jak w przypadku rurociągów krótkich: równanie ciągłości i równanie Bernoulliego.

PRZYKŁAD II-13 Rurociągi w układzie szeregowym

Obliczyć wymaganą wysokość ciśnienia konieczną dla uzyskania zadanego przepływu w przewodzie wodociągowym o zmiennej średnicy w rurociągu.

Dane: $Q = 5 \text{ l/s}$, $l_1 = 100 \text{ m}$, $l_2 = 80 \text{ m}$, $l_3 = 40 \text{ m}$,
 $d_1 = 150 \text{ mm}$, $d_2 = 120 \text{ mm}$, $d_3 = 100 \text{ mm}$, $H = 2 \text{ m}$,
 $k = 0,16 \text{ mm}$, $t = 20^\circ\text{C}$,

Szukane: H



Rys. II-25

Rozw.:

Równanie ciągłości dla powyższego układu rurociągów przyjmuje postać:

$$Q = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} = v_3 \frac{\pi d_3^2}{4} \quad (\text{II-84})$$

Z powyższego równania obliczyć można wartości prędkości:

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = 0,28 \text{ m/s}; \quad v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = 0,44 \text{ m/s}; \quad v_3 = \frac{4Q}{\pi d_3^2} = 0,64 \text{ m/s}; \quad (\text{II-85})$$

Równanie Bernoulliego zapisane dla przekroju poprzecznych: na poziomie zwierciadła wody w zbiorniku i przekroju 4-4 i poziomie porównawczym przyjętym w osi rurociągu:

$$H + \frac{p_a}{\gamma} + 0 = 0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} + \sum h_{str} \Leftrightarrow H = \frac{v_3^2}{2g} + \sum h_{lok} + \sum h_{lok} \quad (\text{II-86})$$

$$\sum h_{str} = \sum h_{lok} + \sum h_{dl} \quad (\text{II-87})$$

$$\sum h_{lok} = \zeta_{wl} \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_{zw1} \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_{zw2} \frac{v_3^2}{2g} \quad (\text{II-88})$$

Z tablic odczytać można wartość współczynników strat lokalnych: $\zeta_{wl} = 0,5$, $\zeta_{zw1} = 0,538$, $\zeta_{zw2} = 0,545$.

$$\sum h_{lok} = 0,5 \frac{0,28^2}{2 \cdot 9,81} + 0,538 \frac{0,44^2}{2 \cdot 9,81} + 0,545 \frac{0,64^2}{2 \cdot 9,81} = 0,0187 \quad (\text{II-89})$$

Wartość współczynników strat liniowych przyjęte z nomogramu Moody'ego wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= f\left(\frac{0,16}{150}; \frac{0,28 \cdot 0,15}{10^{-6}}\right) = f(0,0011; 4,2 \cdot 10^4) = 0,0255 \\ \lambda_2 &= f\left(\frac{0,16}{120}; \frac{0,44 \cdot 0,12}{10^{-6}}\right) = f(0,0013; 5,28 \cdot 10^4) = 0,025 \\ \lambda_3 &= f\left(\frac{0,16}{100}; \frac{0,64 \cdot 0,10}{10^{-6}}\right) = f(0,0016; 6,4 \cdot 10^4) = 0,0248 \end{aligned} \quad (\text{II-90})$$

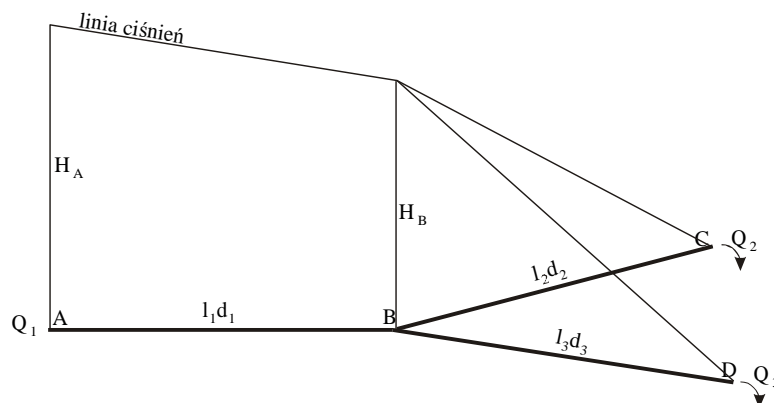
$$\sum h_{dl} = 0,0255 \frac{0,28^2}{2 \cdot 9,81} + 0,025 \frac{0,44^2}{2 \cdot 9,81} + 0,0248 \frac{0,64^2}{2 \cdot 9,81} = 0,00086 \quad (\text{II-91})$$

Po podstawieniu do równania Bernoulliego wartości strat lokalnych i strat na długości otrzymujemy:

$$H = \frac{v_3^2}{2g} + \sum h_{lok} + \sum h_{dl} = \frac{0,64^2}{2 \cdot 9,81} + 0,0187 + 0,00086 = 0,04 \text{ m} \quad (\text{II-92})$$

PRZYKŁAD II-14 Rurociągi w układzie rozgałęzionym

Dane: $l_1, l_2, l_3, d_1, d_2, d_3, H_B, k, t, \nu$
Szukane: Q_1, Q_2, Q_3, H_A



Rys. II-26

Rozw.:

Aby obliczyć szukany wypływ z ostatniego węzła, najpierw należy zapisać równania strat i równania bilansu. Równań strat jest tyle, ile gałęzi rurociągów, (czyli 3), a bilansu – tyle co węzłów – 1.

Równania strat:

$$1) \quad H_A - H_B = \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} \quad (\text{II-93})$$

$$2) \quad H_B - 0 = \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{II-94})$$

$$3) \quad H_B - 0 = \lambda_3 \cdot \frac{l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g} \quad (\text{II-95})$$

Równanie bilansu zapisane w węźle B:

$$a) \quad Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (\text{II-96})$$

I. Obliczenie Q_2 .

Z równania strat 2) obliczamy prędkość v_2 metodą kolejnych przybliżeń (patrz przykład II-9), co oznacza, że:

$$\lambda'_2 = f\left(\frac{k}{d_2}\right) \Rightarrow v'_2 = \sqrt{\frac{2g \cdot d_2 \cdot H_B}{\lambda'_2 \cdot l_2}} \Rightarrow \text{Re}'_2 = \frac{d'_2 \cdot v'_2}{\nu} \quad (\text{II-97})$$

$$\Rightarrow \lambda''_2 = f\left(\frac{k}{d_2}, \text{Re}'_2\right) \Rightarrow v''_2 = \sqrt{\frac{2g \cdot d_2 \cdot H_B}{\lambda''_2 \cdot l_2}}$$

Jeżeli różnica prędkości z pierwszego i drugiego przybliżenia jest mniejsza od 0,5 m/s, to iterację kończy się i przyjmuje, że szukana prędkość $v_2 = v''_2$.

$$Q_2 = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} \quad (\text{II-98})$$

II. Obliczenie Q_3 .

Z równania strat 3) obliczamy prędkość v_3 metodą kolejnych przybliżeń (tak samo jak poprzednio). Wartość przepływu wyliczamy ze wzoru:

$$Q_3 = v_3 \frac{\pi d_3^2}{4} \quad (\text{II-99})$$

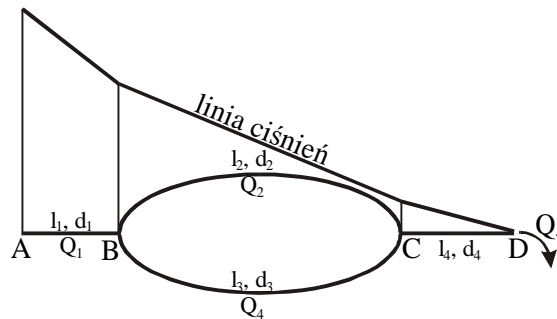
III. Obliczenie Q_1 z równania bilansu a)

VI. Obliczenia H_A z równania 1)

$$H_A = H_B + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g}, \text{ gdzie: } v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2}, \lambda_1 = f\left(\frac{k}{d_1}, \text{Re}_1\right) \quad (\text{II-100})$$

PRZYKŁAD II-15 Rurociągi w układzie równoległym

Dane: $l_1, l_2, l_3, l_4, d_1, d_2, d_3, d_4, H_A, k, \nu$
 Szukane: Q_4



Rys. II-27

Rozw.:

Najpierw należy zapisać 4 równania strat i 2 równania bilansu.

Równania strat:

$$1) \quad H_A - H_B = \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} \quad (\text{II-101})$$

$$2) \quad H_B - H_C = \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{II-102})$$

$$3) \quad H_B - H_C = \lambda_3 \cdot \frac{l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g} \quad (\text{II-103})$$

$$4) \quad H_C - 0 = \lambda_4 \cdot \frac{l_4}{d_4} \frac{v_4^2}{2g} \quad (\text{II-104})$$

Równania bilansu zapisane w węzłach B i C:

$$a) \quad Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (\text{II-105})$$

$$b) \quad Q_4 = Q_2 + Q_3 \quad (\text{II-106})$$

I. Podstawiając równanie (wysokość H_C) 4), a następnie wysokość H_B do 1) zapisać można formułę:

$$H_A = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_3 \frac{l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g} + \lambda_4 \frac{l_4}{d_4} \frac{v_4^2}{2g} \quad (\text{II-107})$$

II. Zapis prędkości v_2 jako funkcji v_3 (z porównania równań 2) i 3)).

$$\lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} = \lambda_3 \cdot \frac{l_3}{d_3} \frac{v_3^2}{2g} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \frac{l_3}{l_2} \frac{l_2}{l_3}} v_3 \quad (\text{II-108})$$

II. Zapis prędkości v_1 jako funkcji v_4 .

$$Q = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_4 \frac{\pi d_4^2}{4} \Rightarrow v_1 = \left(\frac{d_1}{d_4} \right)^2 v_4 \quad (\text{II-109})$$

III. Zapis prędkości v_3 jako funkcji v_4 . Podstawiając (II-108) i (II-109) do równania bilansu a), uwzględniając zależność: $Q = v \cdot \frac{\pi d^2}{4}$ uzyskujemy:

$$v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} + v_3 \frac{\pi d_3^2}{4} \Rightarrow v_1 d_1^2 = d_2^2 \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \frac{l_3}{l_2} \frac{l_2}{l_3}} v_3 + v_3 d_3^2 \quad (\text{II-110})$$

Powyższą zależność podstawiamy do (II-109) i wyliczamy prędkość v_3 :

$$v_3 = \frac{d_1^2 \cdot d_2^2}{\left(d_3^2 + d_2^2 \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \frac{l_3}{l_2} \frac{l_2}{l_3}} \right) d_4^2} v_4 \quad (\text{II-111})$$

VI. Obliczenie prędkości v_4 .

Podstawiając do (II-107) równania (II-109), (II-110) i (II-111) uzyskujemy następującą zależność:

$$H_A = \left(\frac{\lambda_1 l_1}{d_1 2g} \left(\frac{d_1}{d_4} \right)^2 + \frac{\lambda_3 l_3}{d_3 2g} \frac{d_1^4 \cdot d_2^4}{\left(d_3^2 + d_2^2 \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \frac{l_3}{l_2} \frac{l_2}{l_3}} \right)^2 d_4^4} + \frac{\lambda_4 l_4}{d_4 2g} \right) v_4^2 \quad (\text{II-112})$$

Ponieważ w powyższym równaniu występują nieznanne wielkości współczynników λ_i wartość prędkości v_4 należy wyznaczyć przy użyciu metody kolejnych przybliżeń.

VII. Obliczenie szukanej wielkości przepływu:

$$Q_4 = v_4 \frac{\pi d^2}{4} \quad (\text{II-113})$$

II.9. RUROCIĄGI WYDATKUJĄCE PO DRODZE

Rurociąg wydatkujący po drodze jest uproszczonym modelem rzeczywistego przewodu wodociągowego, posiadającego na swej długości odgańczenia zasilające budynki. Jeżeli odgańczenia te są gęsto rozmieszczone, a wydatek ich jest zbliżony, to wynik obliczeń niewiele się różni od wyników uzyskiwanych przy założeniu wydatku równomiernego (gdyby wypływ odbywała się szczeliną przebiegającą na całej długości odcinka rurociągu).

1. Równanie bilansu:

$$Q = Q_K + Q_W = Q_K + q_W \cdot l \quad (\text{II-114})$$

- Q – wydatek na wlocie do rurociągu,
 Q_K – wydatek na wylocie z rurociągu,
 Q_W – objętość wody wydatkowanej na odcinku l w jednostce czasu,
 q_W – objętość wody wydatkowanej w jednostce czasu przez jednostkę rozpatrywanego odcinka rurociągu,
 l – długość rozpatrywanego odcinka rurociągu.

2. Równanie strat na długości

$$\sum h_{STR} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v_Z^2}{2g} \quad (\text{II-115})$$

v_Z jest prędkością zastępczą liczoną na podstawie: $v_Z = \frac{4Q_Z}{\pi d^2}$.

Q_Z jest przepływem zastępczym, czyli przepływem, który przy przepływie jednostkowym na całym odcinku dawałby stratę równą rzeczywistej. Jego wartość można policzyć na podstawie wzoru:

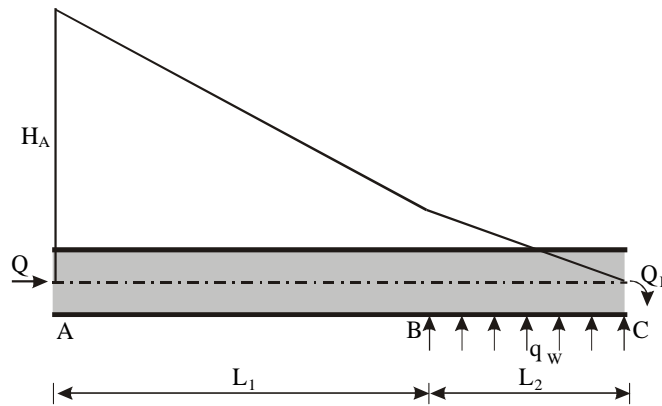
$$Q_Z = Q_K + 0,55 \cdot Q_W \quad (\text{II-116})$$

Uwaga: v_Z i Q_Z są wielkościami fikcyjnymi używanymi wyłącznie do obliczania strat na długości rurociągu wydatkującego.

PRZYKŁAD II-16

Obliczyć nadciśnienie panujące na wlocie do rurociągu, którego część jest przewodem wydatkującym po drodze.

Dane: $L_1 = 150 \text{ m}$, $L_2 = 150 \text{ m}$, $d = 150 \text{ mm}$, $Q = 20 \text{ l/s}$,
 $q_w = 0,25 \text{ l/s}$, $k = 0,3 \text{ mm}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
 Szukane: H_A



Rys. II-28

Rozw.:

Równania strat:

$$1) \quad H_A - H_B = \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d} \frac{v^2}{2g} \quad (\text{II-117})$$

$$2) \quad H_B - 0 = \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d} \frac{v_z^2}{2g} \quad (\text{II-118})$$

Równanie przepływu zastępczego:

$$Q_Z = Q_K + 0,55 \cdot Q_W = Q_K + 0,55 \cdot q_w \cdot L_1 \quad (\text{II-119})$$

I. Z równania przepływu zastępczego obliczyć można jego wartość:

$$Q_Z = 20 \cdot 10^{-3} + 0,55 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 150 = 0,04 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{II-120})$$

II. Obliczenie wartości prędkości w poszczególnych odcinkach rurociągu:

$$v = \frac{4Q}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 0,02}{3,14 \cdot 0,15^2} = 1,13 \text{ m/s} \quad (\text{II-121})$$

$$v_z = \frac{4Q_z}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 0,04}{3,14 \cdot 0,15^2} = 2,3 \text{ m/s} \quad (\text{II-122})$$

III. Odczytanie z wykresu Moody'ego wartości współczynników strat liniowych:

$$\lambda_1 = f\left(\frac{0,3}{150}; \frac{1,13 \cdot 0,15}{10^{-6}}\right) = f(0,002; 1,7 \cdot 10^5) = 0,0245 \quad (\text{II-123})$$

$$\lambda_2 = f\left(\frac{0,3}{150}; \frac{2,3 \cdot 0,15}{10^{-6}}\right) = f(0,002; 3,45 \cdot 10^5) = 0,024$$

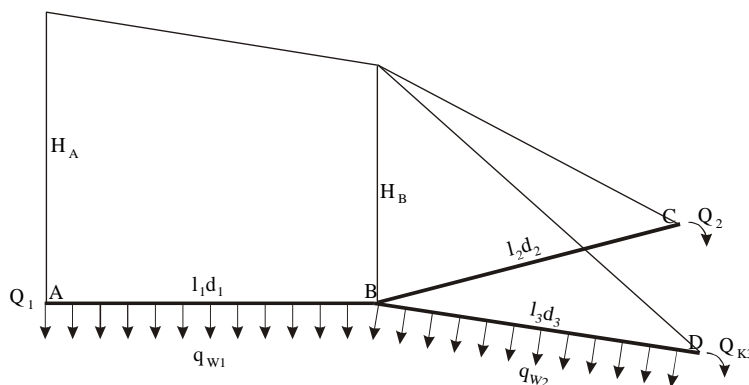
IV. Z równań strat 1) i 2) obliczamy szukaną wysokość ciśnienia w punkcie A:

$$H_A = \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d} \frac{v^2}{2g} + \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d} \frac{v_z^2}{2g} \quad (\text{II-124})$$

$$H_A = 0,0245 \cdot \frac{150}{0,15} \frac{2,3}{2 \cdot 9,81} + 0,024 \cdot \frac{150}{0,15} \frac{1,13}{2 \cdot 9,81} = 4,25 \text{ m} \quad (\text{II-125})$$

PRZYKŁAD II-17

Dane: $l_1, l_2, l_3, d_1, d_2, d_3, Q_2, q_{w1}, q_{w2}, k, \gamma$
Szukane: H_A



Rys. II-29

Rozw.:

Równania strat:

$$1) \quad H_A - H_B = \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \frac{v_{z1}^2}{2g} \quad (\text{II-126})$$

$$2) \quad H_B - 0 = \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{II-127})$$

$$3) \quad H_B - 0 = \lambda_3 \cdot \frac{l_3}{d_3} \frac{v_{z3}^2}{2g} \quad (\text{II-128})$$

Równania bilansu zapisane w węźle B:

$$a) \quad Q_{K1} = Q_2 + Q_{K3} + q_{W3} \cdot l_3 \quad (\text{II-129})$$

Równania przepływów zastępczych:

$$A) \text{ gałąź AB } Q_{Z1} = Q_{K1} + 0,55 \cdot q_{W1} \cdot l_1$$

$$B) \text{ gałąź BC } Q_{Z3} = Q_{K3} + 0,55 \cdot q_{W3} \cdot l_3$$

I. Obliczenie wartości H_B z równania strat 2):

$$H_B - 0 = \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} \quad (\text{II-130})$$

gdzie:

$$v_2 = \frac{4Q_2}{\pi \cdot d_2^2}; \quad \lambda_2 = f\left(\frac{k}{d_2}; \frac{v_2 \cdot d_2}{\nu}\right) \quad (\text{II-131})$$

II. Obliczenie prędkości v_{z3} z równania strat 3) metodą kolejnych przybliżeń:

$$v_{z3} = \sqrt{\frac{2g \cdot d_3 \cdot H_B}{\lambda_3 \cdot l_3}} \quad (\text{II-132})$$

III. Na podstawie prędkości v_{z3} , wyliczenie przepływu Q_{z3} :

$$Q_{z3} = v_{z3} \frac{\pi d_3^2}{4} \quad (\text{II-133})$$

IV. Obliczenie z równania przepływu zastępczego B) Q_{K3} :

$$Q_{K3} = Q_{Z3} - 0,55 \cdot q_{W3} \cdot l_3 \quad (\text{II-134})$$

V. Z równania przepływu bilansu a) wyznaczyć można wartość Q_{K1} .

VI. Obliczenie Q_{z1} z równania przepływu zastępczego A).

VII. Obliczenie H_A z równania strat 1):

$$H_A = H_B + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{v_{z1}^2}{2g} \quad (\text{II-135})$$

gdzie:

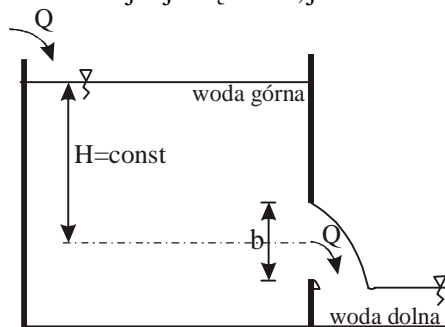
$$v_{z1} = \frac{4Q_{z1}}{\pi \cdot d_1^2}; \quad \lambda_1 = f\left(\frac{k}{d_1}; \frac{v_1 \cdot d_1}{\nu}\right) \quad (\text{II-136})$$

III. WYPŁYW PRZEZ OTWORY I PRZELEWY

III.1. WYPŁYW PRZEZ OTWORY

III.1.1. Ustalony wypływ przez otwory

Wypływ przez otwór ma charakter ustalony, gdy położenie zwierciadła wody górnej (nad otworem) nie zmienia się, czyli gdy ilość wody jaka dopływa do zbiornika, w którego ścianie znajduje się otwór, jest równa wypływowi z tego otworu.

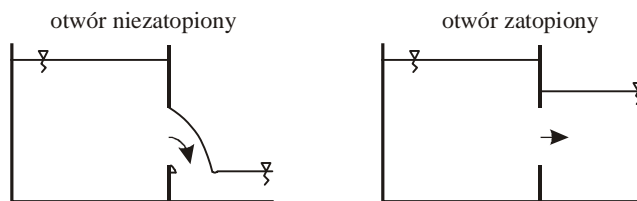


Rys. III-1

H – wysokość położenia zwierciadła wody górnej ponad środkiem ciężkości otworu,
 b – wymiar pionowy otworu

Otwory można podzielić na (patrz rys. III-2):

- **zatopione**, czyli takie, że woda dolna wpływa na ich wydatek, co zachodzi wówczas, gdy poziom zwierciadła wody dolnej jest wyższy od górnej krawędzi otworu;
- **niezatopione** – jeżeli woda dolna nie ma wpływu na wydatek otworu, co praktycznie oznacza, że zwierciadło cieczy za otworem znajduje się poniżej jego dolnej krawędzi.

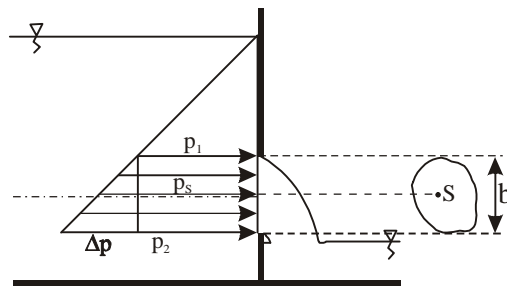


Rys. III-2

Uwaga! W niniejszym skrypcie nie będziemy zajmować się otworami podtopionymi, czyli takimi, że zwierciadło cieczy za otworem znajduje się poniżej jego górnej, a powyżej dolnej krawędzi.

Rozróżnia się dwa rodzaje otworów niezatopionych:

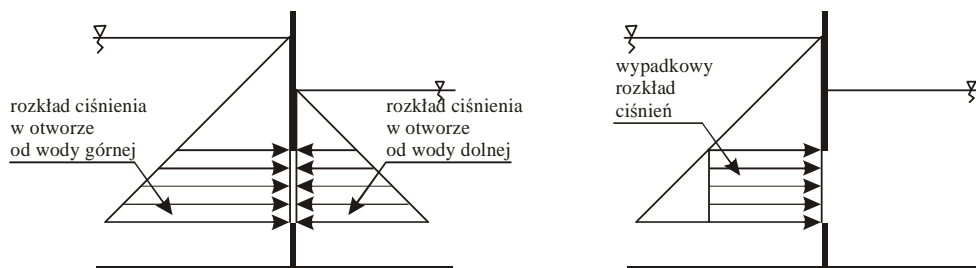
- **otwory małe** w przypadku których warunek: $H \geq 10 b$ jest spełniony. Wówczas uznaje się, że różnica ciśnień Δp w obrębie otworu (rys. III-3) jest niewielka w stosunku do ciśnienia p_s w środku ciężkości otworu. Można wtedy przyjąć, że ciśnienie i prędkość w całym otworze są niezmiennie i równe odpowiadającym ich wartościom w środku ciężkości otworu.
- **otwory duże** dla których warunek $H < 10 d$. Różnica ciśnień Δp jest wtedy porównywalna do wartości ciśnienia p_s w środku ciężkości otworu, a do obliczeń przyjmuje się rzeczywisty rozkład ciśnień.



Rys. III-3

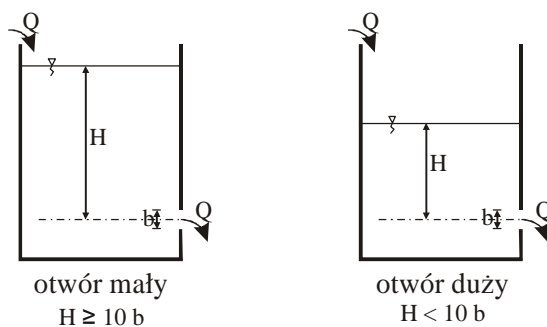
S – środek ciężkości otworu, p_1, p_2, p_s – ciśnienia (w najwyższym i najniższym punkcie otworu i środku ciężkości), Δp – różnica ciśnień p_1 i p_2 , b – wymiar pionowy otworu

Podział na otwory małe i duże traci sens w przypadku otworów zatopionych w których rozkład ciśnienia na całej powierzchni otworu jest jednakowy (rys. III-4)



Rys. III-4

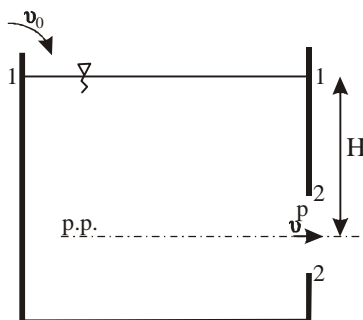
Uwaga! Podział na otwór duży i mały nie jest związany z wielkością otworu. Ten sam otwór może być traktowany w obliczeniach jako mały lub duży w zależności od jego położenia pod powierzchnią zwierciadła wody górnej (rys. III-5).



Rys. III-5

a) Wydatek otworu małego niezatopionego

Zgodnie z definicją małego otworu zakłada się, że prędkość v i ciśnienie p na powierzchni całego otworu jest jednakowe.



Rys. III-6

Należy zapisać równanie Bernoulliego dla przyjętych jak na rys. III-6 przekrojów poprzecznych i poziomu porównawczego:

$$H + \frac{p_a}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (\text{III-1})$$

gdzie ζ jest współczynnikiem straty lokalnej (przy wypływie z otworu).

Wprowadzając pojęcie współczynnika prędkości φ :

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} \quad (\text{III-2})$$

i oznaczając jako H_0 wzniesienie linii energii ponad środkiem ciężkości otworu:

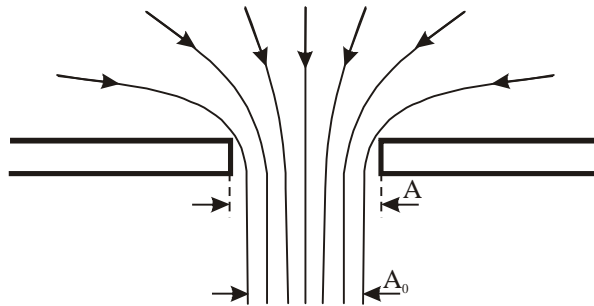
$$H_0 = H + \frac{p_a - p}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} \quad (\text{III-3})$$

równanie (III-1) przyjmie postać:

$$v = \varphi \sqrt{2gH_0} \quad (\text{III-4})$$

W celu obliczenia natężenia wypływu cieczy przez otwór należy prędkość wymnożyć przez pole powierzchni przekroju poprzecznego strumienia A_0 . Pole to jest mniejsze niż pole otworu A . Zjawisko przewężenia strumienia (rys. III-7) za otworem nazywa się kontrakcją, dlatego wprowadza się dodatkowy współczynnik ε nazywany współczynnikiem kontrakcji lub dławieniem wyrażający stosunek:

$$\varepsilon = \frac{A}{A_0} \quad (\text{III-5})$$



Rys. III-7

Równanie (III-1) przyjmie ostatecznie postać:

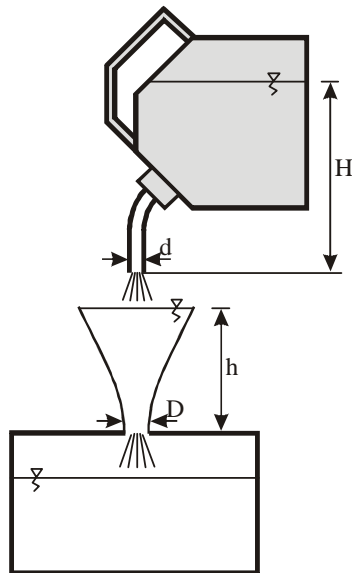
$$Q = \mu A \sqrt{2gH_0} \quad (\text{III-6})$$

gdzie μ jest współczynnikiem wydatku otworu równym: $\mu = \varphi \varepsilon$.

PRZYKŁAD III-1

Z kanistra do zbiornika przelewany jest olej przy pomocy lejka (rys. III-8). Jaką wysokość h powinien mieć ten lejek, by benzyna z niego się nie wylała. Przyjąć współczynniki wydatku otworów (kołowych) μ_d i μ_D .

Dane: $H = 0,75$ m, $d = 3$ cm, $D = 6$ cm, $\mu_d = 0,607$, $\mu_D = 0,59$
 Szukane: h



Rys. III-8

Rozw.:

Oba otwory są otworami małymi, zatem ich wydatek określa się według wzoru (III-6), który zapisany dla kanistra przyjmuje postać:

$$Q_d = \mu_d \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH} \quad (\text{III-7})$$

a dla lejka napełnionego do wysokości h :

$$Q_D = \mu_D \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gh} \quad (\text{III-8})$$

Aby olej nie wylał się z lejka, natężenie przepływu cieczy dopływającej musi być równe natężeniu cieczy z niego wypływającej, czyli:

$$Q_d = Q_D \Leftrightarrow \mu_d \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gH} = \mu_D \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gh} \quad (\text{III-9})$$

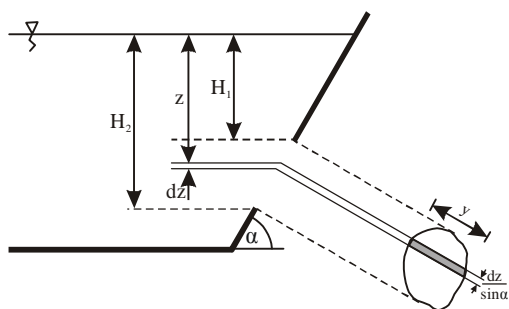
Z powyższego warunku obliczyć można szukaną wysokość lejka:

$$h = H \left(\frac{\mu_d}{\mu_D} \right)^2 \left(\frac{d}{D} \right)^4 = 0,75 \left(\frac{0,604}{0,59} \right)^2 \left(\frac{0,03}{0,06} \right)^4 = 0,05 \text{ m} \quad (\text{III-10})$$

Lejek powinien mieć przynajmniej 5 cm wysokości.

b) Wydatek otworu dużego niezatopionego

W przypadku obliczenia wypływu z otworu dużego należy uwzględnić rzeczywisty rozkład ciśnień i prędkości na powierzchni otworu nachylonego pod kątem α do poziomu (rys. III-9).



Rys. III-9

W tym celu dzieli się otwór na elementarne poziome paski o wysokości $dz/\sin\alpha$ i szerokości y zależnej od położenia pod powierzchnią zwierciadła wody górnej na powierzchni których można przyjąć, że ciśnienie i prędkość są stałe. Całkowity wydatek Q otworu dużego jest sumą wydatków elementarnych (z poszczególnych pasków) i wynosi:

$$Q = \mu \frac{\sqrt{2g}}{\sin \alpha} \int_{H_1}^{H_2} y \sqrt{z} dz \quad (\text{III-11})$$

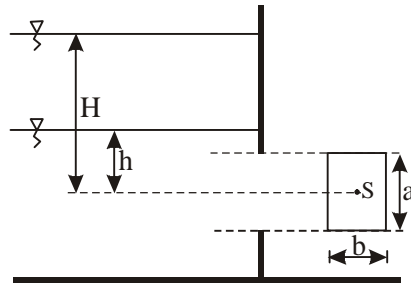
Jeżeli otwór o stałej szerokości b znajduje się w pionowej ścianie zbiornika ($\alpha = 90^\circ$), wówczas powyższa zależność upraszcza się do następującej formuły:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}) \quad (\text{III-12})$$

PRZYKŁAD III-2

O ile zwiększy się wypływ przez prostokątny otwór (rys. III-10) o szerokości b i wysokości a , jeżeli zwierciadło wody podwyższy się z głębokości h do H ? Przyjąć współczynnik wydatku otworu μ .

Dane: $b = 4 \text{ m}, a = 2 \text{ m}, H = 6 \text{ m}, h = 3 \text{ m}, \mu = 0,6$



Rys. III-10

Rozw.:

Otwór jest otworem dużym, dlatego do obliczenia natężenia przepływu należy skorzystać ze wzoru (III-12). Przypadku, gdy zwierciadło cieczy znajduje się na wysokości H ponad środkiem ciężkości otworu, $H_1 = 7$ m, $H_2 = 5$ m wydatek wynosi:

$$Q_H = \frac{2}{3} 0,6 \cdot 4 \sqrt{2 \cdot 9,81} (7^{3/2} - 5^{3/2}) = 52 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{III-13})$$

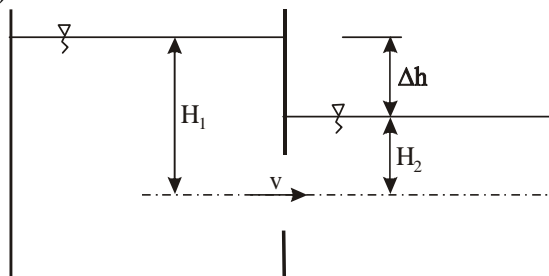
a gdy zwierciadło znajduje się na wysokości h ($H_1 = 4$ m, $H_2 = 2$ m):

$$Q_h = \frac{2}{3} 0,6 \cdot 4 \sqrt{2 \cdot 9,81} (4^{3/2} - 2^{3/2}) = 36,7 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{III-14})$$

Natężenie wzrosło z 36,7 do 52 m³/s, czyli o około 30%.

c) Wydatek otworów zatopionych

Gdy ciecz nie wypływa przez otwór o powierzchni A swobodnie w atmosferę, ale do drugiego zbiornika po pewnym czasie zdarzy się, że ciecz dążąca do wyrównania swych poziomów zwierciadeł w obu zbiornikach, całkowicie zakryje otwór (rys. III-11).



Rys. III-11

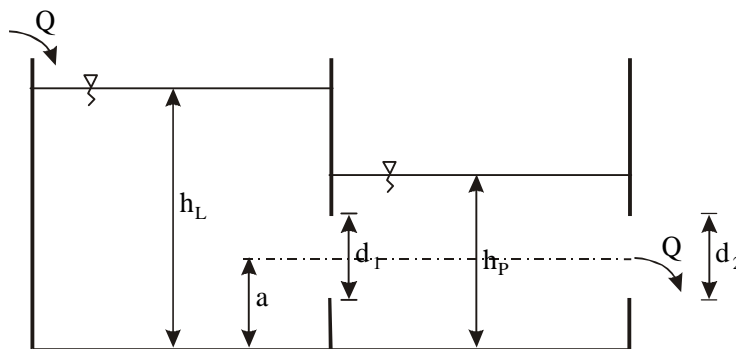
Z równania Bernoulliego zapisanego dla zwierciadeł wody w zbiornikach wynika wzór na wypływ przez otwór zatopiony postaci:

$$Q = \mu_z A \sqrt{2g (H_1 - H_2)} = \mu_z A \sqrt{2g \Delta H} \quad (\text{III-15})$$

gdzie: ΔH – różnica poziomów wody w górnym i dolnym stanowisku,
 μ_z – współczynnik wydatku zatopionego otworu,
 A – pole powierzchni otworu.

PRZYKŁAD III-3

W pionowej ścianie zbiornika dzielącej zbiornik na dwie części znajduje się okrągły otwór o średnicy d_1 . Głębokość wody w lewej części wynosi h_L , a przepływ przez otwór – Q . Określić głębokość wody h_p w prawej części zbiornika. Jaką średnicę d_2 powinien mieć otwór w zewnętrznej ścianie zbiornika, aby zwierciadło wody w lewej części zbiornika utrzymywało się na stałym poziomie. Środki obu otworów znajdują się na wysokości a ponad dnem zbiornika, a współczynnik wypływu μ .



Rys. III-12

Dane: $h_L = 2,5$ m, $d_1 = 50$ mm, $Q = 3,1$ l/s, $a = 1,0$ m, $\mu = 0,62$
Szukane: h_p, d_2

Rozw.:

Otwór w ścianie dzielącej zbiornik jest zatopiony, czyli natężenie wypływu przez ten otwór obliczony według wzoru (III-15) wynosi:

$$Q = \mu F_L \sqrt{2g(h_L - h_p)} = \mu \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{2g(h_L - h_p)} \quad (\text{III-16})$$

Stąd:

$$h_p = h_L - \frac{4Q^2}{2g\mu^2\pi d_1^2} \quad (\text{III-17})$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$h_p = 2,5 - \frac{4 \cdot (3,1 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,62^2 \cdot 3,14 \cdot 0,05^2} = 2,17 \text{ m} \quad (\text{III-18})$$

Otwór w ścianie zewnętrznej zbiornika jest niezatopiony i najprawdopodobniej mały, a więc wypływ przez ten otwór obliczyć można ze wzoru (III-6):

$$Q = \mu F_p \sqrt{2g(h_2 - a)} \quad (\text{III-19})$$

Ponieważ wypływ jest ustalony, więc ilość dopływającej wody jest równa wypływowi. Ze wzoru (III-1) wyliczyć można powierzchnię otworu:

$$F_p = \frac{Q}{\mu \sqrt{2g(h_2 - a)}} = \frac{3,1 \cdot 10^{-3}}{0,62 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot (2,17 - 1)}} = 10,45 \text{ cm}^2 \quad (\text{III-20})$$

Szukana średnica tego otworu wynosi zatem:

$$d_p = \sqrt{\frac{4F_p}{\pi}} = 2 \sqrt{\frac{10,45 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 0,0372 \text{ m} = 37,2 \text{ mm} \quad (\text{III-21})$$

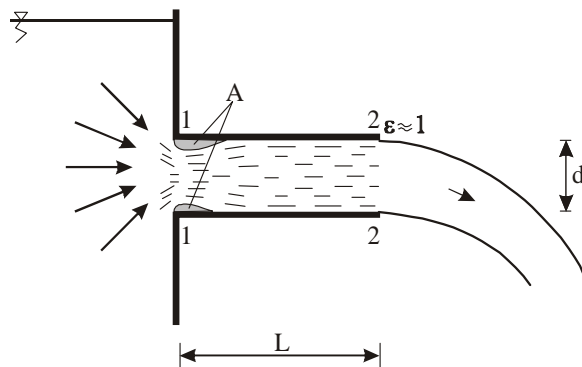
Na koniec należy sprawdzić słuszność przyjętego założenia, że otwór jest otworem małym, czyli czy spełniona jest zależność:

$$(h_p - a) \geq 10 d_p \Leftrightarrow (2,17 - 1) \geq 10 \cdot 0,0372 \Leftrightarrow 1,17 \geq 0,37 \quad (\text{III-22})$$

Powyższa nierówność jest prawdziwa, czyli założenie było słuszne.

d) Ustalony wypływ przez przystawki

Przystawką nazywa się krótką rurkę przymocowaną do otworu.



Rys. III-13

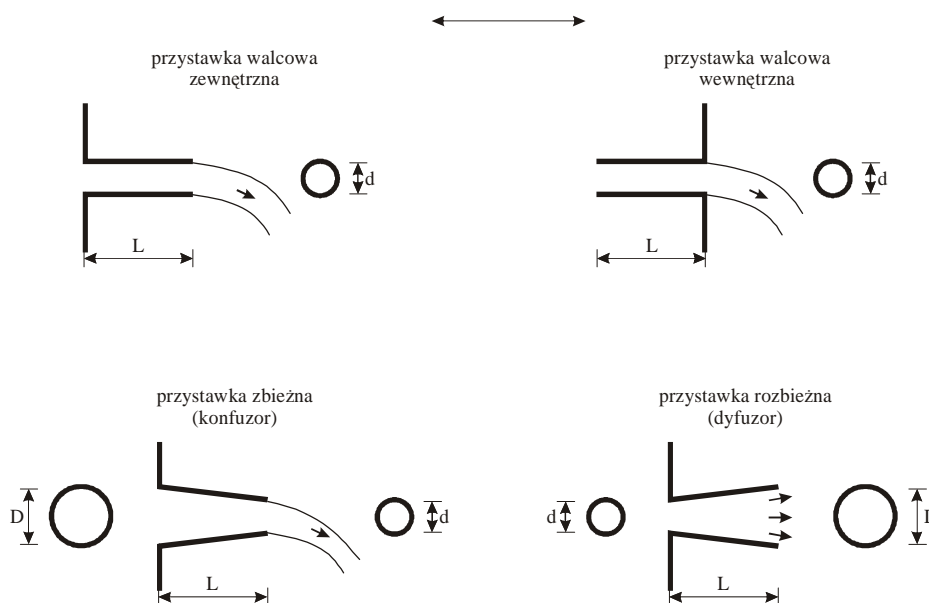
Przystawki (rys. III-13) stosuje się w celu zwiększenia wypływu przez otwór. Tuż przy samym wlocie do przystawki strumień cieczy zwęża się na skutek kontrakcji. W tak wytworzonym obszarze A wytwarza się podciśnienie powodujące zasysanie wody ze zbiornika, a tym samym zwiększenie przepływu. Następnie strumień rozszerza się i wypełnia całkowicie przekrój A_p przystawki (z przystawki ciecz wypływa pełnym przekrojem). W takim przypadku na wylocie nie występuje zjawisko kontrakcji, zatem współczynnik kontrakcji $\epsilon_p = 1$, czyli współczynnik wydatku $\mu_p = \varphi_p \cdot 1$, a wypływ Q wyraża się wzorem:

$$Q = \mu_p A_p \sqrt{2gH} \quad (\text{III-23})$$

Aby przystawka pracowała prawidłowo, czyli, że wypływ z niej następuje pełnym przekrojem, jej długość L powinna być 3 ÷ 6 razy większa od jej wewnętrznej średnicy d . Ograniczenie długości od dołu wynika z konieczności spełnienia warunku, by ciecz zdążyła wypełnić całkowicie przekrój przystawki, a od góry – gwarantuje, że straty na pokonanie oporów ruchu w przystawce nie przekroczą zysku wynikającego ze zwiększenia podciśnienia w strefie A.

Przyjmuje się, że współczynnik wypływu przy zastosowaniu przystawki μ_p wynosi $\mu_p = 0,82$, natomiast współczynnik wydatku cieczy wypływającej przez mały otwór kołowy (bez przystawki) jest równy $\mu = (0,59 \div 0,63)$.

W zależności od kształtu rozróżnić można kilka rodzajów przystawek (rys. III-14).

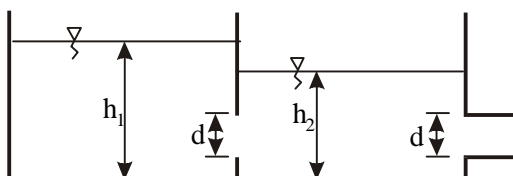


Rys. III-14 Rodzaje przystawek

PRZYKŁAD III-4

Dany jest układ dwóch zbiorników jak na rys. III-15. Ze zbiornika górnego woda wylewa się otworem o średnicy d (o współczynnik wydatku μ_1) zagłębionym pod zwierciadłem wody na głębokość h_1 . Zbiornik dolny ma otwór w ścianie bocznej zaopatrzonej w przystawkę o tej samej średnicy i współczynnika wypływu μ_2 . Obliczyć na jakim poziomie h_2 nad przystawką ustali się zwierciadło wody w zbiorniku dolnym. Prędkości wody w obu zbiornikach pominąć.

Dane: $\mu_1 = 0,62, \mu_2 = 0,82, h_1 = 1,6$ m
Szukane: h_2



Rys. III-15

Rozw.:

Aby w zbiorniku dolnym zwierciadło wody pozostawało na stałym poziomie, ilość Q_1 wypływającej wody z tego zbiornika musi być równa ilości wody Q_2 dopływającej do niego ze zbiornika górnego, czyli:

$$Q_1 = Q_2 \Leftrightarrow \mu_1 A \sqrt{2gh_1} = \mu_2 A \sqrt{2gh_2} \quad (\text{III-24})$$

Stąd:

$$h_2 = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} h_1 = \frac{0,62^2}{0,82^2} 1,6 = 0,9 \text{ m} \quad (\text{III-25})$$

III.1.2. Nieustalony wypływ przez otwory

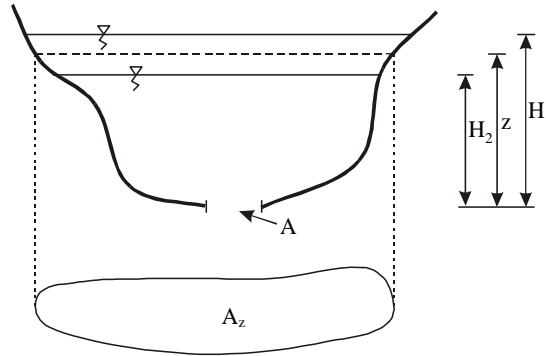
Jeżeli natężenie dopływu do zbiornika różni się od natężenia wypływu z tego zbiornika, położenie zwierciadła cieczy w tym zbiorniku zmienia się w czasie, czyli wypływ jest nieustalony. Zbiornik stopniowo napełnia się lub opróżnia. W dalszych rozważaniach zajmiemy się tylko przypadkiem, gdy dopływ cieczy do zbiornika jest zerowy. Rozróżnić można – tak jak w przypadkach innych otworów dwa rodzaje otworów:

- otwór niezatopiony – zagadnienie opróżnianie zbiornika,
- otwór zatopiony, znajdujący się w pionowej ścianie dzielącej zbiorniki (zagadnienie wyrównania poziomów cieczy w zbiornikach).

a) otwór niezatopiony

W przypadku nieustalonego wypływu wody ze zbiornika, czyli jego opróżniania oznaczmy jako:

- czas T_1 – czas obniżenia się zwierciadła wody z początkowego poziomu H_1 do danego H_2 ,
- czas T_2 – czas całkowitego opróżnienia zbiornika ($H_1 = H$, $H_2 = 0$).



Rys. III-16

$$T_1 = \frac{1}{\mu A \sqrt{2g}} \int_{H_2}^{H_1} A_z \cdot z^{-1/2} dz \quad (\text{III-26})$$

gdzie: A – powierzchnia otworu,
 A_z – powierzchnia przekroju poprzecznego zbiornika na wysokości z ponad otworem,
 μ – współczynnik wypływu z otworu.

$$T_2 = \frac{1}{\mu A \sqrt{2g}} \int_0^H A_z \cdot z^{-1/2} dz \quad (\text{III-27})$$

W przypadku gdy pole powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika ma stały kształt na całej jego wysokości naczynia (np. walec, prostopadłościan), czasy te przyjmują postać:

$$T_1 = \frac{2A_z}{\mu A \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) \quad (\text{III-28})$$

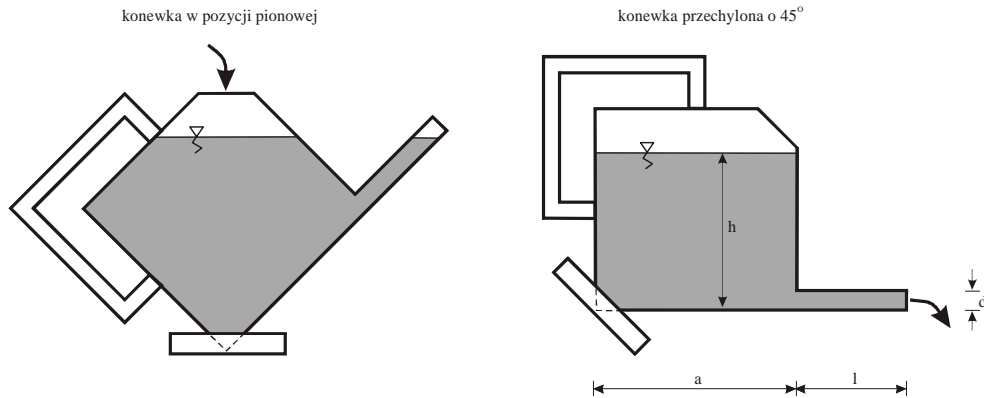
$$T_2 = \frac{2A_z}{\mu A \sqrt{2g}} \sqrt{H} \quad (\text{III-29})$$

PRZYKŁAD III-5

Sześcienną konewkę o boku a wypełniono wodą (rys. III-16). Po przechyleniu jej o 45° , konewka była wypełniona do wysokości h , a woda wypływa przez krótką rurkę (spełniającą warunek przystawki) o średnicy d i współczynniku wydanku otworu μ . W jakim czasie konewka opróżni się całkowicie?

Dane: $a = 0,4 \text{ m}$, $h = 0,3 \text{ m}$, $d = 0,04 \text{ m}$, $\mu = 0,82$

Szukane: T



Rys. III-17

Rozw.:

Zbiornik opróżnia się całkowicie w czasie wyliczonym według wzoru (III-29):

$$T_2 = \frac{2A_z}{\mu A\sqrt{2g}}\sqrt{h} \quad (\text{III-30})$$

gdzie: A jest polem powierzchni przystawki wynoszącym:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,04^2}{4} = 0,00126 \text{ m}^2 \quad (\text{III-31})$$

a A_z jest polem powierzchni konewki na wysokości h :

$$A_z = a^2 = 0,5^2 = 0,16 \text{ m}^2 \quad (\text{III-32})$$

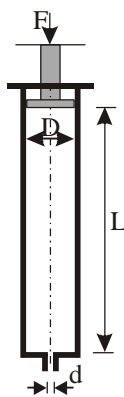
Podstawiając wartości liczbowych do równania (III-30):

$$T_2 = \frac{2 \cdot 0,16}{0,82 \cdot 0,00126 \sqrt{2 \cdot 9,81}} \sqrt{0,3} = 38 \text{ s} \quad (\text{III-33})$$

PRZYKŁAD III-6

Strzykawkę o długości L i średnicy D (rys. III-18) wypełniono wodą. W jakim czasie można wypompować z niej tę wodę przez otwór o średnicy d , jeżeli naciska się na tłok z siłą F ? Współczynnik wydatku otworu wylotowego wynosi μ .

Dane: $F = 25 \text{ N}$, $L = 8 \text{ cm}$, $D = 2 \text{ cm}$, $d = 0,1 \text{ cm}$,
 $\gamma_w = 9810 \text{ N/m}^3$, $\mu = 0,6$
Szukane: T



Rys. III-18

Rozw.:

Czas opróżniania strzykawki według wzoru wynosi (III-28):

$$T_1 = \frac{2}{\mu\sqrt{2g}} \frac{A_z}{A} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) = \frac{2}{\mu\sqrt{2g}} \left(\frac{D}{d}\right)^2 (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) \quad (\text{III-34})$$

Wysokość H_1 występująca w powyższym wzorze jest równa sumie długości strzykawki i wysokości ciśnienia wywieranego przez jej tłok na ciecz:

$$H_1 = L + \frac{p}{\gamma} = L + \frac{4F}{\pi D^2 \gamma} = 0,08 + \frac{4 \cdot 25}{\pi 0,015^2 \cdot 9810} = 14,51 \text{ m} \quad (\text{III-35})$$

a wysokość H_2 jest równa wysokości przyrostu ciśnienia, czyli:

$$H_1 = \frac{4F}{\pi D^2 \gamma} = \frac{4 \cdot 25}{\pi 0,015^2 \cdot 9810} = 14,42 \text{ m} \quad (\text{III-36})$$

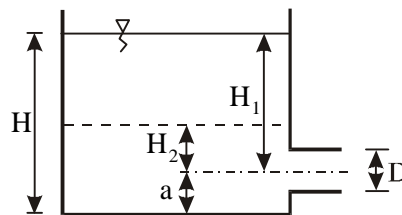
Po podstawieniu wartości liczbowych czas opróżnienia strzykawki wynosi:

$$T_1 = \frac{2}{0,6\sqrt{2 \cdot 9,81}} \left(\frac{0,02}{0,001}\right)^2 (\sqrt{14,51} - \sqrt{14,42}) = 3,6 \text{ s} \quad (\text{III-37})$$

PRZYKŁAD III-7

Określić średnicę d poziomej, przystawki umieszczonej w ścianie zbiornika w odległości a od jego dna taką, aby w ciągu czasu T_1 wypłynęła ze zbiornika połowa jego początkowej objętości wody. Średnica zbiornika wynosi D , napełnienie zbiornika w chwili otwarcia otworu – H .

Dane: $\mu = 0,82, H = 3,18 \text{ m}, D = 1,6 \text{ m}, a = 1 \text{ m}, T_1 = 10 \text{ s}$
Szukane: d



Rys. III-19

Rozw.:

Zbiornik opróżnia się z poziomu H_1 do poziomu H_2 :

$$H_1 = H - a = 3,18 - 1 = 2,18 \text{ m} \quad (\text{III-38})$$

$$H_2 = \frac{H}{2} - a = \frac{3,18}{2} - 1 = 0,59 \text{ m} \quad (\text{III-39})$$

Zbiornik jest walcem, czyli jego pole powierzchni przekroju poprzecznego wynosi:

$$A_z = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 1,6^2}{4} = 0,2 \text{ m}^2 \quad (\text{III-40})$$

Czas opróżniania się zbiornika wyliczony według wzoru (III-15):

$$T_1 = \frac{2A_z}{\mu A \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}) \quad (\text{III-41})$$

Z powyższego równania, po podstawieniu danych liczbowych wyliczyć można pole powierzchni otworu:

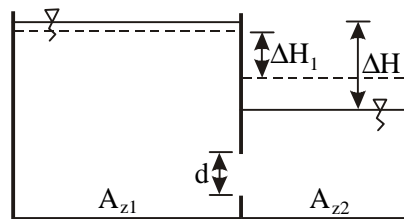
$$A = \frac{2 \cdot 0,204}{0,82 \cdot T_1 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} (\sqrt{2,18} - \sqrt{0,59}) = \frac{0,29}{3,63 \cdot 10} = 0,008 \text{ m}^2 \quad (\text{III-42})$$

Stąd szukana średnica d wynosi:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,008}{3,14}} = 0,1 \text{ m} \quad (\text{III-43})$$

b) otwór zatopiony

O nieustalonym wypływie przez otwór zatopiony mówimy wówczas, gdy woda wypływa z jednego do drugiego zbiornika przez otwór w ścianie oddzielającej te zbiorniki, o ile pierwszy z nich nie jest zasilany wodą z zewnątrz.



Rys. III-20

W takim przypadku następuje zmniejszanie się różnicy ΔH położenia zwierciadeł w zbiornikach aż do momentu wyrównania się poziomów zwierciadeł wody w obu zbiornikach.

W przypadku naczyń o stałym polu powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika na całej wysokości naczynia oblicza się:

- czas T_3 zmniejszenia się różnicy poziomów zwierciadeł wody z początkowego poziomu ΔH do danego ΔH_1 ,

$$T_3 = \frac{2A_{z1} \cdot A_{z2}}{\mu(A_{z1} + A_{z2})A\sqrt{2g}} (\sqrt{\Delta H} - \sqrt{\Delta H_1}) \quad (\text{III-44})$$

gdzie: A – powierzchnia otworu,
 A_{z1}, A_{z2} – powierzchnia przekroju poprzecznego zbiornika odpowiednio w zbiorniku „1” i „2”,
 μ – współczynnik wydatku z otworu.

- czasu T_4 całkowitego wyrównania się poziomów zwierciadeł wody w zbiornikach ($\Delta H_1 = 0$).

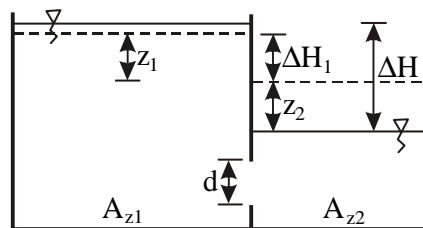
$$T_4 = \frac{2A_{z1} \cdot A_{z2}}{\mu(A_{z1} + A_{z2})A\sqrt{2g}} \sqrt{\Delta H} \quad (\text{III-45})$$

PRZYKŁAD III-8

Po jakim czasie objętość V wody przepłynie ze zbiornika „1” do „2”?

Dane: $\mu = 0,62$, $V = 2 \text{ m}^3$, $A_{z1} = 3 \text{ m}^2$, $A_{z2} = 2 \text{ m}^2$,
 $\Delta H = 2 \text{ m}$, $A = 20 \text{ cm}^2$

Szukane: T_3



Rys. III-21

Rozw.:

Czas w jakim szukana objętość V przepłynie ze zbiornika „1” do zbiornika „2” jest to czas w jakim zmniejszy się początkowa różnica położenia zwierciadeł wody w zbiornikach z ΔH do ΔH_1 , przy czym:

$$\Delta H_1 = \Delta H - (z_1 + z_2) \quad (\text{III-46})$$

gdzie z_1 i z_2 określają obniżenie zwierciadła wody w zbiorniku „1” i „2”.

$$z_1 = \frac{V}{A_{z1}} = \frac{2}{3} = 0,66 \text{ m} \quad (\text{III-47})$$

$$z_2 = \frac{V}{A_{z2}} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m} \quad (\text{III-48})$$

Zatem $\Delta H_1 = 2 - (0,66 + 1) = 0,33 \text{ m}$

$$T_3 = \frac{2A_{z1} \cdot A_{z2}}{\mu(A_{z1} + A_{z2})A\sqrt{2g}} (\sqrt{\Delta H} - \sqrt{\Delta H_1}) = 367 \text{ [s]} \cong 6 \text{ min} \quad (\text{III-49})$$

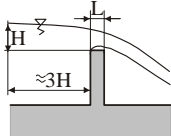
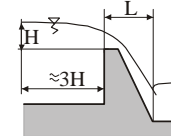
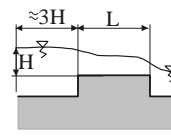
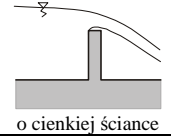
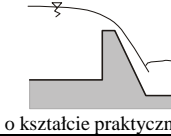
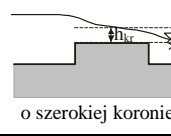
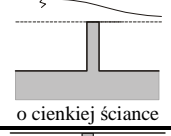
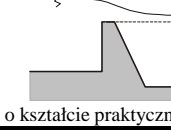
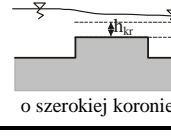
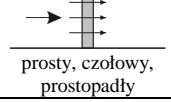
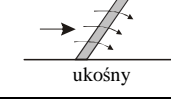
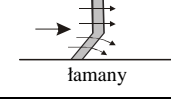
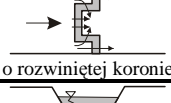
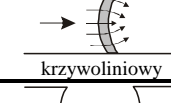
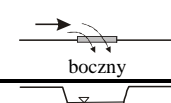









III.2. WYPŁYW PRZEZ PRZELEWY

III.2.1. Klasyfikacja przelewów

Przelew to część przegrody ustawionej na drodze płynącego strumienia w celu jego spiętrzenia, przeprowadzająca równocześnie wodę ze *stanowiska górnego* do *dolnego*. Górną krawędź tej przegrody nazywamy **koroną przelewu**, a jej odległość od dna – **wysokością przelewu**.

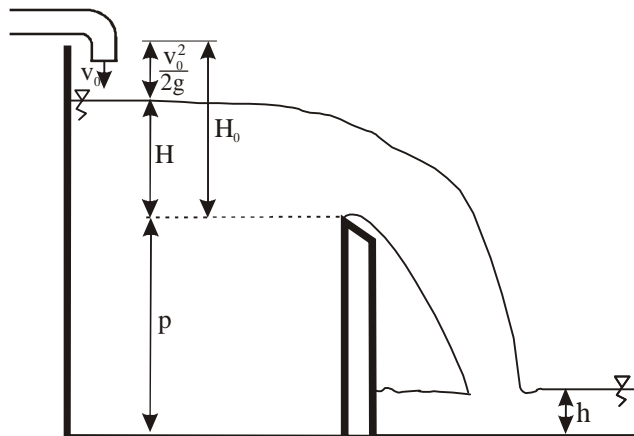
Tabela III-1

Klasyfikacja przelewów

Podział		Rodzaje przelewów		
Widok z boku (podział w zależności od stosunku szerokości korony L do głębokości wody na przelewie H)		 $L < 0,5H$ o cienkiej ścianie	 $0,5H \leq L \leq 2,5H$ o kształcie praktycznym	 $2,5H < L < 10H$ o szerokiej koronie
Zatopienie przelewu	niezatopiony (położenie zwierciadła wody dolnej nie ma wpływu na wydatek)	 o cienkiej ścianie	 o kształcie praktycznym	 o szerokiej koronie
	zatopiony (położenie zwierciadła wody dolnej ma wpływ na wydatek)	 o cienkiej ścianie	 o kształcie praktycznym	 o szerokiej koronie
Widok z góry (usytuowanie przelewu w korycie)		 prosty, czołowy, prostopadły	 ukośny	 łamany
		 o rozwiniętej koronie	 krzywoliniowy	 boczny
Widok z przodu (ze względu na kształt wycięcia) Podział dotyczy przelewów o cienkiej ścianie. Pozostałe typy przelewów są prostokątne.		 trójkątny	 kołowy	 paraboliczny
		 prostokątny	 trapezowy	 proporcjonalny
Dławienie (kontrakcja) boczne		 bez dławienia	 kontrakcja jednostronna	 kontrakcja dwustronna

III.2.2. Wydatek przelewu

a) przelewy o cienkiej ścianie (o ostrej krawędzi)



Rys. III-22

Wydatek przelewu prostokątnego:

$$Q = \sigma_z \cdot m \cdot \varepsilon \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot H_0^{3/2}, \quad (\text{III-50})$$

gdzie: H – głębokość wody na przelewie,

b – szerokość przelewu,

H_0 – wysokość linii energii, $H_0 = H + \frac{v_0^2}{2g}$,

m – współczynnik wydatku,

σ_z, ε – stabilizowane współczynniki zatopienia i dławienia.

Dla przelewu niezatopionego i bez kontrakcji bocznej: $\sigma_z = 1, \varepsilon = 1$.

Wydatek przelewu trójkątnego Thomsona ($\alpha = 90^\circ$):

$$Q = 1,4 \cdot H^{5/2}, \quad (\text{III-51})$$

gdzie: H jest głębokością wody na przelewie ($0,05\text{m} < H < 0,25\text{m}$).

Wydatek przelewu o kształcie kołowym:

$$Q = m \cdot \varepsilon \cdot d^{5/2} \kappa, \quad (\text{III-52})$$

gdzie: m, κ, ε – bezwymiarowe parametry, których wartości można odczytać z tablic [10],

d – średnica światła przelewu.

PRZYKŁAD III-9

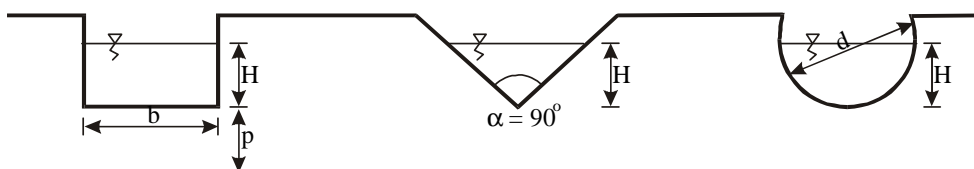
W pionowej ścianie zbiornika zamontowano trzy niezatopione przelewy:

- a) prostokątny
- b) trójkątny,
- c) kołowy,

o wymiarach jak na poniższym rysunku. Obliczyć przepływ przez każdy z tych przelewów (kolejno - Q_p , Q_t , Q_k) przy założeniu, że wzajemnie nie oddziałują one na siebie, a prędkość dopływającej wody można zaniedbać ($H=H_0$). Wszystkie najniższe punkty tych przelewów znajdują się na wysokości H pod powierzchnią zwierciadła cieczy.

Dane: $H = 0,5$ m, $p = 0,5$, $b = 1,2$ m, $d = 1$ m

Szukane: Q_p , Q_t , Q_k



Rys. III-23

Rozw.:

Wydatki poszczególnych przelewów po odczytaniu odpowiednich wartości współczynników z tablic [10]:

a) przelew prostokątny:

$$Q_p = m \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot H_0^{3/2}, \quad (\text{III-53})$$

Współczynnik wydatku odczytany z tablic wynosi $m = 0,467$.

$$Q_p = 0,467 \cdot 1,2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 0,5^{3/2} = 0,88 \text{ m}^3/\text{s}, \quad (\text{III-54})$$

b) przelew trójkątny:

$$Q_t = 1,4 \cdot H^{5/2} = 1,4 \cdot 0,5^{5/2} = 0,25 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{III-55})$$

c) przelew kołowy

$$Q_k = m \cdot d^{5/2} \kappa = 0,69 \cdot 1^{5/2} \cdot 0,017 = 0,012 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{III-56})$$

PRZYKŁAD III-10

Obliczyć przepływ wody przez prostokątny przelew o ostrej krawędzi.

Dane: $p = 1 \text{ m}$, $H = 0,5 \text{ m}$, $h = 0,5 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$

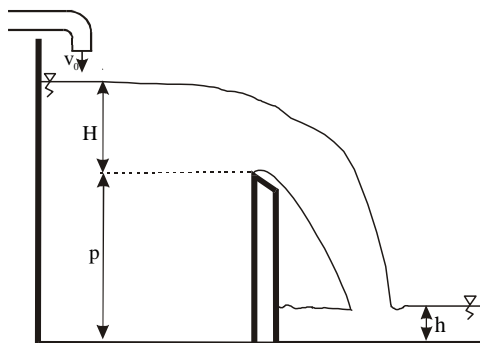
Szukane: Q

Rozw.:

Przelew nie jest zatopiony. Wydatek przelewu ma zatem postać:

$$Q = m \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot H_0^{3/2}, \quad (\text{III-57})$$

Współczynnik wydatku odczytany z tablic wynosi $m = 0,436$.



Rys. III-24

Ponieważ nie znamy wielkości prędkości dopływającej do zbiornika, zatem wydatek policzymy metodą przybliżeń.

I przybliżenie

W tym kroku pominiemy wartość prędkości. W takim przypadku wydatek jest równy:

$$Q' = 0,436 \cdot 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 0,5^{3/2} = 1,37 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{III-58})$$

II przybliżenie

Dokładniejszą wartość przepływu można uzyskać, gdy obliczy się najpierw prędkość v'_0 dopływającej wody i na jej podstawie wyznaczy wypływ Q'' .

$$v'_0 = \frac{Q}{b(p+H)} = \frac{1,28}{2(1+0,5)} = 0,46 \text{ m/s}, \quad (\text{III-59})$$

$$Q'' = 0,436 \cdot 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot \left(0,5 + \frac{1 \cdot 0,46^2}{2 \cdot 9,81}\right)^{3/2} = 1,41 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{III-60})$$

III przybliżenie

Jeżeli różnica przepływu z pierwszego i drugiego przybliżenia jest znaczna (większa niż $0,5 \text{ m}^3/\text{s}$), wówczas powyższe czynności należy powtórzyć.

W praktyce jednak przestaje się drugiej iteracji.

$$v'''_0 = \frac{Q}{b(p+H)} = \frac{1,41}{2(1+0,5)} = 0,47 \text{ m/s}, \quad (\text{III-61})$$

$$Q''' = 0,436 \cdot 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot \left(0,5 + \frac{1 \cdot 0,47^2}{2 \cdot 9,81}\right)^{3/2} = 1,41 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{III-62})$$

Szukany przepływ wynosi zatem $1,41 \text{ m}^3/\text{s}$.

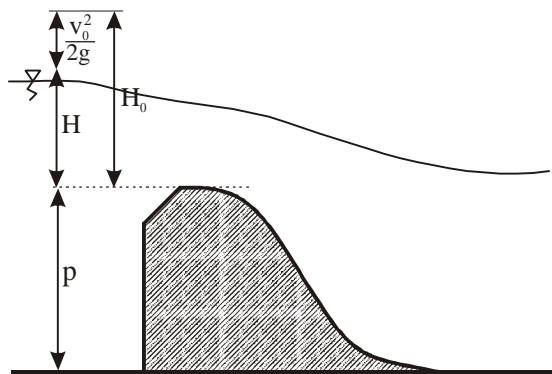
b) przelew o kształcie praktycznym

Wydatek tego przelewu określa się z tych samych wzorów, co wydatek przelewu prostokątnego o cienkiej ścianie.

$$Q = \sigma_z \cdot m \cdot \varepsilon \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot H_0^{3/2}, \quad (\text{III-63})$$

Wartość współczynnika wydatku m , zatopienia σ_z i kontrakcji ε odczytuje się z tablic (np. [10]). Gdy przelew ten nie jest zatopiony i nie ma kontrakcji bocznej wzór przyjmuje postać:

$$Q = m \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot H_0^{3/2}, \quad (\text{III-64})$$



Rys. III-25

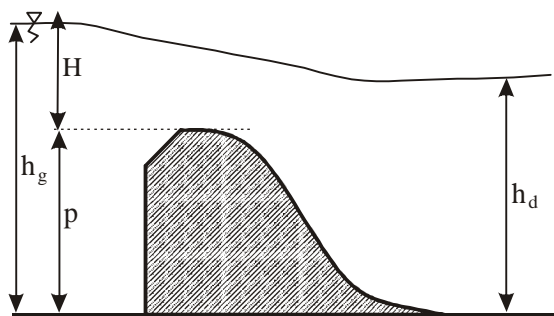
PRZYKŁAD III-11

Obliczyć przepływ Q przez przelew o kształtach praktycznych do którego woda dopływa z dużego zbiornika ($u_0 \cong 0$) w przypadku:

- przelewu niezatopionego, gdy głębokość wody za przelewem $h_d = 0,5$ m,
- przelewu zatopionego, gdy $h_d = 2,5$ m.

Szerokość korony tego przelewu wynosi b , wysokość – p , grubość warstwy wody na przelewie – H .

Dane: $H = 2$ m, $p = 2$ m, $b = 7$ m, $h_d = 2$ m
Szukane: Q



Rys. III-26

Rozw.:

- a) przelew niezatopiony

Ponieważ prędkość dopływającej wody $u_0 \cong 0$, wysokość $H_0 \cong H = 2$ m.

W takim przypadku przepływ wynosi (dla $m = 0,49$):

$$Q = m \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot H_0^{3/2} = 0,49 \cdot 7 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 2^{3/2} = 43 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{III-65})$$

- b) przelew zatopiony

Z tablic (Fanti, 1972) odczytać można współczynnik zatopienia σ_{zat} zależny od stosunku $(h_d - p)/H_0 = 0,25$. Współczynnik ten wynosi $\sigma_{zat} = 0,994$. Podstawiając wartości liczbowe do wzoru (III-50) wyliczyć można wydatek:

$$Q = 0,49 \cdot 0,994 \cdot 7 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 2^{3/2} = 42,7 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{III-66})$$

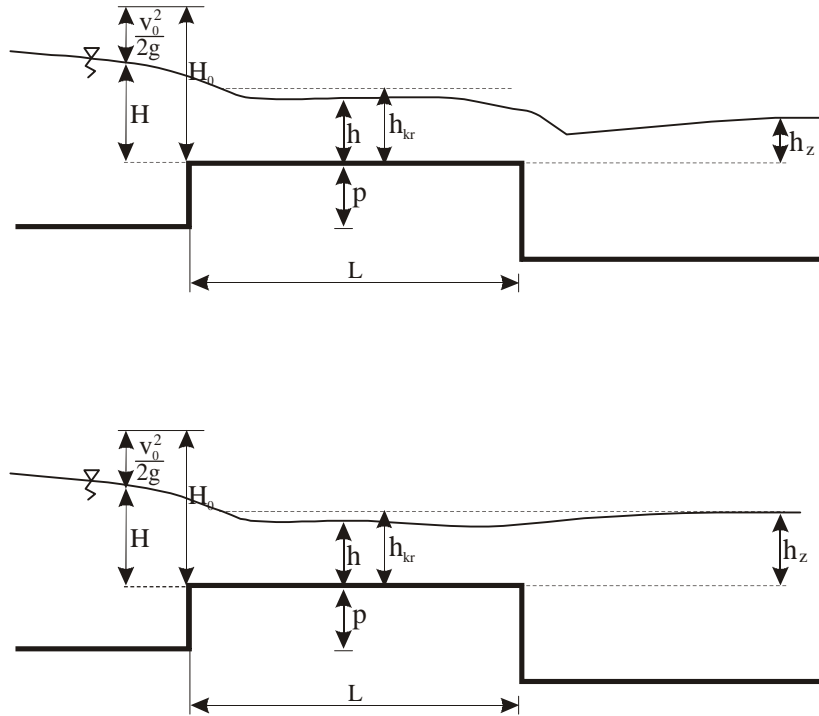
c) Przelew o szerokiej koronie

Na koronie przelewu o szerokiej koronie o długości L ($2,5H < L < 10H$) odbywa się przepływ z głębokością na części przelewu większą, a na części mniejszą od głębokości krytycznej.

Próg o szerokiej koronie jest **niezatopiony**, gdy rzędna zwierciadła wody dolnej jest niższa od rzędnej zwierciadła przy przepływie krytycznym ($h_z < h_{kr}$). Praktycznie przyjmuje się, że: $h_z < kH_0$ (k jest stabilizowanym współczynnikiem zależnym od kształtu przelewu). Wydatek przelewu o szerokiej koronie określa się tak samo jak przelewu prostokątnego o cienkiej ścianie:

$$Q = m \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot H_0^{3/2}, \quad (\text{III-67})$$

gdzie b jest szerokością przelewu.

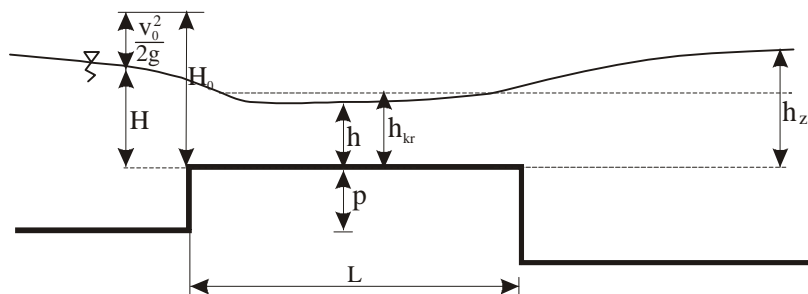


Rys. III-27 Niezatopiony próg o szerokiej koronie

Przelew będzie **zatopiony**, gdy poziom wody dolnej h_z będzie wyższy niż poziom głębokości krytycznej na próg (czyli praktycznie, gdy $h_z > kH_0$). Głębokość na progu staje się wtedy funkcją zatopienia.

$$Q = \varphi \cdot h_z \cdot b \cdot \sqrt{2g(H_0 - h_z)}, \quad (\text{III-68})$$

Współczynnik φ jest bezwymiarowym współczynnikiem prędkości.



Rys. III-28

PRZYKŁAD III-12

W prostokątnym korycie rzeki o szerokości B projektowany jest przelew o szerokiej koronie, o wysokości p i zaokrąglonej części wlotowej. Jak musi być szerokość b tego przelewu, jeżeli przepływ przed przelewem wynosi Q , głębokość wody przed przelewem to h_g , za – h_d .

Dane: $p = 1,5 \text{ m}$, $B = 10 \text{ m}$, $h_g = 5 \text{ m}$, $h_d = 2 \text{ m}$, $Q = 30 \text{ m}^3/\text{s}$
 Szukane: b

Rozw.:

Aby sprawdzić zatopienie przelewu, należy sprawdzić, czy $h_z > kH_0$. Ponieważ próg ma zaokrąglony wlot, współczynnik $k = 0,63$, a $m = 0,350$.

$$v_0 = \frac{Q}{B \cdot h_g} = \frac{30}{10 \cdot 5} = 0,6 \text{ m/s} \quad (\text{III-69})$$

$$k \cdot H_0 = k \cdot \left(h_g - p + \frac{v_0^2}{2g} \right) = 0,63 \cdot \left(5 - 1,5 + \frac{0,6^2}{2 \cdot 9,81} \right) = 2,22 \text{ m} \quad (\text{III-70})$$

Ponieważ $h_z = h_d - p = 2 - 1,5 = 0,5 \text{ m}$ jest mniejsza od $kH_0 = 2,22 \text{ m}$, przelew pracuje jako niezatopiony. W tym przypadku przelewu zatopionego wydatek opisany jest wzorem (III-67):

$$b = \frac{Q}{m \cdot \sqrt{2g} \cdot H_0^{3/2}} = \frac{30}{0,35 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 3,5^{1,5}} \cong 3 \text{ m} \quad (\text{III-71})$$

Aby były spełnione zadane warunki, światło progu powinno być równe 3 m.

PRZYKŁAD III-13

W prostokątnym korycie rzeki wybudowano przelew o szerokiej koronie. Przepływ przed przelewem wynosi Q , szerokość przelewu – b , wysokość – p . Obliczyć spiętrzenie wody h_z za przelewem.

$$\begin{aligned} \text{Dane:} & \quad H = 2 \text{ m}, p = 1 \text{ m}, Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}, b = 10 \text{ m} \\ \text{Szukane:} & \quad h_z \end{aligned}$$

Rozw.:

Obliczenie prędkości wody przed przelewem:

$$v_0 = \frac{Q}{b(H+p)} = \frac{50}{10(2+1)} = 1,67 \text{ m/s} \quad (\text{III-72})$$

$$H_0 = H + \frac{v_0^2}{2g} = 2 + \frac{1,67^2}{2 \cdot 9,81} = 2,14 \text{ m} \quad (\text{III-73})$$

W przypadku przelewu zatopionego wydatek opisany jest wzorem:

$$Q = \varphi \cdot h_z \cdot b \cdot \sqrt{2g(H_0 - h_z)} = 0,85 \cdot h_z \cdot 10 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot (2,14 - h_z)} \quad (\text{III-74})$$

Ponieważ znany jest przepływ, metodą prób obliczyć można z powyższego równania szukaną wartość h_z . Wynosi ona $h_z = 1,45 \text{ m}$.

IV. RUCH W KORYTACH OTWARTYCH

I.1. DEFINICJE

Typy koryt otwartych:

- ◆ **liniowe:**
 - „naturalne” (rzeki, potoki, strumienie),
 - sztuczne (kanały);
- ◆ **powierzchniowe:**
 - naturalne (jeziora),
 - sztuczne (zbiorniki).

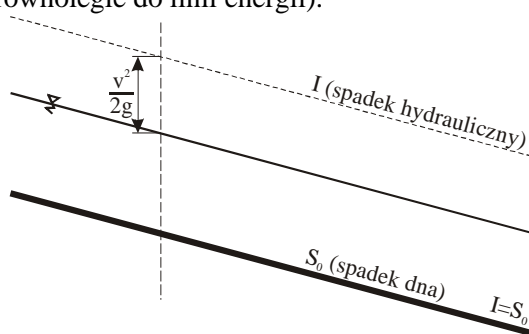
Przepływ w korytach otwartych zachodzi przy swobodnym zwierciadle (jego położenie zmienia się wraz z natężeniem przepływu) na które działa ciśnienie atmosferyczne.

IV.1. RUCH JEDNOSTAJNY W KORYTACH OTWARTYCH

Ruch jednostajny w korytach otwartych to taki ruch którego parametry (prędkość, głębokość) nie zmieniają się w czasie i w przestrzeni. Ruch taki może wystąpić tylko w korycie spełniającym następujące warunki:

- przyrównanie (stałość przekroju poprzecznego na długości),
- stałość spadku podłużnego,
- stałość współczynnika szorstkości.

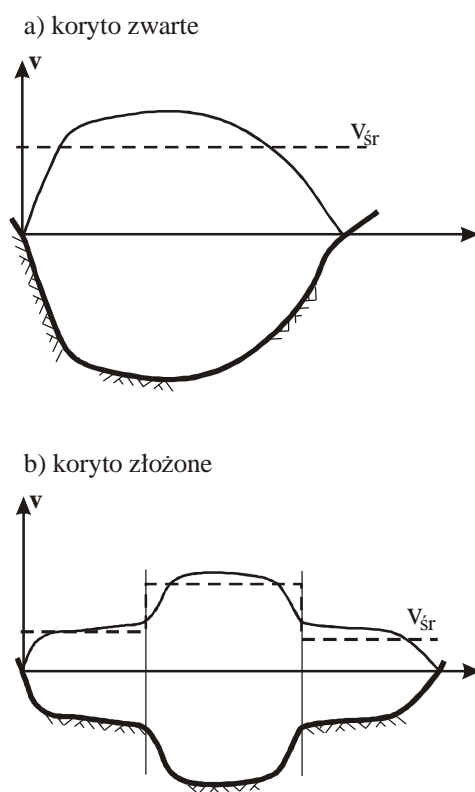
Zwierciadło wody jest równoległe do dna kanału (pokrywa się z piezometryczną linią ciśnień i jest równoległe do linii energii).



Rys. IV-1

IV.1.1. Przepływ w przekroju poprzecznym zwartym

Przekrój zwarty to taki przekrój, w którym nie występują gwałtowne i istotne zmiany średniej prędkości (rys. IV-2a). Jeżeli tak nie jest, koryto nazywa się złożonym (rys. IV-2b). Jak widać kształt porzecznego rozkładu prędkości związany jest z kształtem poprzecznego przekroju koryta. W korycie zwartym nie występuje nagła i istotna zmiana prędkości. W korycie złożonym wyróżnić można tzw. koryto główne i terasy zalewowe.



Rys. IV-2

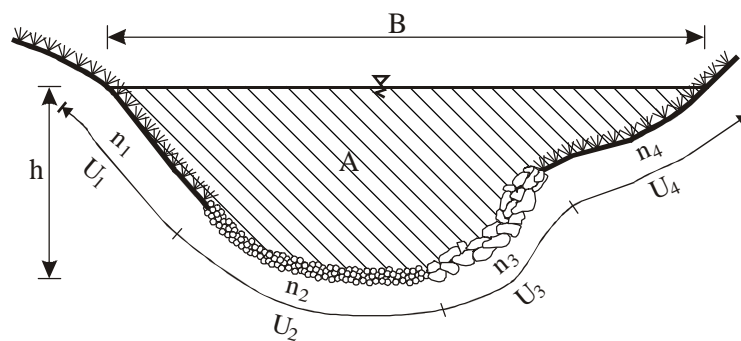
Z definicji prędkości średniej natężenie przepływu wyraża się iloczynem średniej prędkości v i pola powierzchni przepływu A :

$$Q = v \cdot A \quad [\text{m}^3/\text{s}], \quad (\text{IV-1})$$

Funkcję równania dynamicznego w korycie zwartym pełni formuła Manninga określająca prędkość średnią w przekroju:

$$v = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} \quad [\text{m/s}] \quad (\text{IV-2})$$

gdzie: R – promień hydrauliczny, $R = A/U$,
 A – pole czynnego przekroju koryta (wypełniona wodą część koryta zawarta pomiędzy dnem, a zwierciadłem wody),
 U – obwód zwilżony,
 I – spadek hydrauliczny,
 n – współczynnik szorstkości przekroju.



Rys. IV-3

Głębokość h jest pionową odległością pomiędzy najniższym położonym punktem dna a zwierciadłem wody.

Średnia głębokość przepływu w przekroju jest stosunkiem pola przekroju czynnego A do szerokości kanału B na poziomie zwierciadła wody.

Współczynnik szorstkości n ma „niefizyczny” charakter; jego wymiar to $[\text{m}\cdot\text{s}^{-1/3}]$. Zawiera informacje o tych cechach koryta, które mają wpływ na opory ruchu. Dla tego też współczynnik ten zmienia się wraz z głębokością (a także porami roku – w lecie opory przepływu są większe).

Współczynnik szorstkości zależy od:

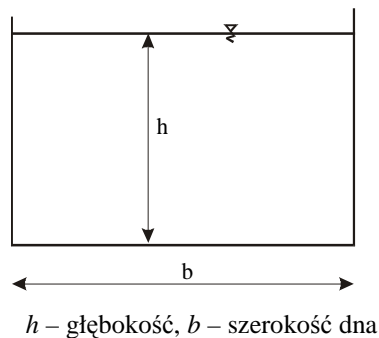
- kształtu koryta – zarówno w przekroju poprzecznym, profilu podłużnym, a także w planie,
- pokrycia (składu granulometrycznego materiału z jakiego zbudowane jest koryto, roślinności porastającej koryto – jej rodzaju i wielkości przestrzeni na jakiej występuje).

W przypadku wyraźnej zmienności n na obwodzie, wartość tego współczynnika można obliczyć jako średnią ważoną współczynników szorstkości n_i :

$$n = \frac{\sum n_i U_i}{U} \quad (\text{IV-3})$$

Ze względu na to, że podane poniżej zadania dotyczą przekrojów prostokątnych lub trapezowych, poniżej podano podstawowe zależności geometryczne je charakteryzujące.

a) przekrój prostokątny



Rys. IV-4

Pole powierzchni przekroju przepływu (czynnego) – jest to pole powierzchni przekroju poprzecznego, ograniczone ścianami kanału i zwierciadłem wody:

$$A = b \cdot h \quad (\text{IV-4})$$

gdzie h jest napełnieniem koryta, a b – szerokością dna.

Obwód zwilżony jest długością konturu powierzchni na której następuje kontakt z wodą:

$$U = 2h + b \quad (\text{IV-5})$$

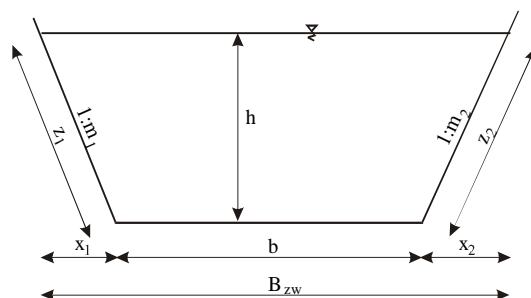
Promień hydrauliczny dla tego koryta wyraża się stosunkiem pola powierzchni do obwodu zwilżonego:

$$R = \frac{A}{U} = \frac{bh}{2h + b} \quad (\text{IV-6})$$

Średnia głębokość w przekroju wynosi zatem:

$$h_{sr} = \frac{A}{B_{zw}} = \frac{b \cdot h}{b} = h \quad (\text{IV-7})$$

b) **przekrój trapezowy**



Rys. IV-5

m – nachylenie skarpy, h – głębokość,
 b – szerokość dna, B_{zw} – szerokość zwierciadła.

Długość skarp:

$$\frac{h}{x_1} = \frac{1}{m_1} \Rightarrow x_1 = h \cdot m_1 \Rightarrow z_1 = h\sqrt{1+m_1^2} \quad (\text{IV-8})$$

$$\frac{h}{x_2} = \frac{1}{m_2} \Rightarrow x_2 = h \cdot m_2 \Rightarrow z_2 = h\sqrt{1+m_2^2} \quad (\text{IV-9})$$

Pole powierzchni przekroju przepływu (czynnego):

$$A = 0,5 \cdot (B + B_{zw}) h = B \cdot h + 0,5 \cdot (m_1 + m_2) \cdot h^2 \quad (\text{IV-10})$$

Obwód zwilżony:

$$U = z_1 + B + z_2 = B + h(\sqrt{1+m_1^2} + \sqrt{1+m_2^2}) \quad (\text{IV-11})$$

Promień hydrauliczny:

$$R = \frac{A}{U} = \frac{B \cdot h + 0,5 \cdot (m_1 + m_2) \cdot h^2}{B + h(\sqrt{1+m_1^2} + \sqrt{1+m_2^2})}$$

Średnia głębokość w przekroju:

$$h_{sr} = \frac{A}{B_{zw}} = \frac{B \cdot h + 0,5 \cdot (m_1 + m_2) \cdot h^2}{B + h \cdot m_1 + h \cdot m_2} \quad (\text{IV-12})$$

IV.1.2. Obliczenia hydrauliczne dla koryta zamkniętego

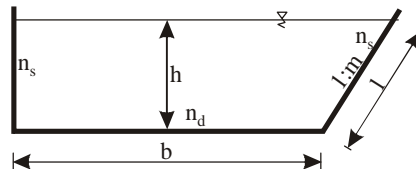
W obliczeniach hydraulicznych dotyczących koryt otwartych przy ruchu jednostajnym, spotyka się cztery typy zadań:

- **obliczenie średniej prędkości v (lub natężenia przepływu Q)** w korycie poprzez podstawienie wszystkich danych do wzoru Manninga
- **określenie spadku dna kanału S_0** – polega na obliczeniu szukanej wartości spadku z odpowiednio przekształconego wzoru Manninga,
- **wyznaczenie dowolnego liniowego wymiaru koryta (najczęściej głębokości h)** – takie zadania nawet w przypadku najprostszego przekroju poprzecznego koryta wymaga znalezienia pierwiastków wielomianu wyższego stopnia, dlatego ten typ zadań rozwiązuje się metodą kolejnych przybliżeń lub metodą inżynierską (przy użyciu krzywej konsumpcyjnej),
- **określenie wartości średniego współczynnika szorstkości n** - zadanie mające raczej charakter badawczy; polega ono na obliczeniu ze wzoru Manninga średniej szorstkości dla danego odcinka koryta.

PRZYKŁAD IV-1 Obliczenie Q

Obliczyć napelnienie przy przepływie Q w kanale ziemnym o przekroju trapezowym i spadku zwierciadła I , szorstkości skarp n_s i dna n_d .

Dane: $I = 1 ‰$, $b = 5 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, $m = 1,5$, $n_d = 0,030$, $n_s = 0,025$,
Szukane: Q .



Rys. IV-6

Rozw.:

Natężenie przepływu w oparciu o wzór Manninga:

$$Q = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} A \quad (\text{IV-13})$$

Ponieważ szorstkości ścian koryta są różne, do obliczenia natężenia przepływu konieczne będzie obliczenie wartości współczynnika szorstkości n , jako średniej ważonej poszczególnych współczynników, wg wzoru (IV-3):

$$n = \frac{n_d b + n_s (h + h\sqrt{1+m^2})}{b + h + h\sqrt{1+m^2}} = \frac{0,03 \cdot 5 + 0,025 \cdot (1 + \sqrt{1+1,5^2})}{5 + 1 + \sqrt{1+1,5^2}} = 0,028 \quad (\text{IV-14})$$

W przypadku koryta trapezowego:

- pole powierzchni przepływu: $A = b \cdot h + 0,5 \cdot m \cdot h^2 = 5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1,5 \cdot 1^2 = 5,75 \text{ m}^2$,
- obwód zwilżony: $U = b + h\sqrt{1+m^2} = 5 + \sqrt{1+1,5^2} = 6,80 \text{ m}$,
- promień hydrauliczny wynosi: $R = A/U = 5,75/6,80 = 0,85 \text{ m}$.

Po podstawieniu wszystkich policzonych wcześniej wielkości, natężenie przepływu Q wynosi:

$$Q = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} A = \frac{1}{0,028} 0,85^{2/3} 0,001^{1/2} 5,75 = 5,83 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{IV-15})$$

PRZYKŁAD IV-2 Obliczenie S_0

Określić spadek dna S_0 koryta prostokątnego taki, by przy zadanym napełnieniu, szerokości dna b i szorstkości n , kanał prowadził wodę z prędkością v .

Dane: $b = 10 \text{ m}$, $h = 2 \text{ m}$, $v = 1,5 \text{ m/s}$, $n = 0,03$

Szukane: S_0

Rozw.:

Spadek dna obliczyć można przekształcając wzór Manninga:

$$S_0 = I = \left(\frac{n \cdot v}{R^{2/3}} \right)^2 = \left(\frac{0,03 \cdot 1,5}{1,43^{2/3}} \right)^2 = 0,0013 = 1,3 \text{ ‰} \quad (\text{IV-16})$$

W przypadku koryta prostokątnego promień hydrauliczny wynosi:

$$R = \frac{A}{U} = \frac{bh}{2h+b} = \frac{10 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 10} = 1,43 \text{ m} \quad (\text{IV-17})$$

PRZYKŁAD IV-3 Obliczenie h

Obliczyć napełnienie przy przepływie Q w kanale ziemnym o przekroju prostokątnym i spadku S_0 .

Dane: $Q = 15 \text{ m}^3/\text{s}$, $S_0 = 0,9 \text{ ‰}$, $b = 10 \text{ m}$, $n = 0,035$.

Szukane: h

Rozw.:

Natężenie przepływu w oparciu o wzór Manninga wyraża się wzorem:

$$Q = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} A \quad (\text{IV-18})$$

W przypadku koryta prostokątnego: $A = b \cdot h$, $U = 2h + b$, $R = \frac{A}{U} = \frac{bh}{2h + b}$

Natężenie przepływu Q wynosi zatem:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{(bh)^{5/3}}{(2h + b)^{2/3}} I^{1/2} \quad (\text{IV-19})$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

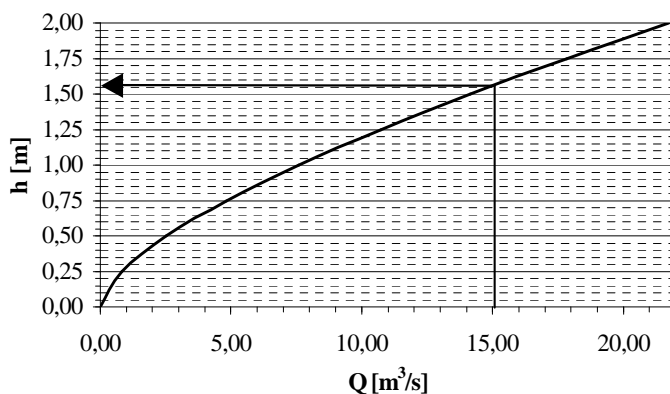
$$Q = \frac{1}{0,035} \frac{(10 \cdot h)^{5/3}}{(2h + 10)^{2/3}} 0,0009^{1/2} = 0,857 \frac{(10 \cdot h)^{5/3}}{(2h + 10)^{2/3}} \quad (\text{IV-20})$$

Równania (IV-20) nie da się rozwiązać w łatwy sposób, ponieważ po przekształceniu powyższego wzoru otrzymuje się równanie wielomianowe wyższego stopnia. Dlatego do wyznaczenia tej wielkości stosuje się jedną z dwóch metod: iteracyjną (kolejnych przybliżeń) lub uproszczoną (krzywej konsumcyjnej).

1. metoda krzywej konsumcyjnej

Na podstawie związku (IV-20), należy narysować zależność $Q = f(h)$, czyli krzywą konsumcyjną.

h [m]	Q [m ³ /s]
0,00	0,00
0,25	0,82
0,50	2,53
0,75	4,83
1,00	7,59
1,25	10,71
1,50	14,14
1,75	17,83
2,00	21,74



Rys. IV-7 Krzywa konsumcyjna

Z powyższej krzywej odczytać można wartość napęlenia dla zadanego przepływu. Dla przepływu $Q = 15 \text{ m}^3/\text{s}$ głębokość wynosi: $h = 1,55 \text{ m}$.

Należy dla tak odczytanej głębokości obliczyć natężenie przepływu:

$$Q = 0,857 \frac{(10 \cdot 1,55)^{5/3}}{(2 \cdot 1,55 + 10)^{2/3}} = 14,87 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{IV-21})$$

a następnie sprawdzić, czy jest spełniony poniższy warunek:

$$\left| \frac{Q - Q_{obl}}{Q} \right| \leq 10\% \Leftrightarrow \left| \frac{15 - 14,87}{15} \right| = 0,8\% \quad (\text{IV-22})$$

2. metoda kolejnych przybliżeń

Aby zastosować do obliczania napełnienia tę metodę, należy przekształcić równanie (IV-20) do postaci umożliwiającej dokonanie iteracji. Wyliczamy zatem h z licznika prawej strony równania. Otrzymujemy:

$$h = \left(\frac{Q \cdot (2h + 10)^{2/3}}{0,857 \cdot 10^{5/3}} \right)^{3/5} \quad (\text{IV-23})$$

Po przekształceniach równanie ostatecznie przyjmie postać:

$$h = 1,4 \cdot \left(\frac{h}{5} + 1 \right)^{0,4} \quad (\text{IV-24})$$

Metoda kolejnych przybliżeń, polega na wykonaniu następujących czynności:

I przybliżenie

- za wartość „ h ” występującą po prawej stronie równania podstawia się dowolną wartość głębokości,
- następnie należy obliczyć prawą stronę równania
- i sprawdzić, czy równanie jest spełnione z założoną dokładnością. Jeżeli tak, to przyjęta przez nas wartość jest szukaną. Jeżeli nie, należy wykonać następny krok iteracji.

II przybliżenie

Przyjmuje się wartość „ h ” równą wynikowi obliczeń prawej strony równania z przybliżenia I i sprawdza się czy głębokość z drugiego przybliżenia spełnia założone kryterium.

W naszym przypadku przyjęto do przybliżenia I, że głębokość h jest równa 2 m, a dokładność $\Delta h = 0,5$ m. Podstawiając tę wartość do prawej strony równania (VIII-24) otrzymuje się:

$$h' = 1,4 \cdot \left(\frac{h}{5} + 1\right)^{0,4} = 1,4 \cdot \left(\frac{2}{5} + 1\right)^{0,4} = 1,60 \text{ m} \quad (\text{IV-25})$$

Ponieważ 1,60 m jest różne od założonego napełnienia 2 m (więcej niż założona dokładność), należy dokonać II przybliżenie. Do obliczeń przyjmuje się wartość głębokości h równą 1,6 m. Po podstawieniu do tej wartości prawej strony równania (IV-24) otrzymuje się:

$$h'' = 1,4 \cdot \left(\frac{h}{5} + 1\right)^{0,4} = 1,4 \cdot \left(\frac{1,6}{5} + 1\right)^{0,4} = 1,56 \text{ m} \quad (\text{IV-26})$$

Ponieważ wartość 1,56 m różni się od podstawionej 1,6 m o 4 cm, czyli znowu więcej niż założona dokładność. Należy więc wykonać jeszcze jedną iterację podstawiając 1,56 m do równania (IV-24).

$$h''' = 1,4 \cdot \left(\frac{h}{5} + 1\right)^{0,4} = 1,4 \cdot \left(\frac{1,56}{5} + 1\right)^{0,4} = 1,56 \text{ m} \quad (\text{IV-27})$$

Otrzymaliśmy zgodność prawej i lewej strony równania, co oznacza, że szukana wartość napełnienia h wynosi 1,56 m. Tak jak poprzednio, należy dla tak odczytanej głębokości obliczyć natężenie przepływu:

$$Q = 0,857 \frac{(10 \cdot 1,56)^{5/3}}{(2 \cdot 1,56 + 10)^{2/3}} = 15,00 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{IV-28})$$

Obliczony przepływ jest dokładnie równy zadanemu, gdyby tak jednak nie było, należy sprawdzić, czy jest spełniony warunek (IV-22).

PRZYKŁAD IV-4 Obliczenie n

Obliczyć wartość współczynnika szorstkości n koryta półkolistego o promieniu R i spadku S_0 przy przepływie maksymalnym Q .

$$\begin{aligned} \text{Dane:} & \quad S_0 = 0,8 \text{ ‰}, Q = 3,1 \text{ m}^3/\text{s}, R = 1 \text{ m} \\ \text{Szukane:} & \quad n \end{aligned}$$

Rozw.:

Wartość współczynnika szorstkości w korycie półkolistym wyrazić korzystając z formuły Manninga następującą zależnością:

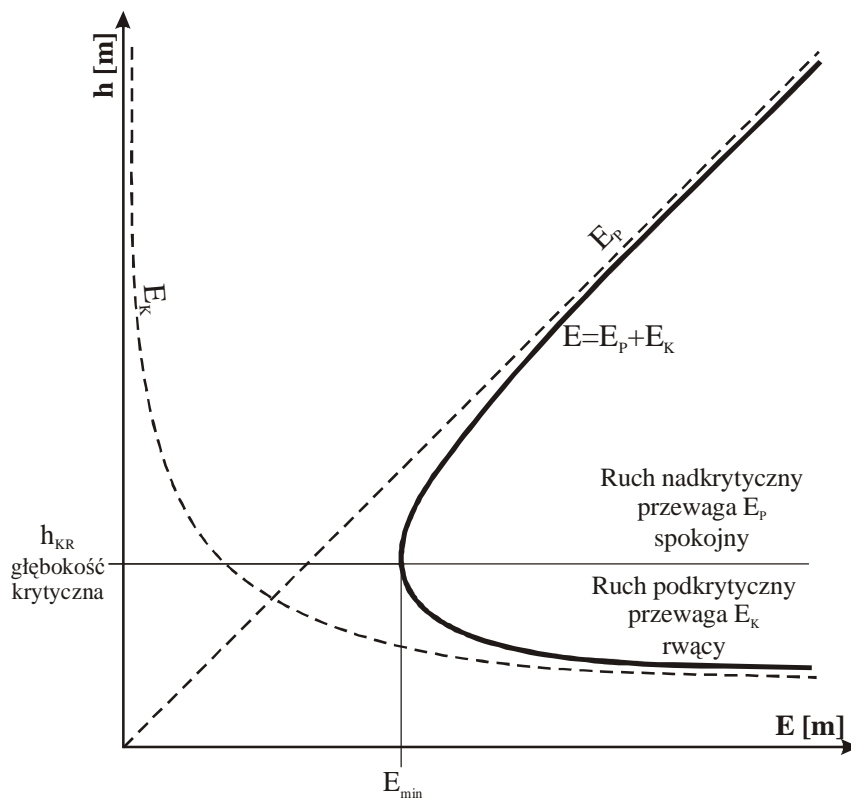
$$n = \frac{R^{2/3} I^{1/2} \frac{\pi R^2}{2}}{Q} = \frac{1^{2/3} 0,0008^{1/2} \pi \cdot 1^2}{3,1} = 0,014 \quad (\text{IV-29})$$

Uwaga: Obliczona wartość współczynnika n odpowiada szorstkości betonu.

IV.1.3. Ruch krytyczny

Ruch krytyczny to ruch w którym całkowita energia strumienia osiąga wartość minimalną, czyli:

$$E = E_K + E_P = \min , \quad (IV-30)$$



Rys. IV-8

Wysokość energii całkowitej strumienia wynosi zatem:

$$E = \frac{\alpha v^2}{2g} + h = \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} + h \quad (IV-31)$$

Analizując powyższy wzór zauważyć można, że przy stałym natężeniu przepływu Q zarówno przy głębokości h malejącej do zera, jak i przy rosnącej do nieskończoności, energia całkowita strumienia rośnie nieograniczenie. Istnieje

zatem taka głębokość, dla której energia ta osiąga wartość minimalną. Głębokość tę, zwaną głębokością krytyczną, obliczyć można z warunku zerowania się pochodnej.

$$\frac{dE}{dh} = 0 \quad (\text{IV-32})$$

Po podstawieniu (IV-31) do (IV-32) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{\alpha Q^2}{2gA^2} + h \right) = 0 \quad (\text{IV-33})$$

a po przekształceniu:

$$\frac{\alpha Q^2}{2g} \cdot \frac{-2}{A^3} \cdot \frac{dA}{dh} + 1 = 0 \quad (\text{IV-34})$$

Oznaczając symbolem B_{zw} szerokość zwierciadła wody, można zapisać, że:

$$dA = B_{zw} \cdot dh \Leftrightarrow B_{zw} = \frac{dA}{dh} \quad (\text{IV-35})$$

Warunek ruchu krytycznego (w którym przy stałym przepływie - energia całkowita strumienia jest minimalna) przybiera zatem postać:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{A^3}{B_{zw}} \quad (\text{IV-36})$$

Rodzaj ruchu w korycie można określić także przy użyciu liczby Froude'a. Aby wyprowadzić wzór na tę liczbę należy dokonać przekształcenia równania ruchu krytycznego (IV-35) do postaci:

$$\frac{\alpha Q^2 B_{zw}}{gA^3} = 1 \quad (\text{IV-37})$$

Ponieważ

$$v = \frac{Q}{A} \text{ i } h_{sr} = \frac{A}{B_{zw}} \quad (\text{IV-38})$$

warunek ruchu krytycznego przybiera ostatecznie postać:

$$Fr = \frac{\alpha v^2}{gh_{sr}} = 1 \quad \left(\text{lub } Fr = \sqrt{\frac{\alpha v^2}{gh_{sr}}} = 1 \right) \quad (\text{IV-39})$$

Jeżeli liczba $Fr > 1$, to w korycie panuje ruch rwący, gdy $Fr < 1$ – ruch spokojny.

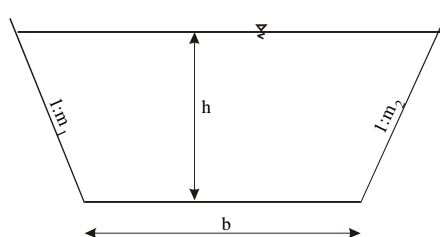
Podsumowując:

	ruch krytyczny	ruch rwący	ruch spokojny
głębokość	h_{KR}	$h < h_{KR}$	$h > h_{KR}$
liczba Frouda	$Fr = 1$	$Fr > 1$	$Fr < 1$

PRZYKŁAD IV-5

Określ rodzaj ruchu w korycie trapezowym.

Dane: $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$, $m = 1,5$, $h = 1 \text{ m}$, $\alpha = 1$, $b = 10 \text{ m}$



Rys. IV-9

Rozw.:

Pole powierzchni przekroju przepływu:

$$A = 0,5 \cdot (2b + 2hm) \cdot h = (b + mh) \cdot h = (10 + 1,5 \cdot 1) \cdot 1 = 11,5 \text{ m}^2 \quad (\text{IV-40})$$

Średnia prędkość w przekroju:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{10}{11,5} = 0,87 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{IV-41})$$

Metoda 1 określenia reżimu ruchu (z wykorzystaniem głębokości krytycznej)

Warunek ruchu krytycznego:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{A^3}{B_{zw}} \quad (\text{IV-42})$$

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{(bh + mh^2)^3}{b + 2mh} \quad (\text{IV-43})$$

Po podstawieniu danych liczbowych:

$$\frac{\alpha \cdot 10^2}{9,81} = 10,19 = \frac{(10h + 1,5h^2)^3}{10 + 3h} = P \quad (\text{IV-44})$$

Wartość h obliczamy metodą „prób i błędów”. Przyjmujemy $h = 0,5$ m i sprawdzamy, czy po podstawieniu tej wartości głębokości powyższy warunek jest spełniony (czyli czy prawa strona tego równania jest równa 10,19)

$$P = \frac{(10 \cdot 0,5 + 1,5 \cdot 0,5^2)^3}{10 + 3 \cdot 0,5} = 13,50 \quad (\text{IV-45})$$

Ponieważ $P = 13,50 \neq 10,19$, przyjmuję mniejszą wartość głębokości $h = 0,45$ m.

$$P = \frac{(10 \cdot 0,45 + 1,5 \cdot 0,45^2)^3}{10 + 3 \cdot 0,45} = 9,76 \quad (\text{IV-46})$$

Ponieważ $P = 9,76 \neq 10,19$, przyjmuję $h = 0,46$ m.

$$P = \frac{(10 \cdot 0,46 + 1,5 \cdot 0,46^2)^3}{10 + 3 \cdot 0,46} = 10,44 \quad (\text{IV-47})$$

Ostatecznie uznano, że $h_{KR} = 0,46$ m.

Napełnienie $h = 1$ m jest większe niż $h_{KR} = 0,46$ m.

Zatem ruch w korycie jest spokojny.

Metoda 2 określenia rodzaju ruchu (z wykorzystaniem liczby Froude'a)

Aby wyznaczyć liczbę Frouda, konieczne jest obliczenie średniej głębokości:

$$h_{sr} = \frac{A}{B_{zw}} = \frac{A}{b + 2mh} = \frac{11,5}{10 + 2 \cdot 1,5 \cdot 1} = \frac{11,5}{13} = 0,88 \quad (\text{IV-48})$$

$$Fr = \frac{\alpha v^2}{gh_{sr}} = \frac{1 \cdot 0,87^2}{9,81 \cdot 0,88} = 0,087 \quad (\text{IV-49})$$

Ponieważ liczba Frouda jest mniejsza od 1, więc w korycie panuje ruch spokojny.

IV.1.4. Przekrój hydraulicznie najkorzystniejszy

Przekrój hydraulicznie najkorzystniejszy to taki przekrój, przez który przy danym spadku koryta i danej jego szorstkości, że przepływ osiąga wartość maksymalną.

Korzystając ze wzoru Manninga zauważyć można, że warunek ten jest spełniony, gdy promień hydrauliczny jest największy (czyli obwód zwilżony jest minimalny).

Przekrój w kształcie półkolisty:

$$R = \frac{A}{U} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{2}{\pi d} = \frac{d}{4} \quad (\text{IV-50})$$

Przekrój trapezowy (trapez oparty na kole i ramiona = podstawa = b , wysokość h)

$$R = \frac{A}{U} = \frac{3bh}{6b} = \frac{h}{2} \quad (\text{IV-51})$$

PRZYKŁAD IV-6

Obliczyć hydraulicznie najkorzystniejsze wymiary kanału ziemnego o przekroju trapezowym, przez który przepływa strumień o natężeniu Q .

Dane: $m = 2, I = 2 \text{ ‰}, Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}, n = 0,030$

Szukane: B, B_{zw}, h

Rozw.:

Natężenie przepływu ze wzoru Manninga:

$$Q = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} A \quad (\text{IV-52})$$

Pole powierzchni czynnej

$$A = Bh + mh^2 \Rightarrow B = \frac{A}{h} - mh \quad (\text{IV-53})$$

Obwód zwilżony:

$$U = B + 2h\sqrt{1+m^2} \quad (\text{IV-54})$$

Po podstawieniu (IV-53) do (IV-54) otrzymujemy:

$$U = \frac{A}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2} \quad (\text{IV-55})$$

Poniżej podano charakterystyczne zależności dla koryt hydraulicznie najkorzystniejszych o określonym kształcie przekroju poprzecznego.

Przekrój jest hydraulicznie najkorzystniejszy jeśli natężenie przepływu osiąga wartość maksymalną:

$$A = \text{const i } R = \max \Rightarrow U = \min \Rightarrow \frac{dU}{dh} = 0 \quad (\text{IV-56})$$

Podstawiając (IV-55) do powyższego warunku otrzymujemy:

$$\frac{dU}{dh} = \frac{d}{dh} \left(\frac{A}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2} \right) \quad (\text{IV-57})$$

$$\frac{dU}{dh} = -\frac{A}{h^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} = 0 \quad (\text{IV-58})$$

Z powyższego wzoru, obliczyć można maksymalne pole A :

$$A = h^2 \left(2\sqrt{1+m^2} - m \right) \quad (\text{IV-59})$$

i minimalny obwód zwilżony U :

$$U = \frac{h^2 \left(2\sqrt{1+m^2} - m \right)}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2} = 2h \left(2\sqrt{1+m^2} - m \right) \quad (\text{IV-60})$$

Promień hydrauliczny wynosi zatem:

$$R = \frac{A}{U} = \frac{h^2 \left(2\sqrt{1+m^2} - m \right)}{2h \left(2\sqrt{1+m^2} - m \right)} = \frac{h}{2} \quad (\text{IV-61})$$

Podstawiając obliczone powyżej wielkości do wzoru (II-52) otrzymujemy:

$$Q = \frac{1}{n} \left(\frac{h}{2} \right)^{2/3} I^{1/2} h^2 \left(2\sqrt{1+m^2} - m \right) \quad (\text{IV-62})$$

Podstawiając dane liczbowe i przekształcając powyższe równanie mamy:

$$h^{8/3} = \frac{Q \cdot n \cdot 2^{2/3}}{I^{1/2} \left(2\sqrt{1+m^2} - m \right)} = \frac{20 \cdot 0,03 \cdot 2^{2/3}}{0,002^{1/2} \left(2\sqrt{1+2^2} - 2 \right)} = 12,93 \text{ m}^{8/3}$$

Szukane wymiary najkorzystniejszego hydraulicznie koryta przy zadanym przepływie wynoszą:

$$\text{głębokość: } h = 2,61 \text{ m} \quad (\text{IV-63})$$

$$\text{pole powierzchni: } A = 2,61^2 \left(2\sqrt{1+2^2} - 2 \right) = 16,84 \text{ m}^2 \quad (\text{IV-64})$$

$$\text{szerokość dna koryta: } B = \frac{16,84}{2,61} - 2 \cdot 2,61 = 1,23 \text{ m} \quad (\text{IV-65})$$

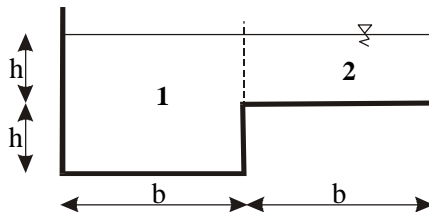
IV.1.5. Przepływ w korycie o złożonym przekroju poprzecznym

Obliczanie średniej prędkości przy użyciu wzoru Manninga jest prawidłowe tylko wtedy, gdy koryto jest zwarte. Jeżeli jednak w przekroju poprzecznym koryta zaobserwować można gwałtowne i istotne zmiany średniej prędkości (patrz rys. IV-10), pole przepływu należy podzielić na części odpowiadające definicji koryta zwartego. Całkowite natężenie przepływu oblicza się jako sumę natężeń przepływów każdej części koryta (przyjmując szorstkość charakterystyczną dla danej części koryta).

PRZYKŁAD IV-7

Obliczyć wartość natężenia przepływu w korycie złożonym.

Dane: h, b, n
Szukane: Q



Rys. IV-10

Rozw.:

Ze wzoru Manninga należy obliczyć najpierw średnie prędkości w częściach 1 i 2 koryta mających charakter zwarty, a na ich podstawie natężenia przepływu:

$$Q_1 = \frac{1}{n} R_1^{2/3} I^{1/2} A_1 = \frac{1}{n} \frac{(bh)^{5/3}}{(h+b)^{2/3}} I^{1/2} \quad (\text{IV-66})$$

$$Q_2 = \frac{1}{n} R_2^{2/3} I^{1/2} A_2 = \frac{1}{n} \frac{(2h \cdot b)^{5/3}}{(3h+b)^{2/3}} I^{1/2} \quad (\text{IV-67})$$

Całkowite natężenie przepływu w korycie jest równe sumie powyższych natężeń przepływów:

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (\text{IV-68})$$

PRZYKŁAD IV-8

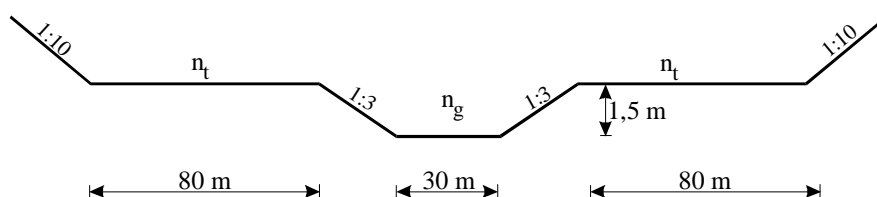
Dane jest koryto trapezowe, o geometrii podanej na rys. IV-11.

Wyznaczyć krzywą konsumcyjną dla tego koryta, traktowanego jako:

a) koryto zwarte (błędnie),

b) wielodzielne.

Dane: $n_g = 0,03$, $n_t = 0,08$, $S_0 = 0,01$



Rys. IV-11

Rozw.:

Niniejsze zadanie ma na celu pokazanie jaki błąd popełnia się, jeżeli koryta o kształcie złożonym nie podzieli się na części odpowiadające definicji koryta zwartego. W tabeli IV-1 zamieszczono wyniki obliczeń dla koryta traktowanego jako zwarte, w tabeli IV-2 zaś przedstawiono wyniki obliczeń dokonanych osobno dla koryta głównego i dwóch teras zalewowych.

Tabela IV-1

Parametry przepływu dla koryta potraktowanego jako zwarte
(rozwiązanie błędne !!!)

h [m]	n [$s \cdot m^{-1/3}$]	A [m^2]	U [m]	R [m]	n_{sr} [$s \cdot m^{-1/3}$]	Q [m^3/s]
0,00	0,03	0,000	0,000	0,000	0,030	0,00
0,30	0,03	9,270	31,897	0,291	0,030	13,56
0,60	0,03	19,080	33,795	0,565	0,030	43,45
0,90	0,03	29,430	35,692	0,825	0,030	86,26
1,20	0,03	40,320	37,589	1,073	0,030	140,83
1,50	0,03	51,750	39,487	1,311	0,030	206,58
1,60	0,08	71,750	201,497	0,356	0,070	51,35
1,90	0,08	132,950	207,527	0,641	0,070	140,17
2,20	0,08	195,950	213,557	0,918	0,071	261,50
2,50	0,08	260,750	219,587	1,187	0,071	411,77
2,80	0,08	327,350	225,617	1,451	0,071	588,84
3,10	0,08	395,750	231,646	1,708	0,071	791,26
3,40	0,08	465,950	237,676	1,960	0,072	1018,04
3,70	0,08	537,950	243,706	2,207	0,072	1268,44
4,00	0,08	611,750	249,736	2,450	0,072	1541,94
4,30	0,08	687,350	255,766	2,687	0,072	1838,14
4,60	0,08	764,750	261,796	2,921	0,072	2156,76
4,70	0,08	790,950	263,806	2,998	0,073	2267,91

5,00	0,08	870,750	269,836	3,227	0,073	2616,11
-------------	------	---------	---------	-------	-------	----------------

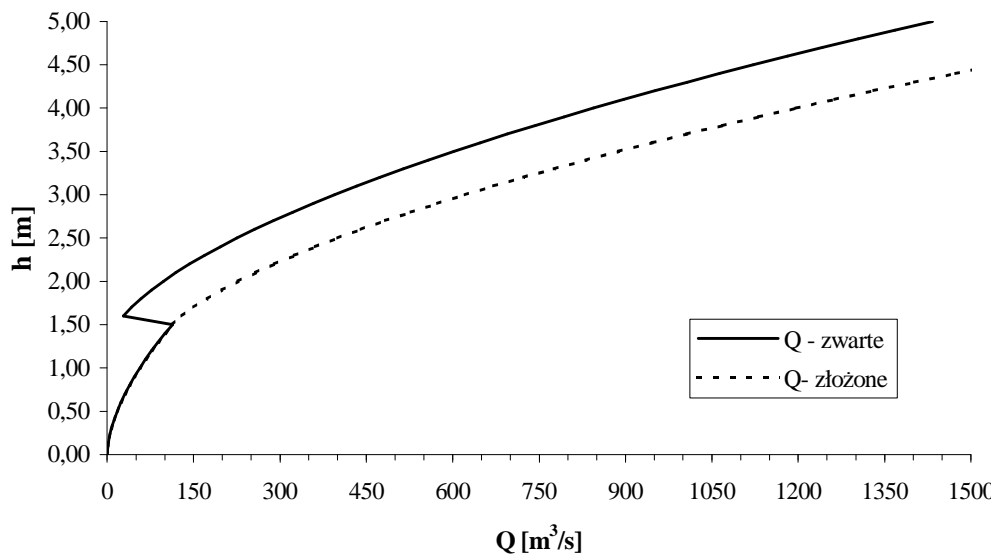
Tabela IV-2

Parametry przepływu dla koryta potraktowanego jako koryto złożone

KORYTO GŁÓWNE $n = 0,03$ [s·m ^{-1/3}]					TERASY $n = 0,08$ [s·m ^{-1/3}]					Q_K $+2Q_T$ [m ³ /s]
h [m]	A [m ²]	U [m]	R [m]	Q_K [m ³ /s]	h [m]	A [m ²]	U [m]	R [m]	Q_T [m ³ /s]	
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,3	9,27	31,90	0,29	13,56	0,3	0,00	0,00	0,00	0,00	13,56
0,6	19,08	33,79	0,56	43,45	0,6	0,00	0,00	0,00	0,00	43,45
0,9	29,43	35,69	0,82	86,26	0,9	0,00	0,00	0,00	0,00	86,26
1,2	40,32	37,59	1,07	140,83	1,2	0,00	0,00	0,00	0,00	140,83
1,5	51,75	39,49	1,31	206,58	1,5	0,00	0,00	0,00	0,00	206,58
1,6	55,65	39,49	1,41	233,18	1,6	8,05	81,00	0,10	2,16	237,49
1,9	67,35	39,49	1,71	320,48	1,9	32,80	84,02	0,39	21,90	364,28
2,2	79,05	39,49	2,00	418,55	2,2	58,45	87,03	0,67	56,03	530,61
2,5	90,75	39,49	2,30	526,81	2,5	85,00	90,05	0,94	102,24	731,29
2,8	102,45	39,49	2,59	644,81	2,8	112,45	93,06	1,21	159,46	963,73
3,1	114,15	39,49	2,89	772,15	3,1	140,80	96,08	1,47	227,07	1226,29
3,4	125,85	39,49	3,19	908,52	3,4	170,05	99,09	1,72	304,68	1517,87
3,7	137,55	39,49	3,48	1053,61	3,7	200,20	102,11	1,96	392,02	1837,64
4	149,25	39,49	3,78	1207,17	4	231,25	105,12	2,20	488,93	2185,02
4,3	160,95	39,49	4,08	1368,97	4,3	263,20	108,14	2,43	595,29	2559,56
4,6	172,65	39,49	4,37	1538,82	4,6	296,05	111,15	2,66	711,05	2960,92
4,7	176,55	39,49	4,47	1597,19	4,7	307,20	112,16	2,74	751,72	3100,62
5	188,25	39,49	4,77	1777,47	5	341,25	115,17	2,96	879,95	3537,38

Wyniki obliczeń przedstawiono rys. IV-12.

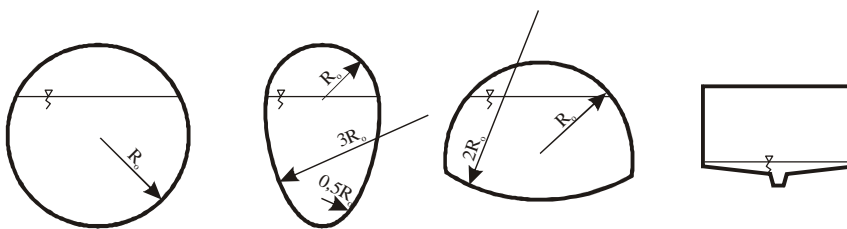
Krzywa konsumcyjna w przypadku koryta traktowanego jako zwarte wykazuje niefizyczny przebieg w miejscu, gdzie zmienia się nagle kształt koryta i woda wlewa się na terasy zalewowe. Nagle wzrasta tam obwód zwilżony, co powoduje spadek przepływu (co oznaczałoby, że mimo wzrostu głębokości maleje natężenie przepływu).



Rys. IV-12

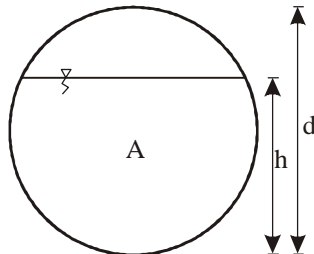
IV.1.6. Kolektory

Kolektory są to rurociągi niecałkowicie wypełnione cieczą (przepływ odbywa się w nich ze swobodnym zwierciadłem). Ich przekrój poprzeczny może mieć kształt kołowy, jajowy, prostokątny (rys. IV-13).



Rys. IV-13

W przypadku kolektorów wyznaczenie obwodu zwilżonego, czy pola przekroju byłoby kłopotliwe, dlatego opracowano metodę ułatwiającą obliczenia. W niniejszym skrypcie przedstawiono ją na przykładzie kolektorów kołowych.



Rys. IV-14

Oznaczenia:

- d – średnica kolektora kołowego,
- h – napełnienie kolektora,
- A – pole przekroju strumienia,
- S_0 – spadek kolektora,
- $a = h/d$ – stopień napełnienia,
- $K = \frac{A}{n} R^{2/3}$ – moduł przepływu,
- $W = \frac{1}{n} R^{2/3}$ – moduł prędkości,
- $f_1 = Q/Q_0$ – współczynnik sprawności przepływu,
- $f_2 = v/v_0$ – współczynnik sprawności prędkości.

Wielkości z indeksem „o” (np. v_0 , A_0 , Q_0) oznaczają wielkości obliczone dla przypadku, gdy kolektor jest całkowicie wypełniony cieczą.

Natężenie przepływu i prędkość w kolektorze zależą od jego napełnienia. Współczynniki sprawności są więc funkcjami napełnienia.

Wartości modułów przepływu i prędkości, a także współczynniki sprawności zależne od stopnia napełnienia kolektora można znaleźć w tablicach (w tablicach IV-3 i IV-4 zamieszczono wartości dla kolektorów kołowych).

Podobnie, jak w przypadku koryt otwartych, wyróżnia się następujące **typy zadań** dla kolektorów w zależności od poszukiwanego parametru:

- $Q = ?$ (dane: d, n, S_0, h)
- $S_0 = ?$ (dane: d, n, Q, h)
- $h = ?$ (dane: d, n, Q, S_0)

Tabela IV-3

Moduły przepływu K_o i prędkości W_o (wg wzoru Manninga)

z d [mm]	n = 0,011		n = 0,012		n = 0,013		n = 0,014	
	K_o [m ³ /s]	W_o [m/s]	K_o [m ³ /s]	W_o [m/s]	K_o [m ³ /s]	W_o [m/s]	K_o [m ³ /s]	W_o [m/s]
25	0,00151	3,08457	0,00139	2,82752	0,00128	2,61002	0,00119	2,42359
50	0,00961	4,89644	0,00881	4,48841	0,00813	4,14314	0,00755	3,84720
75	0,02833	6,41615	0,02597	5,88148	0,02397	5,42905	0,02226	5,04126
100	0,06102	7,77262	0,05593	7,12490	0,05163	6,57683	0,04794	6,10706
125	0,11063	9,01932	0,10141	8,26771	0,09361	7,63174	0,08692	7,08661
150	0,17989	10,18501	0,16490	9,33626	0,15222	8,61809	0,14134	8,00251
175	0,27136	11,28737	0,24874	10,34675	0,22961	9,55085	0,21321	8,86865
200	0,38742	12,33826	0,35514	11,31007	0,32782	10,44007	0,30440	9,69435
250	0,70244	14,31728	0,64390	13,12418	0,59437	12,11463	0,55192	11,24930
300	1,14225	16,16770	1,04706	14,82039	0,96652	13,68036	0,89748	12,70319
350	1,72300	17,91758	1,57942	16,42445	1,45792	15,16103	1,35379	14,07810
400	2,45997	19,58577	2,25497	17,95362	2,08152	16,57257	1,93284	15,38882
450	3,36773	21,18568	3,08708	19,42020	2,84962	17,92634	2,64607	16,64589
500	4,46023	22,72727	4,08854	20,83333	3,77404	19,23077	3,50446	17,85714
600	7,25282	25,66462	6,64842	23,52590	6,13700	21,71622	5,69865	20,16506
700	10,94036	28,44239	10,02867	26,07219	9,25723	24,06663	8,59600	22,34759
800	15,61985	31,09047	14,31820	28,49960	13,21680	26,30732	12,27274	24,42823
900	21,38374	33,63016	19,60176	30,82765	18,09393	28,45629	16,80151	26,42370
1000	28,32068	36,07730	25,96062	33,07086	23,96365	30,52694	22,25196	28,34645
1100	36,51608	38,44405	33,47307	35,24038	30,89822	32,52958	28,69120	30,20604
1200	46,05254	40,74004	42,21483	37,34504	38,96754	34,47234	36,18414	32,01003
1300	57,01020	42,97305	52,25935	39,39197	48,23940	36,36182	44,79373	33,76454
1400	69,46698	45,14947	63,67806	41,38702	58,77975	38,20340	54,58120	35,47459
1500	83,49882	47,27463	76,54058	43,33508	70,65285	40,00161	65,60622	37,14435

Tabela IV-4

Współczynniki sprawności f_1 i f_2 (wg wzoru Manninga)

h/d	$f_1 = Q/Q_0$	$f_2 = v/v_0$	h/d	$f_1 = Q/Q_0$	$f_2 = v/v_0$	h/d	$f_1 = Q/Q_0$	$f_2 = v/v_0$
0,05	0,0048	0,2569	0,40	0,3370	0,9022	0,75	0,9119	1,1335
0,10	0,0209	0,4012	0,45	0,4165	0,9544	0,80	0,9775	1,1397
0,15	0,0486	0,5168	0,50	0,5000	1,0000	0,85	1,0304	1,1374
0,20	0,0876	0,6151	0,55	0,5857	1,0393	0,90	1,0658	1,1243
0,25	0,1370	0,7007	0,60	0,6718	1,0724	0,95	1,0745	1,0950
0,30	0,1958	0,7761	0,65	0,7564	1,0993	1,00	1,0000	1,0000
0,35	0,2629	0,8430	0,70	0,8372	1,1198			

PRZYKŁAD IV-9 Obliczanie Q

Obliczyć prędkość i przepływ w kołowym kolektorze wykonanym z czystych rur kamionkowych.

Dane: $S_0 = 0,4 \text{ ‰}$, $d = 1 \text{ m}$, $h = 0,8 \text{ m}$, $n = 0,011$
Szukane: Q , v

Rozw.:

Obliczenie natężenia przepływu:

1. obliczenie stopnia napełnienia $a = h/d = 0,8/1 = 0,8$,
2. z tablicy IV-4 odczytujemy współczynnik sprawności $f_1 = 0,994$,
3. z tablicy IV-3 odczytujemy moduł $K_o = f(d,n) = 28,3 \text{ m}^3/\text{s}$,
4. $Q = f_1 \cdot K_o \sqrt{S_0} = 0,994 \cdot 28,3 \cdot \sqrt{0,0004} = 0,56 \text{ m}^3/\text{s}$.

Obliczenie prędkości:

1. z tablicy IV-4 odczytujemy współczynnik sprawności $f_2 = 1,159$,
2. z tablicy IV-3 odczytujemy W_o lub obliczamy $W_o = K_o/F_o = 36,1 \text{ m/s}$,
3. ze wzoru $v = f_2 \cdot W_o \cdot \sqrt{I} = 1,159 \cdot 36,1 \cdot \sqrt{0,0004} = 0,56 \text{ m/s}$.

PRZYKŁAD IV-10 Obliczanie S_0

Obliczyć spadek kołowego kolektora.

Dane: $d = 1 \text{ m}$, $h = 0,4 \text{ m}$, $Q = 0,8 \text{ m}^3/\text{s}$, $n = 0,012$
Szukane: S_0

Rozw.:

Dla stopnia napełnienia $a = h/d = 0,4/1 = 0,4$, z tabeli IV-4 odczytujemy współczynnik sprawności $f_1 = 0,332$, a z tabeli IV-3 odczytujemy wartość modułu przepływu $K_o = f(d,n) = 26 \text{ m}^3/\text{s}$. Stąd:

$$Q = f_1 \cdot K_o \sqrt{S_0} \Rightarrow S_0 = \left(\frac{Q}{f_1 \cdot K_o} \right)^2 \quad (\text{IV-69})$$

$$S_0 = \left(\frac{0,8}{0,332 \cdot 26} \right)^2 = 0,0086 = 8,6 \text{ ‰} \quad (\text{IV-70})$$

PRZYKŁAD IV-11 Obliczanie h

Obliczyć napełnienie kołowego kolektora

Dane: $S_0 = 11,5 \text{ ‰}$, $d = 60 \text{ cm}$, $Q = 150 \text{ l/s}$, $n = 0,013$
Szukane: h

Rozw.:

Z tabeli IV-3 odczytujemy $K_o = f(d, n) = 6,14 \text{ m}^3/\text{s}$.

$$Q = f_1 \cdot K_o \sqrt{S_0} \Rightarrow f_1 = \frac{Q}{K_o \sqrt{S_0}} = \frac{0,15}{6,14 \sqrt{0,115}} = 0,228 \quad (\text{IV-71})$$

Z tabeli IV-4 odczytujemy po interpolacji stopień napełnienia $a = 0,34$.

Stąd $h = a \cdot d = 0,34 \cdot 60 = 20,4 \text{ cm}$.

PRZYKŁAD IV-12

Obliczyć średnicę kołowego kolektora.

Dane: $I = 0,9 \text{ ‰}, h = 0,95 \text{ d}, Q = 0,55 \text{ m}^3/\text{s}, n = 0,014$
Szukane: d

Rozw.:

Interpolując odpowiednie wartości z tabeli IV-4 odczytujemy dla $a = 0,95, f_1 = 1,087$.

$$Q = f_1 \cdot K_o \sqrt{S_0} \Rightarrow K_o = \frac{Q}{f_1 \sqrt{S_0}} = \frac{0,55}{1,087 \sqrt{0,0009}} = 16,87 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{IV-72})$$

Z tabeli IV-3 dobieramy średnicę $d = 900 \text{ mm}$ (dla $K_o = f(d, n) = 16,87 \text{ m}^3/\text{s}$ i współczynnika szorstkości $n = 0,014$).

PRZYKŁAD IV-13

Zaprojektować odcinek betonowego kolektora o przekroju kołowym, odprowadzającego boczny odpływ burzowy z obszaru o powierzchni S . Spływ jednostkowy z tego terenu wynosi q , współczynnik szorstkości – n . Obliczyć prędkość cieczy w kolektorze.

Dane: $s = 100 \text{ ha}, q = 5 \text{ l/s} \cdot \text{ha}, a \leq 75 \text{ ‰}, S_0 = 3 \text{ ‰}$
Szukane: v

Rozw.:

$$Q = q \cdot s = 500 \text{ l/s} = 0,5 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{IV-73})$$

Dla stopnia napełnienia $a = h/d = 0,75$, z tabeli IV-4 odczytujemy $f_1 = 0,9119$.

$$Q = f_1 \cdot K_o \sqrt{S_0} \Rightarrow K_o = \frac{Q}{f_1 \sqrt{S_0}} = \frac{0,5}{0,9119 \sqrt{0,003}} = 10 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{IV-74})$$

Na podstawie tabeli IV-3 dobieramy dla $K_o = f(d, n) = 10 \text{ m}^3/\text{s}$ i współczynnika szorstkości $n = 0,012$, średnicę $d = 700 \text{ mm}$.

Dla tak przyjętej średnicy moduł przepływu $K_o = 10,946 \text{ m}^3/\text{s}$. Na tej podstawie obliczamy:

$$f_1 = \frac{Q}{K_o \cdot \sqrt{S_0}} = \frac{0,5}{10,946 \cdot \sqrt{0,003}} = 0,83 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{IV-75})$$

Interpolując odpowiednie wartości z tabeli IV-4 odczytujemy stopień napełnienia $a = 70$.

Stąd $h = a \cdot d = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49 \text{ m}$.

Szukana prędkość wynosi zatem (dla $f_2 = 1,12$, $W_o = K_o/F_o$):

$$v = B \cdot W_o \cdot \sqrt{I} = 1,12 \cdot 28,44 \cdot \sqrt{0,003} = 1,68 \text{ m/s} \quad (\text{IV-76})$$

IV.2. RUCH USTALONY WOLNOZMIENNY W KORYTACH OTWARTYCH. KRZYWA DEPRESJI I SPIĘTRZENIA

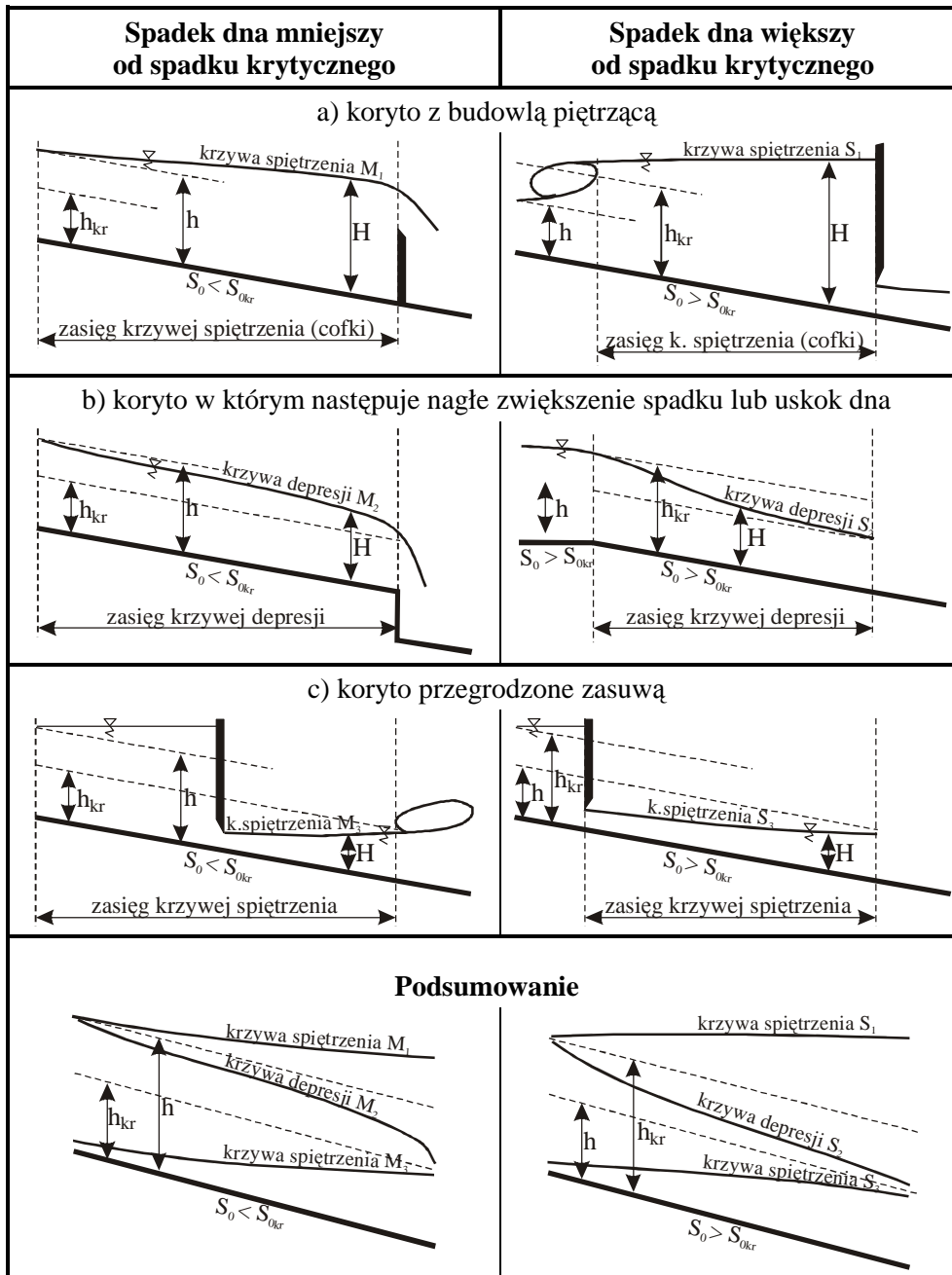
W przypadku, gdy woda w korycie otwartym płynie ruchem zmiennym ustalonym, jej głębokość zmienia się na długości cieku. W ruchu wolnozmiennym zwierciadło wody jest niezmiennie w czasie, ale nie jest równoległe do dna ani linii energii.

W zależności od układu zwierciadła w kierunku przepływu rozróżnić można:

- a. **krzywą spiętrzenia** charakteryzującą się wzrostem napełnienia koryta zgodnie z kierunkiem biegu wody (np. przed budowlami piętrzącymi, za zasuwą). Obszar na którym woda została spiętrzona nazywany jest **cofką**. **Zasięg cofki L** to odległość od miejsca, które jest przyczyną jej powstania do miejsca w którym wpływ spiętrzenia zanika.
- b. **krzywą depresji** charakteryzującą się obniżeniem się zwierciadła cieczy wraz z biegiem rzeki. **Zasięg depresji L** to odległość do miejsca w którym depresja nie daje się zauważyć.

Na rys. IV-15 przedstawiono układy zwierciadła wody, jakie powstają w korytach o spadku mniejszym i większym od spadku krytycznego.

Położenie zwierciadła wody w korycie oblicza się ze wzoru różnicowego, który wynika z równania Bernoulliego, zapisanego dla dwóch przekrojów koryta ograniczających odcinek na którym nie występują gwałtowne zmiany jego przekroju poprzecznego.



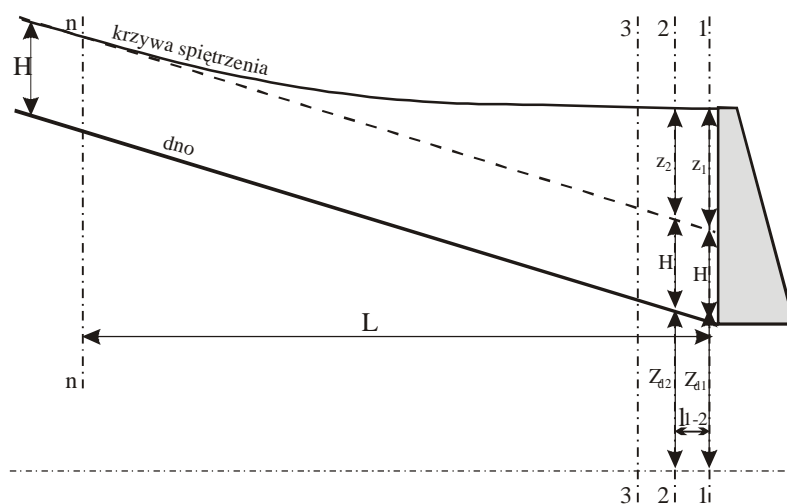
Rys. IV-15 Układy zwierciadła wody w korycie

Metoda określania układu zwierciadła wody w ruchu ustalonym wolnoziemnym, tzw. metoda od przekroju do przekroju

Metoda od przekroju do przekroju jest metodą pozwalającą na określenie układu zwierciadła w korycie o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego.

Metoda ta wykorzystuje prawo Bernoulliego dla strumienia wody w korycie otwartym. Dla przekrojów 1-1 i 2-2 (rys. IV-16) równanie to przybiera postać:

$$Z_{d2} + H + z_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g} = Z_{d1} + H + z_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} + h_{str} \quad (IV-77)$$



Rys. IV-16

Zwróćmy uwagę, że:

- głębokości w rozpatrywanych przekrojach wynoszą:

$$h_1 = z_1 + H; \quad h_2 = z_2 + H; \quad (IV-78)$$

- spadek dna na odcinku pomiędzy rozpatrywanymi przekrojami:

$$I_0 = \frac{Z_{d2} - Z_{d1}}{l_{1-2}} \quad (IV-79)$$

- średni spadek hydrauliczny (linii energii) pomiędzy przekrojami 1-1 i 2-2 wynosi:

$$I_f = \frac{h_{str}}{l_{1-2}} \quad (IV-80)$$

Zakładając, że na rozpatrywanym odcinku mamy do czynienia tylko ze stratami na długości, przyjmujemy, że spadek I_f jest średnią arytmetyczną ze spadków lokalnych w przekrojach 1-1 i 2-2. Wartości tych lokalnych spadków oblicza się wykorzystując formułę Manninga.

A zatem:

$$I_{f1} = \frac{n^2 v_1^2}{R_z^{4/3}}; I_{f2} = \frac{n^2 v_2^2}{R_2^{4/3}} \quad (\text{IV-81})$$

$$I_{fsr} = \frac{I_{f1} + I_{f2}}{2} \quad (\text{IV-82})$$

gdzie v_1 i v_2 są prędkościami z równania ciągłości:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1}; v_2 = \frac{Q}{A_2} \quad (\text{IV-83})$$

$$h_1 + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_{sr} \quad (\text{IV-84})$$

gdzie h_1 i h_2 są głębokościami wody w przekrojach 1-1 i 2-2 wynoszącymi:

Uwzględniając zależności: (IV-78 ÷ IV-82), równanie Bernoulliego można zapisać w postaci:

$$h_2 = h_1 + l_{1-2} (I_0 - I_f) + \frac{\alpha}{2g} (v_1^2 - v_2^2) \quad (\text{IV-85})$$

PRZYKŁAD IV-14

Kanał ziemny (o współczynniku szorstkości n) o przekroju trapezowym i spadku podłużnym dna I , prowadzi przepływ Q . Określić układ zwierciadła wody, jaki ustali się po wbudowaniu do koryta budowli piętrzącej wodę do wysokości Z .

$$\text{Dane:} \quad I = 0,0016, b = 6 \text{ m}, Q = 12 \text{ m}^3/\text{s}, n = 0,025, Z = 1,5 \text{ m}$$

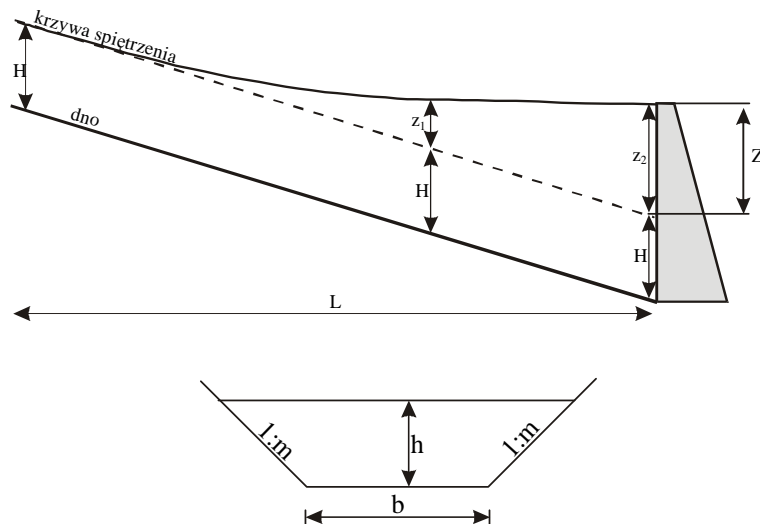
Rozw.:

Natężenie przepływu:

$$Q = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2} A \quad (\text{IV-86})$$

W przypadku koryta trapezowego: $A = bH + 2mH^2$, $U = b + 2H\sqrt{1+m^2}$, a zatem wydatek wynosi:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{(bH + 2mH^2)^{5/3}}{(b + 2H\sqrt{1+m^2})^{2/3}} I^{1/2} \quad (\text{IV-87})$$



Rys. IV-17

Po podstawieniu danych:

$$12 = \frac{1}{0,025} \frac{(6H + 2H^2)^{5/3}}{(6 + 2\sqrt{2}H)^{2/3}} 0,0016^{1/2} \quad (\text{IV-88})$$

Z równania (IV-72) wyliczyć można głębokość normalną metodą kolejnych przybliżeń. Głębokość H wynosi 1,14 m.

Wyznaczenie krzywej spiętrzenia odbywa się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wody. W przekroju budowli głębokość wynosi $h = H + Z = 1,14 + 1,5 = 2,64$ m.

Zakładamy, że w pierwszym przekroju powyżej zaporowego głębokość wynosi $h = 2,6$ m. Wyniki obliczeń parametrów przepływu w tym i dalszych [rzekrojach powyżej zaporę zestawiono w poniższych tabelach i przedstawiono na rys. IV-18.

Tabela IV-5

Obliczenia

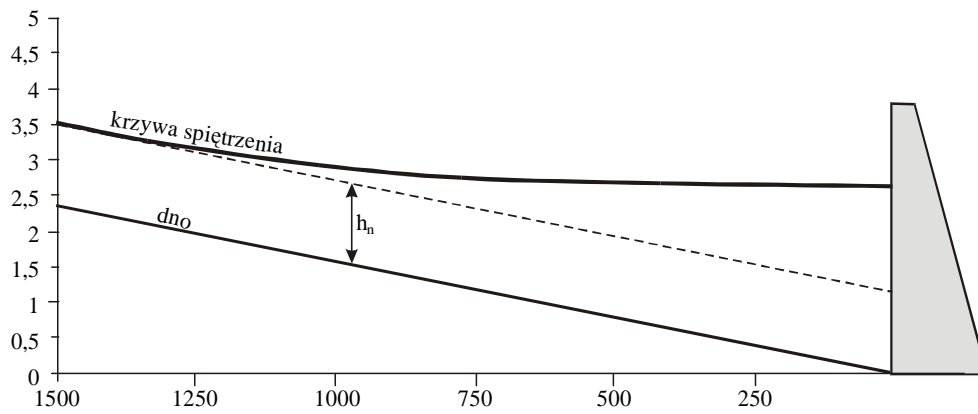
h [m]	A [m ²]	U [m]	R [m]	v [m/s]	I_f [-]	$I_{f\acute{s}r}$ [-]	ΔL [m]	$\Sigma \Delta L$ [m]
2,64	22,81	13,47	1,694	0,526	0,000086		0	0
						0,000088	26,04	26,04
2,6	22,36	13,35	1,674	0,537	0,000091			
						0,000097	65,40	91,44
2,5	21,25	13,07	1,626	0,565	0,000104			
						0,000112	65,89	157,33
2,4	20,16	12,79	1,576	0,595	0,000121			
						0,000131	66,50	223,83
2,3	19,09	12,51	1,527	0,629	0,000141			
						0,000153	67,25	291,08
2,2	18,04	12,22	1,476	0,665	0,000165			
						0,000179	68,21	359,29
2,1	17,01	11,94	1,425	0,705	0,000194			
						0,000212	69,44	428,73
2	16,00	11,66	1,373	0,750	0,000230			
						0,000253	71,06	499,79
1,9	15,01	11,37	1,320	0,799	0,000276			
						0,000305	73,25	573,04
1,8	14,04	11,09	1,266	0,855	0,000333			
						0,000370	76,30	649,34
1,7	13,09	10,81	1,211	0,917	0,000407			
						0,000454	80,76	730,10
1,6	12,16	10,53	1,155	0,987	0,000502			
						0,000565	87,72	817,83
1,5	11,25	10,24	1,098	1,067	0,000628			
						0,000712	99,69	917,52
1,4	10,36	9,96	1,040	1,158	0,000796			
						0,000911	124,14	1041,66
1,3	9,49	9,68	0,981	1,264	0,001026			
						0,001187	197,23	1238,89
1,2	8,64	9,39	0,920	1,389	0,001348			
						0,001453	263,54	1502,42
1,15	8,22	9,25	0,889	1,459	0,001558			

W poniższej tabeli zebrano wyniki obliczeń na podstawie których narysowano na rys. IV-6 krzywą spiętrzenia.

Tabela IV-6

Wyniki obliczeń

L [m]	h [m]	Z_{dna} [m]	Z [m]	L [m]	h [m]	Z_{dna} [m]	Z [m]
0	2,64	0	2,64	573,04	1,8	0,917	2,72
26,04	2,6	0,042	2,64	649,34	1,7	1,039	2,74
91,44	2,5	0,146	2,65	730,10	1,6	1,168	2,77
157,33	2,4	0,252	2,65	817,83	1,5	1,309	2,81
223,83	2,3	0,358	2,66	917,52	1,4	1,468	2,87
291,08	2,2	0,466	2,67	1041,66	1,3	1,667	2,97
359,29	2,1	0,575	2,67	1238,89	1,2	1,982	3,18
428,73	2	0,686	2,69	1502,42	1,15	2,404	3,55
499,79	1,9	0,800	2,70				



Rys. IV-18

V. RUCH WODY W GRUNCIE

I.1. WSTĘP

Grunty w naturze złożone są z różnej wielkości ziaren pomiędzy którymi znajdują się wolne przestrzenie, zwane porami, wypełnione powietrzem lub wodą.

Porowatość objętościowa n gruntu jest definiowana jako stosunek objętości porów V_p do objętości całkowitej badanej próbki gruntu:

$$n = V_p / V \quad (\text{V-1})$$

Przepływ wody Q w gruncie jest zazwyczaj przepływem laminarnym (**filtracja**), choć w grubych żwirach lub szczelinach skalistych może wystąpić ruch turbulentny (**fluacja**).

Prędkość filtracji v_f – zastępcza (fikcyjna) prędkość, z jaką poruszałaby się ciecz całym przekrojem warstwy filtracyjnej A , a nie tylko wolnymi przestrzeniami między ziarnami:

$$v_f = Q / A \quad (\text{V-2})$$

Rzeczywista prędkość filtracji v_r jest to średnia prędkość cieczy w porach ośrodka (A_p – powierzchnia przekroju porów):

$$v_r = Q / A_p \quad (\text{V-3})$$

V.1.1. Prawo Darcy'ego

Ruch wody w gruncie odbywa się dzięki stratom energii mechanicznej wydatkowanej na pokonanie oporów tarcia. Miarą tych strat jest spadek hydrauliczny określający wysokość strat hydraulicznych ΔH na odcinku L :

$$I = \frac{\Delta H}{L} \quad (\text{V-4})$$

Straty hydrauliczne w procesie filtracji są proporcjonalne do prędkości, co jest zgodne z laminarnym charakterem ruchu. Zależność ta nosi nazwę „prawa Darcy'ego”:

$$v = k \cdot J = k \cdot \frac{\Delta H}{L} \quad (\text{V-5})$$

gdzie: k – współczynnik filtracji,
 $J = \Delta H/L$ – spadek hydrauliczny,
 L – długość drogi filtracji,
 $\Delta H = H_1 - H_2$ – wysokość strat hydraulicznych na odcinku L .

Wzór jest prawdziwy w przypadku ruchu laminarnego, co oznacza ograniczenie liczby Reynoldsa dla przepływu gruntowego:

$$Re = \frac{v_r \cdot d_p}{\nu} = \frac{2 \cdot d_m \cdot v}{3 \cdot \nu \cdot (1-n)} \leq 10, \quad (\text{V-6})$$

gdzie: $d_p = \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot d_m$ – przeciętna średnica porów;
 d_m – miarodajna średnica ziarn gruntu sypkiego.
Niska wartość graniczna wynika ze skomplikowanej geometrii porów.

V.1.2. Współczynnik filtracji

Współczynnik filtracji jest to stała dla danego ośrodka, liczbowo równa wartości cieczy wartość ilorazu prędkości przepływu i spadku hydraulicznego:

$$k = \frac{v}{J}, \quad [k] = [v] = [\text{m s}^{-1}]. \quad (\text{V-3})$$

Współczynnik ten opisuje fizyczne własności ośrodka porowatego i filtrującej przezeń cieczy. Jego wartość zależy zatem od szeregu parametrów:

$$k_t = C_1 \cdot f(d_m, n, \nu, \gamma), \quad (\text{V-4})$$

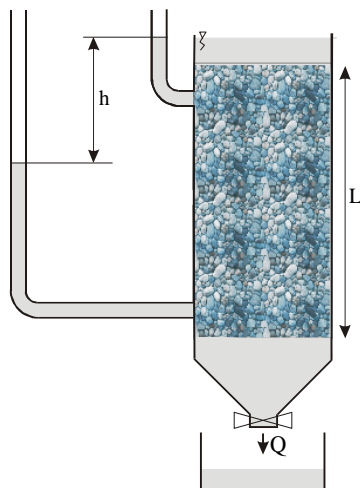
gdzie: k_t – współczynnik filtracji w temperaturze t ,
 C_1 – stała,
 d_m – średnica miarodajna ziarn warstwy filtracyjnej,
 n – porowatość warstwy,
 ν – kinematyczny współczynnik lepkości filtrującej cieczy,
 γ – ciężar właściwy cieczy.

V.2. OBLICZANIE WSPÓŁCZYNNIKA FILTRACJI

PRZYKŁAD V-1

Kolumna filtracyjna wypełniona została gruntem. Obliczyć współczynnik filtracji k tego gruntu, jeżeli przez warstwę gruntu o przekroju A przepływa woda o natężeniu Q (rys. V-1)

Dane: $L = 1 \text{ m}$, $h = 0,6 \text{ m}$, $A = 0,03 \text{ m}^2$, $Q = 0,02 \text{ l/s}$
Szukane: k



Rys. V-1

Rozw.:

Prędkość obliczyć można z równania ciągłości:

$$v = Q / A \quad (\text{V-7})$$

Na podstawie prawa Darcy'ego zapisać można:

$$k = \frac{v}{I} = \frac{v \cdot L}{h} \quad (\text{V-8})$$

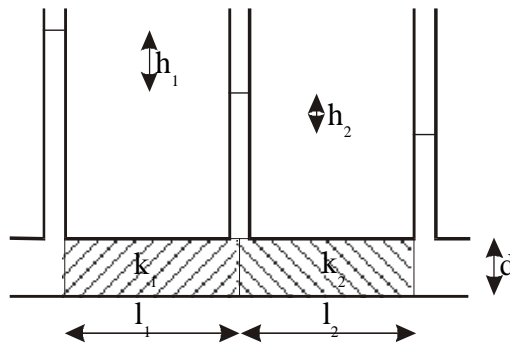
Po podstawieniu danych liczbowych szukany współczynnik filtracji wynosi:

$$k = \frac{v \cdot L}{h} = \frac{Q \cdot L}{A \cdot h} = \frac{0,02 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{0,03 \cdot 0,6} = 0,001 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{V-9})$$

PRZYKŁAD V-2

W poziomym przewodzie ułożono dwie różne próbki gruntu o współczynnikach filtracji k_1 i k_2 i długości l (rys. V-2). Różnice poziomów zwierciadeł wody w piezometrach wynoszą: h_1 i h_2 . Obliczyć współczynnik filtracji drugiej próbki.

Dane: $k_1 = 6 \cdot 10^{-4}$ m/s, $h_1 = 0,2$ m, $h_2 = 0,1$ m
Szukane: k_2



Rys. V-2

Rozw.:

Z równania ciągłości: $v = Q / A \Rightarrow v = \text{const}$

Na podstawie prawa Darcy'ego wyliczyć można szukany współczynnik k_2 :

$$v = k_1 \frac{h_1}{L} = k_2 \frac{h_2}{L} \Rightarrow k_2 = k_1 \frac{h_1}{h_2} \quad (\text{V-10})$$

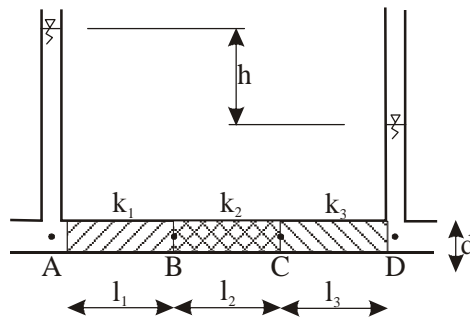
Po podstawieniu danych liczbowych obliczamy wartość współczynnika k_2 :

$$k_2 = 6 \cdot 10^{-4} \frac{0,2}{0,1} = 0,0012 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1,2 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \quad (\text{V-11})$$

PRZYKŁAD V-3

W poziomym przewodzie o przekroju kołowym i średnicy d , umieszczono trzy różne próbki gruntu o współczynnikach filtracji: k_1 , k_2 , k_3 o długościach odpowiednio: l_1 , l_2 , l_3 (rys. V-3). Obliczyć przepływ przez ten układ, gdy różnica poziomów zwierciadeł wody w piezometrach wynosi h .

Dane: $k_1 = 6 \cdot 10^{-3}$ m/s, $l_1 = 0,6$ m, $k_2 = 5 \cdot 10^{-4}$ m/s, $l_2 = 0,5$ m,
 $k_3 = 4 \cdot 10^{-5}$ m/s, $l_3 = 0,4$ m, $h = 1$ m, $d = 0,1$ m
Szukane: Q



Rys. V-3

Rozw.:

Różnica poziomu wody w piezometrach jest równa sumie strat hydraulicznych na odcinkach AB, BC i CD rurociągu (rys. V-3):

$$h = h_{AB} + h_{BC} + h_{CD} \quad (\text{V-12})$$

Na podstawie prawa Darcy'ego:

$$h_{AB} = \frac{v \cdot L}{k_1}; h_{BC} = \frac{v \cdot L}{k_2}; h_{CD} = \frac{v \cdot L}{k_3} \quad (\text{V-13})$$

Po podstawieniu (V-13) do równania (V-12) otrzymujemy:

$$h = \frac{v \cdot L}{k_1} + \frac{v \cdot L}{k_2} + \frac{v \cdot L}{k_3} \quad (\text{V-14})$$

a stąd prędkość:

$$v = \frac{H}{L} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \right)^{-1} \quad (\text{V-15})$$

Natężenie przepływu przez cały układ wynosi zatem:

$$Q = v \cdot a^2 = H \cdot \frac{\pi d^2}{4} \left(\frac{l_1}{k_1} + \frac{l_2}{k_2} + \frac{l_3}{k_3} \right)^{-1} \quad (\text{V-16})$$

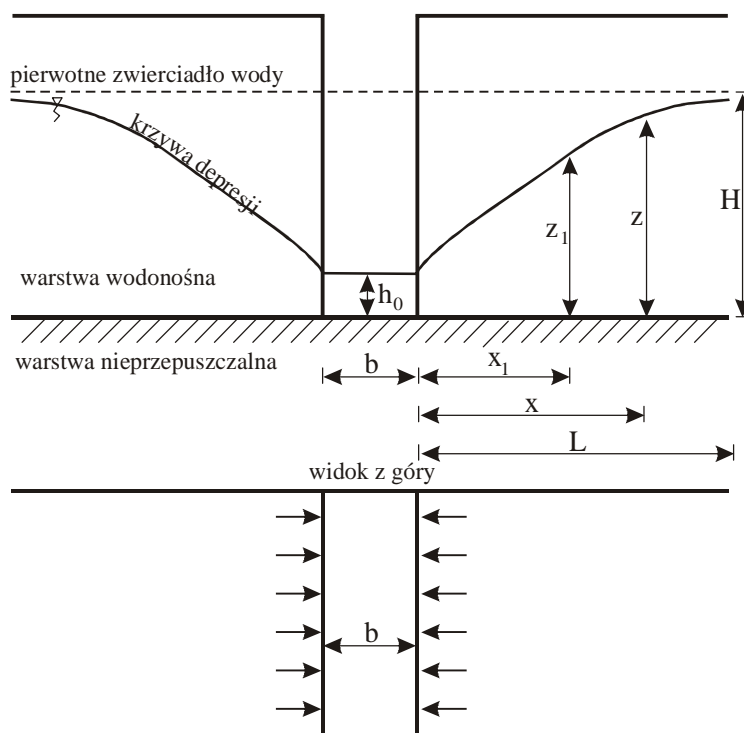
$$Q = 1 \cdot \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4} \left(\frac{0,6}{6 \cdot 10^{-3}} + \frac{0,5}{5 \cdot 10^{-4}} + \frac{0,4}{4 \cdot 10^{-5}} \right)^{-1} = \frac{\pi \cdot 0,1^2}{4(10^2 + 10^3 + 10^4)} \quad (\text{V-17})$$

$$Q = 7,07 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s} = 0,7 \text{ cm}^3/\text{s} \quad (\text{V-18})$$

V.3. DOPIŁYW DO ROWU I DRENU

a) rów przy poziomej warstwie nieprzepuszczalnej

Po wykopaniu rowu, którego dno sięga warstwy nieprzepuszczalnej, pierwotnie położone zwierciadło wody na wysokości H obniży się do wysokości h_0 . Powstała poziom wody gruntowej nazywa się krzywą depresji (jej rzędne maleją w kierunku przepływu). W warunkach ustalonego dopływu wody do rowu, przez każdy kolejny przekrój poprzeczny strumienia przepływa woda o tym samym natężeniu.



Rys. V-4 Rów

H – pierwotne położenie zwierciadła wody ponad warstwą nieprzepuszczalną,
 L – zasięg depresji, z – wzniesienie zwierciadła wody ponad warstwą nieprzepuszczalną w odległości x od rowu, h_0 – głębokość wody w rowie

Zgodnie z prawem Darcy'ego, średnia prędkość filtracji wody w przekroju położonym w odległości x od rowu wynosi:

$$v = kI = k \frac{dz}{dx} \quad (\text{V-19})$$

a stały dopływ jednostkowy (na jednostkę długości rowu) wynosi:

$$q = vz = kz \frac{dz}{dx} \Leftrightarrow z dz = \frac{q}{k} dx \quad (\text{V-20})$$

Całkując powyższe równanie w między przekrojami x i x_1 otrzymujemy:

$$\frac{z^2 - z_1^2}{2} = \frac{q}{k} (x - x_1) \quad (\text{V-21})$$

Po podstawieniu warunku początkowego ($x_1 = 0$, $z_1 = h_0$) otrzymuje się wzór określający krzywą depresji:

$$z^2 - h_0^2 = \frac{2q}{k} x \quad (\text{V-22})$$

albo po przekształceniu:

$$q = \frac{k}{2x} (z^2 - h_0^2) \quad [\text{m}^2/\text{s}] \quad (\text{V-23})$$

Zasięg depresji L odpowiada odległości przy maksymalnym położeniu zwierciadła wody. Aby go wyznaczyć, należy zatem do równania (V-23) podstawić warunek brzegowy ($x = L$, $z = H$), czyli:

$$L = \frac{k}{2q} (H^2 - h_0^2) \quad [\text{m}] \quad (\text{V-24})$$

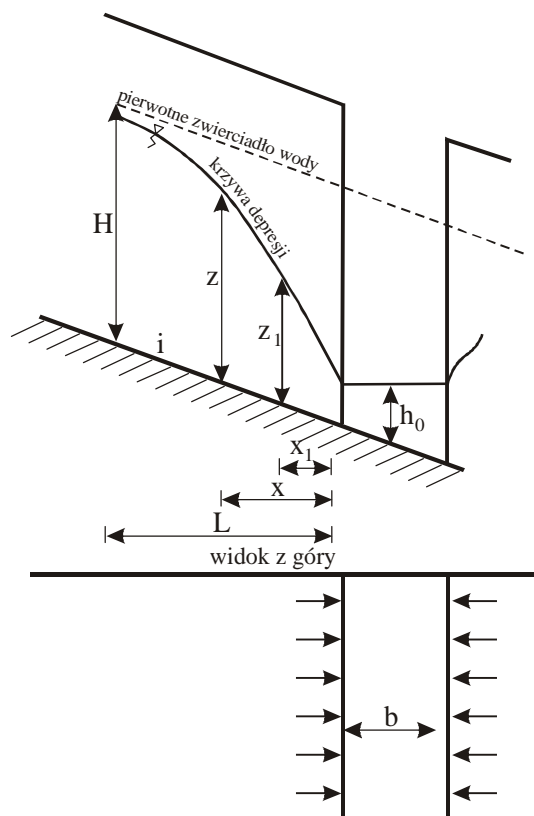
b) rów przy pochylej warstwie nieprzepuszczalnej

W obliczeniach przyjęto stały spadek i nachylenia warstwy nieprzepuszczalnej w kierunku prostopadłym do ściany rowu. Przepływ wody q w warstwie wodonośnej można określić dla pierwotnej głębokości H jako:

$$q = kiH \quad (\text{V-25})$$

Dopływająca do rowu woda, tworzy w jego pobliżu krzywą depresji. Spadek hydrauliczny jest tu zmienny i wynosi:

$$I = i + \frac{dz}{dx} \quad (\text{V-26})$$



Rys. V-5 Rów przy pochyłej warstwie nieprzepuszczalnej

H – pierwotne położenie zwierciadła wody ponad warstwą nieprzepuszczalną,
 L – zasięg depresji, z – wzniesienie zwierciadła wody ponad warstwą
nieprzepuszczalną w odległości x od rowu, h_0 – głębokość wody w rowie,
 i – spadek warstwy nieprzepuszczalnej.

Wydatek wody w obszarze depresji zapisać można zatem:

$$q = k \left(i + \frac{dz}{dx} \right) z = kiH \quad (V-27)$$

Rozdzielając zmienne otrzymamy:

$$i dx = \frac{z dz}{H - z} \quad (V-28)$$

Całkując powyższe równanie o zmiennych rozdzielonych pomiędzy przekrojami x i x_1 otrzymujemy równanie krzywej depresji postaci:

$$ix = h_0 - z + \frac{q}{ki} \ln \frac{q - kih_0}{q - kiz} \quad (\text{V-29})$$

Podstawiając (V-25) do (V-29) otrzymamy równanie krzywej ustalonego zwierciadła wody postaci:

$$ix = h_0 - z + H \ln \frac{H - h_0}{H - z} \quad (\text{V-30})$$

PRZYKŁAD V-4

Obliczyć natężenie przepływu w rowie ułożonym na poziomej warstwie nieprzepuszczalnej (rys. V-4) o długości L_r i przy stałym dopływie wody gruntowej z przyległego terenu. Średni spadek krzywej depresji wynosi I .

Dane: $L_r = 1000 \text{ m}, H = 1,5 \text{ m}, I = 0,025,$
 $h_0 = 0,25 \text{ m}, k = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$

Szukane: Q

Rozw.:

Zasięg krzywej depresji wynosi:

$$L = \frac{H - h_0}{I} = \frac{1,5 - 0,25}{0,025} = 50 \text{ m} \quad (\text{V-31})$$

Natężenie przepływu na 1 m skarpy rowu wyznaczyć można na podstawie (V-23):

$$q = \frac{k}{2L} (H^2 - h_0^2) = \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 50} (1,5^2 - 0,25^2) = 0,0000066 \text{ m}^2/\text{s} \quad (\text{V-32})$$

Całkowity (dwustronny) dopływ do rowu na całej jego długości wynosi:

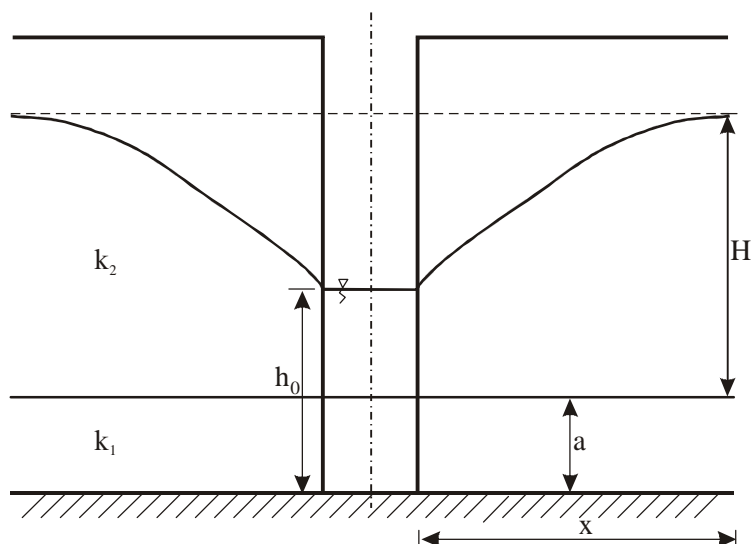
$$Q = 2qL_r = 2 \cdot 0,0000066 \cdot 1000 = 0,013 \text{ m}^3/\text{s} \approx 13 \text{ l/s} \quad (\text{V-33})$$

PRZYKŁAD V-5

Wyznaczyć położenie zwierciadła H w odległości x od rowu o długości L_r . Grunt składa się z dwóch warstw o współczynnikach filtracji k_1 i k_2 (rys. V-6). Miąższość dolnej warstwy wynosi m . Wydatek dopływającej do rowu wody wynosi Q , a wzniesienie zwierciadła wody w rowie ponad warstwą nieprzepuszczalną – h_0 .

Dane: $x = 8 \text{ m}, h_0 = 2 \text{ m}, L_r = 100 \text{ m}, Q = 55 \text{ l/s}, a = 1 \text{ m},$
 $k_1 = 10^{-4} \text{ m/s}, k_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s},$

Szukane: H



Rys. V-6

Rozw.:

Na podstawie wzoru (V-23) wyznaczyć można dopływ wody do rowu z dolnej warstwy gruntu q_1 i z górnej q_2 :

$$q_1 = -k_1 a \frac{dz_1}{dx}; \quad q_2 = -k_2 z_2 \frac{dz_2}{dx} \quad (V-34)$$

Całkowity wydatek jednostkowy jest równy sumie tych dopływów. Po rozdzieleniu zmiennych zapisać zatem można:

$$\mathbf{Błąd! Nie można tworzyć obiektów przez edycję kodów pól.} \quad (V-35)$$

Całkując powyższe równanie o zmiennych rozdzielonych otrzymujemy:

$$q \int_0^l dx = -k_1 a \int_{a+H}^{h_0} dz_1 - k_2 \int_H^{h_0-a} z_2 dz_2 \quad (V-36)$$

$$ql = k_1 a(a + H - h_0) + \frac{1}{2} k_2 (H^2 - (h_0 - a)^2) \quad (V-37)$$

Uzależniając natężenie jednostkowe q od danego natężenia Q otrzymujemy:

$$q = \frac{Q}{2L_r} \quad (V-38)$$

Po podstawieniu (V-38) do (V-37) i przekształceniu do postaci równania kwadratowego równanie przybiera postać:

$$k_2 H^2 + 2k_1 a H + 2k_1 a(a - h_0) - k_2 (h_0 - a)^2 - \frac{Qx}{L_r} \quad (\text{V-39})$$

a po podstawieniu danych liczbowych:

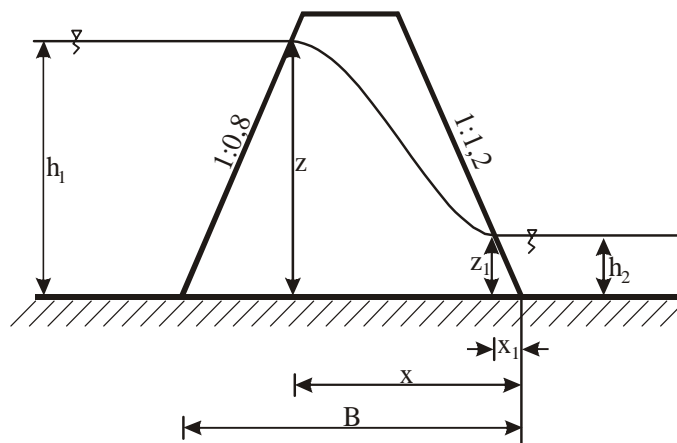
$$0,0005H^2 + 0,0002H - 0,0051 = 0 \quad (\text{V-40})$$

Wyliczona z powyższego równania głębokość H wynosi 3 m.

PRZYKŁAD V-6

Przez ziemną groblę o współczynniku filtracji k przepływa woda ze zbiornika o głębokości h_1 do rzeki o głębokości h_2 . Obliczyć przepływ przez tę groblę, jeżeli jej długość wynosi L .

Dane: $h_1 = 10 \text{ m}$, $h_2 = 2 \text{ m}$, $L = 40 \text{ m}$, $B = 20 \text{ m}$, $k = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$
Szukane: Q



Rys. V-7

Rozw.:

W celu obliczenia natężenia przepływu, zastosujemy wzór na dopływ do rowu:

$$0,5 \cdot (z^2 - z_1^2) = \frac{q}{k} (x - x_1) \quad (\text{V-41})$$

Podstawiając: $z = h_1 = 10,0$, $z_1 = h_2 = 2 \text{ m}$,
 $x = B - 0,8 \cdot h_1 = 12 \text{ m}$, $x_1 = 1,2 \cdot h_2 = 2,4 \text{ m}$,

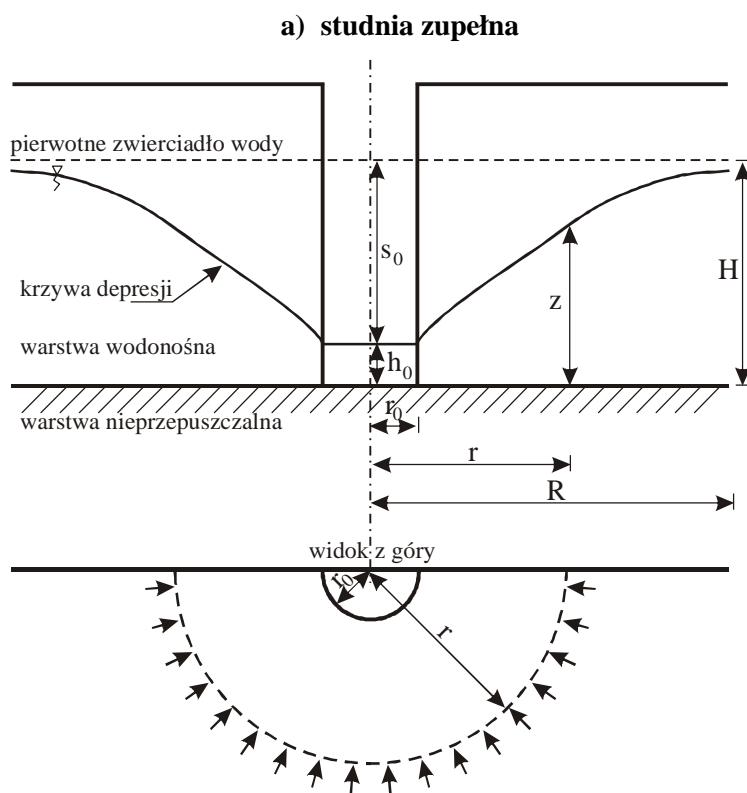
natężenie przepływu na 1 m skarpy wynosi:

$$q = \frac{k}{2} \frac{(z^2 - z_1^2)}{(x - x_1)} = \frac{5 \cdot 10^{-4}}{2} \frac{(10^2 - 2^2)}{(12 - 2,4)} = 0,0025 \text{ m}^2/\text{s} \quad (\text{V-42})$$

Całkowity przepływ przez groble:

$$Q = qL = 0,0025 \cdot 40 = 0,1 \text{ m}^3/\text{s} = 100 \text{ l/s} \quad (\text{V-43})$$

V.4. DOPŁYW DO STUDNI PRZY POZIOMEJ WARSTWIE NIEPRZEPUSZCZALNEJ



Rys. V-8 Studnia

r_0 – promień studni, H – położenie zw. wody ponad warstwą nieprzepuszczalną,
 L – zasięg depresji, h_0 – głębokość wody w rowie.

W wyniku ciągłego odprowadzania wody o natężeniu Q ze studni zupełnej (sięgającej poziomej warstwy nieprzepuszczalnej) o promieniu r_0 , jej poziom obniży się do wysokości h_0 , a na zewnątrz studni wytworzy się depresja zwierciadła wody gruntowej. Dopływ w taki przypadku do studni wynosi:

$$Q = 2\pi xzk \frac{dz}{dx} \quad (\text{V-44})$$

Po rozdzieleniu zmiennych otrzymamy różniczkowe równanie krzywej depresji:

$$zdz = \frac{Q}{2\pi k} \frac{dx}{x} \quad (\text{V-45})$$

które po scałkowaniu w granicach: r_0 do r oraz h_0 do z ma postać:

$$z^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_0} \quad (\text{V-46})$$

czyli po przekształceniu wzór opisujący krzywą depresji przyjmuje postać:

$$Q = \pi k \frac{z^2 - h_0^2}{\ln \frac{r}{r_0}} \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad (\text{V-47})$$

Zasięg depresji R , czyli odległość od studni przy której zwierciadło pozostanie niezmienione obliczyć można podstawiając do powyższego wzoru warunek brzegowy ($r = R, z = H$).

$$Q = \pi k \frac{H^2 - h_0^2}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (\text{V-48})$$

Zasięg ten wyliczyć można także ze wzoru Sichardta:

$$R = 3000 (H - h_0) \sqrt{k} \quad [\text{m}] \quad (\text{V-49})$$

Ze względów praktycznych często potrzebujemy wyznaczyć obniżenie zwierciadła wody s_0 jakie nastąpi przy poborze Q . Depresję tą obliczyć można ze wzoru:

$$Q = \pi k \frac{H^2 - (H - s_0)^2}{\ln \frac{R}{r_0}} \Rightarrow s_0 = H - \sqrt{H^2 - \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R}{r_0}} \quad [\text{m}] \quad (\text{V-50})$$

PRZYKŁAD V-7

Obliczyć wydajność studni zupełnej o promieniu r_0 sięgającej poziomej warstwy nieprzepuszczalnej (rys. V-8) w której poziom wody ustalił się na wysokości h_0 , a swobodne zwierciadło wody - na wysokości H ponad tą warstwą.

$$\begin{aligned} \text{Dane:} & \quad r_0 = 1 \text{ m}, H = 5,0 \text{ m}, h_0 = 3,0 \text{ m}, k = 1,16 \cdot 10^{-3} \text{ m/s} \\ \text{Szukane:} & \quad Q \end{aligned}$$

Rozw.:

Zasięg krzywej depresji wynosi na podstawie wzoru Sichardta (V-49):

$$R = 3000 (H - h_0) \sqrt{k} = 3000 (5 - 3) \sqrt{1,16 \cdot 10^{-3}} = 204,35 \text{ m} \quad (\text{V-51})$$

Natężenie przepływu obliczyć można z równania (V-48):

$$Q = \pi k \frac{H^2 - (H - h_0)^2}{\ln \frac{R}{r}} = 3,14 \cdot 1,16 \cdot 10^{-3} \frac{5^2 - (5 - 2)^2}{\ln \frac{204,35}{1}} = 0,014 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{V-52})$$

PRZYKŁAD V-8

Obliczyć współczynnik filtracji k gruntu w którym wykopano studnię o promieniu r_0 sięgającą poziomej warstwy nieprzepuszczalnej (rys. V-8), jeżeli wiadomo, że depresja w studni kontrolnej, odległej o r od osi studni wynosi s . Przy wydatku Q depresja w studni wynosi s_0 .

$$\begin{aligned} \text{Dane:} & \quad r_0 = 0,5 \text{ m}, H = 10 \text{ m}, r = 50 \text{ m}, s = 0,5 \text{ m}, \\ & \quad Q = 1 \text{ l/s}, s_0 = 2 \text{ m} \\ \text{Szukane:} & \quad k \end{aligned}$$

Rozw.:

Do wyznaczenia współczynnika filtracji wykorzystano równanie krzywej depresji (V-46) postaci:

$$z^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_0} \quad (\text{V-53})$$

Studnia kontrolna znajdująca się w punkcie o współrzędnych $(r, H - s)$, przy podstawieniu $h_0 = H - s_0$ powyższe równanie przyjmie postać:

$$(H - s)^2 - (H - s_0)^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_0} \quad (\text{V-54})$$

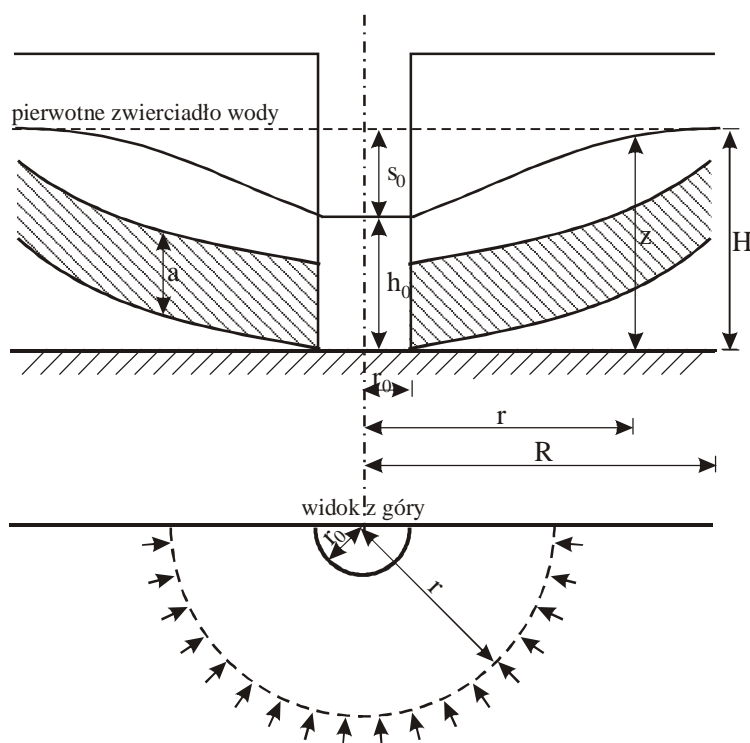
Przekształcając równanie (V-54) i podstawiając dane liczbowe otrzymujemy:

$$k = \frac{Q}{\pi((H-s)^2 - (H-s_0)^2)} \ln \frac{r}{r_0} = \frac{0,001}{\pi((10-0,5)^2 - (10-2)^2)} \ln \frac{50}{0,5} \quad (\text{V-55})$$

Szukany współczynnik filtracji wynosi $k = 5,6 \cdot 10^{-5}$ m/s.

V.5. STUDNIA ARTEZYJSKA

Studnia artezyjska to studnia sięgająca wody artezyjskiej (pod ciśnieniem), czyli wody gruntowej znajdującej się między warstwami nieprzepuszczalnymi (V-9).



Rys. V-9

Postępując jak w przypadku każdej studni zupełnej wyprowadzić można wzór na obliczenie wartości natężenia przepływu:

$$Q = \frac{2\pi ak}{R} (H - h_0) \ln \frac{R}{r_0} \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad (\text{V-56})$$

PRZYKŁAD V-9

Obliczyć miąższość a warstwy wodonośnej studni artezyjskiej (rys. V-9).

Dane: $r = 1,0$ m, $H = 10,0$ m, $h_0 = 5,0$ m, $Q = 0,11$ l/s,
 $k = 8 \cdot 10^{-6}$ m/s, $R = 100$ m,

Szukane: a

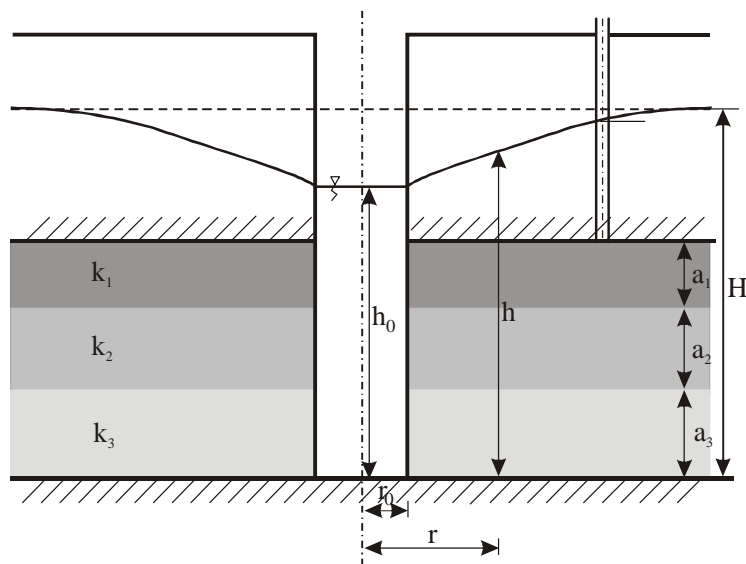
Rozw.:

Przekształcając wzoru na wydatek studni artezyjskiej (V-56) obliczyć można szukaną miąższość warstwy wodonośnej a .

$$a = \frac{Q \ln \frac{R}{r_0}}{2\pi(H - h_0)} = \frac{0,11 \cdot \ln \frac{100}{1}}{2 \cdot 3,14 \cdot (10 - 5)} = 2 \text{ m} \quad (\text{V-57})$$

PRZYKŁAD V-10

Studnia artezyjska o promieniu r_0 została wywiercona aż do warstwy nieprzepuszczalnej (rys. V-10). Warstwa wodonośna składa się z trzech pokładów różnych gruntów o współczynnikach filtracji k_1 , k_2 i k_3 i miąższościach a_1 , a_2 i a_3 . Obliczyć wydatek tej studni, jeżeli w odległości r od jej środka linia ciśnień piezometrycznych ułożyła się na wysokości h .



Rys. V-10

Dane: $r_0 = 0,5 \text{ m}$, $h_0 = 10 \text{ m}$, $r = 75 \text{ m}$, $h = 17,5 \text{ m}$
 $k_1 = 10^{-3} \text{ m/s}$, $k_2 = 10^{-4} \text{ m/s}$, $k_3 = 10^{-5} \text{ m/s}$,
 $a_1 = 3 \text{ m}$, $a_2 = 4 \text{ m}$, $a_3 = 5 \text{ m}$,
Szukane: Q

Rozw.:

Na podstawie wzoru (V-56) natężenie przepływu Q wynosi:

$$h - h_0 = \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{r}{r_0} \Leftrightarrow Q = \frac{2\pi ak(h - h_0)}{\ln \frac{r}{r_0}} \quad (\text{V-58})$$

Całkowita miąższość warstwy wodonosnej jest sumą wysokości wszystkich trzech pokładów gruntu i wynosi:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 = 3 + 4 + 5 = 12 \text{ m} \quad (\text{V-59})$$

Ponieważ poszczególne pokłady mają różne współczynniki filtracji, należy policzyć średnią ważoną wartość tego współczynnika:

$$k = \frac{\sum k_i a_i}{\sum a_i} = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3}{a_1 + a_2 + a_3} \quad (\text{V-60})$$

$$k = \frac{10^{-3} \cdot 3 + 10^{-4} \cdot 4 + 10^{-5} \cdot 5}{12} = 0,000288 \text{ m/s} \quad (\text{V-61})$$

Po podstawieniu wartości liczbowych do równania (V-58) obliczyć można zatem:

$$Q = \frac{2\pi ak(h - h_0)}{\ln \frac{r}{r_0}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 12 \cdot 0,000288(17,5 - 10)}{\ln \frac{75}{0,5}} = 0,3 \text{ m}^3/\text{s} \quad (\text{V-62})$$

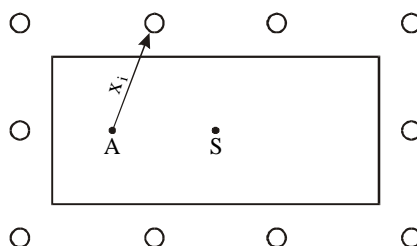
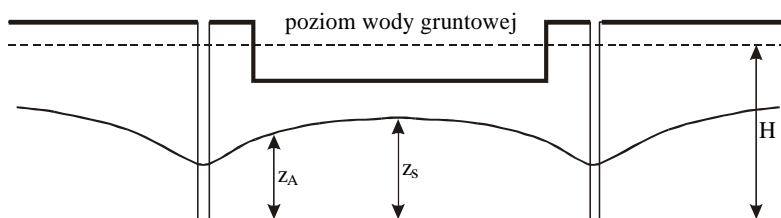
V.6. DZIAŁANIE GRUPY STUDNI

Aby dokonać odwodnienia jakiegoś obszaru, często stosuje się projektowanie na tym terenie szeregu studzien, z których jednocześnie odpompowuje się wodę. Wytwarzają one wspólnie obszar depresji i nie dopuszczają wody do jego wnętrza.

Wydajność grupy studni:

$$Q_0 = \frac{\pi k (H^2 - z_A^2)}{\ln R - \frac{\ln(x_1 x_2 x_3 \dots)}{n}} \quad [\text{m}^3 / \text{s}] \quad (\text{V-63})$$

- gdzie: z_A – rzędne zwierciadła wody w dowolnym punkcie A,
 H – grubość warstwy wodonośnej poza zasięgiem działania studzien,
 n – liczba studzien,
 x_i – odległość poszczególnych studni od punktu A,
 R – promień depresji (ze wzoru Kusakina: $R = 575 (H - z_s) \sqrt{Hk}$ [m]),
 z_s – wzniesienie zwierciadła wody gruntowej w środku ciężkości zespołu studzien.



Rys. V-11

PRZYKŁAD V-11

Dane: $H = 10,0$ m, $z_A = 4$ m, $H - z_S = 4$ m, $k = 1,1 \cdot 10^{-2}$ m/s,
 $x_2 = x_6 = 12$ m, $x_4 = x_8 = 8$ m, $x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = 15$ m,
Szukane: Q – wydajność pojedynczej studni.

Rozw.:

Zasięg krzywej depresji:

$$R = 575(H - z_s)\sqrt{Hk} = 575 \cdot 4 \cdot \sqrt{10 \cdot 1,1 \cdot 10^{-2}} = 762,8 \text{ m} \quad (\text{V-64})$$

Natężenie przepływu:

$$Q_0 = \frac{\pi k (H^2 - z_A^2)}{\ln R - \frac{\ln(x_1 x_2 x_3 \dots)}{n}} = \frac{3,14 \cdot 1,1 \cdot 10^{-2} (10^2 - 4^2)}{\ln 762,8 - \frac{\ln(15^4 \cdot 8^2 \cdot 12^2)}{8}} = 0,7 \text{ m}^3 / \text{s} \quad (\text{V-65})$$

Wydajność pojedynczej studni wynosi zatem:

$$Q = \frac{Q_0}{n} = \frac{0,7}{8} = 0,875 \text{ m}^3 / \text{s} \quad (\text{V-66})$$

ZAŁĄCZNIK

1. Podstawowe jednostki w układzie SI

Jednostki podstawowe to:

- długość [m],
- masa [kg],
- czas [s],
- natężenie prądu [A],
- temperatura [K],
- ilość substancji [mol],
- światłość źródła światła [kandela].

Jednostki geometryczne:

- długość L [m],
- powierzchnia A [m²],
- objętość V [m³],
- kąt płaski [rad].

Jednostki kinematyczne:

- czas t [s],
- prędkość $v = L / t$ [m / s],
- prędkość kątowna ω [rad / s],
- przyspieszenie $a = v / t$ [m/s],
- przyspieszenie kątowne $a = d\omega / dt$ [rad / s²]

Jednostki dynamiczne:

- gęstość $\rho = m / V$ [kg / m³],
- siła $F = m \cdot a$ [kg · m/s² = N],
- ciężar $G = m \cdot g$ [N],
- ciężar właściwy $\gamma = G / V$ [N / m³], $G / V = m \cdot g / V = \rho \cdot g$
- ciśnienie $p = F / A$ [N / m² = Pa],
- moment siły $M = F \cdot r$ [N · m], r - ramię działania siły,
- parcie $P = p \cdot A$ [Pa · m² = N],
- przepływ Q [m³/s].

Jednostki energetyczne:

- praca $L = F \cdot l$ [N·m = kg·m/s² · m = kg·m²/s² = J],
- moc $N = F \cdot v = L / t$ [J/s = kg·m²/s³ = W],
- pęd $u = m \cdot v$ [kg m/s].

2. Wartości stałych fizycznych

Ciężar masy:

$$1\text{kG} \cong 9.81\text{ N}$$

Ciężar właściwy wody:

$$\gamma_w = \rho_w \cdot g = 1\text{ kg/m}^3 \cdot 9.81\text{ m/s}^2 = 9810\text{ N/m}^3 = 9.81\text{ kN/m}^3$$

Ciśnienie atmosferyczne

$$1\text{ atm} = 113.25\text{ hPa} = 101\,325\text{ N/m}^2 \cong 0.1\text{ MPa}$$

Wysokość ciśnienia atmosferycznego

$$p_0 / \rho_w = 101\,325\text{ N/m}^2 / 9810\text{ N/m}^3 = 10.329\text{ m} \cong 10\text{ m}$$

$$p_0 / \rho_{Hg} = 101\,325\text{ N/m}^2 / 133\,400\text{ N/m}^3 = 0.7596\text{ m} \cong 760\text{ mm},$$

3. Najczęściej używane przedrostki

przedrostek	skrót	10^n	przedrostek	skrót	10^n
mikro	μ	10^{-6}	hekto	h	$10^2 = 100$
mili	m	10^{-3}	kilo	k	10^3
centy	c	10^{-2}	mega	M	10^6
decy	d	10^{-1}	giga	G	10^9
deka	da	10			

4. Ćwiczenia w przeliczaniu jednostek

Przeliczanie wielokrotności:

- $1\text{ mm}^2 = 1\text{ (}10^{-3}\text{ m)}^2 = 1 \cdot 10^{-6}\text{ m}^2$
- $1\text{ liter} = 1\text{ dm}^3 = 1\text{ (}10^{-1}\text{ m)}^3 = 10^{-3}\text{ m}^3 = 0.001\text{ m}^3$
- $1\text{ rad/s} = 1/(2\pi)\text{ obrotów / s} = 0.16\text{ Hz}$
- $1\text{ km/h} = 1\text{ }10^3\text{ m} / 3600\text{ s} = 0,28\text{ m / s}$

Obliczanie siły z II prawa Newtona (dane: $m = 10\text{ kg}$, $a = 1\text{ m/s}^2$):

$$F = m \cdot a = 10\text{ kg} \cdot 1\text{ m/s}^2 = 10\text{ N}$$

Obliczanie wydatku rurociągu (dane: $v = 1\text{ m/s}$, $d = 100\text{ mm}$):

$$Q = v \cdot A = v \cdot \pi d^2 / 4 = 1\text{ m/s} \cdot 3.14 \cdot (100\text{ mm})^2 / 4$$

$$Q = 7850 \cdot (10^{-3})^2\text{ m}^3/\text{s} = 7850 \cdot 10^{-6}\text{ m}^3/\text{s} = 0,00785\text{ m}^3/\text{s} = 7,85\text{ l/s}$$

Obliczanie ciśnienia z definicji (dane: $F = 9,81\text{ N}$, $A = 1\text{ mm}^2$)

$$p = F / A = 9,81\text{ N} / 1\text{ mm}^2$$

$$F = 9,81\text{ N} \cdot (10^{-3})^2 / \text{m}^2 = 9,81 \cdot 10^{-6}\text{ N/m}^2 = 9,81\text{ MPa}$$

Obliczanie gęstości z definicji (dane: $m = 1\text{ kg}$, $V = 1\text{ liter}$)

$$\rho = m / V = 1\text{ kg} / 1\text{ l} = 10^3\text{ g} / (10\text{ cm})^3 = 1\text{ g/cm}^3$$

LITERATURA

- [1] Baran–Gurgul K. (red.), *Ćwiczenia laboratoryjne z hydrauliki*, Wydawnictwo PK, Kraków 2002.
- [2] Czetwertyński E., Utrysko B., *Hydraulika i hydromechanika*, PWN, 1969.
- [3] Jarosz A., *Hydraulika*, Hortpress Sp. z o.o., Warszawa 1996.
- [4] Gręplowska Z., *Zbiór zadań z przepływów pod ciśnieniem*, Wydawnictwo PK, Kraków 1993.
- [5] Gręplowska Z., *Wypływ przez otwory*, Maszynopis.
- [6] Gryboś R., *Zbiór zadań z technicznej mechaniki płynów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002.
- [7] Jaworowska B., Szuster A., Utrysko B., *Hydraulika i hydrologia*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1998.
- [8] Kisiel A. (red.), *Poradnik hydromechanika i hydrotechnika*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2003.
- [9] Książczyński K. W., *Hydraulika – zestawienie pojęć i wzorów stosowanych w budownictwie*, Wydawnictwo PK, Kraków 2000.
- [10] Książczyński K. W., Jeż P., Gręplowska Z., *Tablice do obliczeń hydraulicznych*, Wydawnictwo PK, Kraków 2000.
- [11] Kubrak E., Kubrak J., *Hydraulika techniczna – przykłady obliczeń*, Wydawnictwo SGGW, Warszawa 2004.
- [12] Kubrak J., *Hydraulika techniczna*, Wydawnictwo SGGW, Warszawa 1998.
- [13] Podniewski A. (red.), *Zbiór zadań z hydrauliki*, PWN, Łódź, Warszawa 1958.
- [14] Prystaj A., *Zadania z hydrostatyki*, Wydawnictwo PK, Kraków 1999.
- [15] Rogala R., Machajski J., Rędownicz W., *Hydraulika stosowana. Przykłady obliczeń*, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1991.
- [16] Sobota J., *Hydraulika i mechanika płynów*, Wydawnictwo AR, Wrocław 2003.
- [17] Szuster A., *Zbiór zadań z hydrauliki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1978.
- [18] Szuster A., Utrysko B., *Hydraulika i podstawy hydromechaniki*, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1992.