

ADAM POLAK, SELIM OLEKSOWICZ*

O MOŻLIWOŚCI MODELOWANIA ZJAWISKA TARCIA
ZA POMOCĄ TOPOLOGII MATEMATYCZNEJ
ORAZ TEORII CHAOSU

ABOUT THE POSSIBILITY OF MODELING FRICTION
USING MATHEMATICAL TOPOLOGY
AND CHAOS THEORY

Streszczenie

Tradycyjne aparaty matematyczne nie stwarzają dostatecznej możliwości modelowania procesu tarcia. Z technicznego punktu widzenia atrakcyjnym rozwiązaniem jest zastosowanie aparatów matematycznych z pogranicza topologii oraz teorii chaosu. W niniejszym artykule przedstawiono możliwość zastosowania wybranych zagadnień topologii matematycznej oraz teorii chaosu w procesie modelowania, diagnostyki oraz monitorowania węzła ciernego.

Słowa kluczowe: teoria chaosu, wykładnik Lyapunova, modelowanie tarcia

Abstract

Traditional mathematical approach does not create sufficient possibilities of modelling the friction process. From technical point of view applying mathematical apparatus derived from topological and chaos theories seems to be an attractive solution. This paper discusses a possibility of applying selected areas of mathematical topology and chaos theory to modelling, diagnostics and monitoring of friction couple.

Keywords: chaos theory, Lyapunov exponent, modeling of friction

* Dr hab. Adam Polak, mgr inż. Selim Oleksowicz, Instytut Pojazdów Samochodowych i Silników Spalinowych, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

Oznaczenia

a	–	zmiana odległości pomiędzy rozpatrywanymi orbitami
f_n	–	funkcja niezmiennicza
h	–	model odwzorowania
H	–	obraz zbioru V
M	–	odwzorowanie
M_h	–	model odwzorowania podkową Smale'a
n	–	iteracja
P	–	siła działająca na wkładkę cierną [N]
t	–	czas [s]
T	–	temperatura [°C]
V	–	zbiór niezmienniczy
X	–	zbiór bazowy
x_1, x_2, x_3	–	wielkości wejściowe w modelu zjawiska tarcia
y_1, y_2	–	wielkości wyjściowe w modelu zjawiska tarcia
λ	–	wykładnik Lyapunova
v	–	prędkość względna [m/s]
Λ	–	zbiór niezmienniczy

1. Wstęp

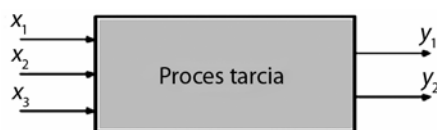
Badania eksperymentalne procesu tarcia wskazują na nieprzewidywalne, „chaotyczne” przebiegi wyników badań reprezentujących parametry opisujące współpracę węzła ciernego. Obserwacja ta jest szczególnie istotna w aspekcie jednego z dwóch podstawowych celów modelowania zjawisk, jakim jest funkcja prognostyczna. Drugim, niemniej ważnym dla rozwoju nauki celem jest wyjaśnienie fizyki zjawiska tarcia. Do tej pory zostało stworzonych ponad sto formuł matematycznych ujmujących w mniejszym lub większym stopniu udział zjawisk elementarnych w procesie tarcia [15]. Często przedstawione modele obejmują odrębne własności materiałów, takie jak uformowanie powierzchni, rodzaj sieci krystalicznej oraz jej defekty, oddziaływania międzycząsteczkowe itp. Analiza przedstawionych dotąd modeli opisujących proces tarcia jednoznacznie zwraca uwagę na brak modelu opisującego całościowo to zjawisko. Poszczególne modele zwracają uwagę na wybrane aspekty, mające bezpośredni lub pośredni wpływ na przebieg, charakterystykę oraz możliwość predykcji zjawiska tarcia. Dotychczasowe działania są zrozumiałe ze względu na ograniczoną możliwość obliczeniową i symulacyjną, jaką dysponowali naukowcy w przeszłości. Możliwości obliczeniowe, jakimi dysponujemy w obecnym czasie są zadowalające z punktu widzenia skomplikowanych modeli matematycznych. Jednak pojawiają się dwa osobliwe problemy, do tej pory niespotykane na podłożu trybologii. Pierwszym z nich jest problem z przetworzeniem informacji w czasie rzeczywistym rozpatrywania zjawiska. Drugi dotyczy matematycznych formuł opisujących zjawisko tarcia, które przyjmują postać równań różniczkowych, a charakteryzują się niestabilnością rozwiązania, co jest bezpośrednio związane z nieregularnością i nieprzewidywalnością. Trzeba wyraźnie odróżnić nieregularne i nieprzewidywalne w dłuższym czasie zachowania układów od zachowań całkowicie przypadkowych, których opisy podlegają jedynie prawom statystycznym.

Historia modelowania procesu tarcia sięga średniowiecza. Od tej pory wielu wybitnych naukowców starało się przedstawić model procesu tarcia pozwalający na interpretację istoty zjawiska oraz na możliwość predykcji stanu układu. Wraz z zaawansowaniem prac naukowo-badawczych na temat procesu tarcia odkryto dużą złożoność procesu. Podzieliło to prace badawcze, które od tego momentu zajmują się procesem tarcia w różnych aspektach, co utrudnia porównanie oraz wyciągnięcie wniosków z pokrewnych badań naukowych. Duża liczba powstałych modeli procesu tarcia przedstawia taką samą liczbę podejść naukowych do tego samego zjawiska. Przedstawione do tej pory opracowania naukowe na temat modelowania procesu tarcia wskazują jednoznacznie na dużą liczbę czynników wpływających na charakter zjawiska tarcia. Obserwacja ta jest szczególnie istotna z punktu widzenia możliwości kompleksowego opisu procesu tarcia. Jednak nie tylko sformułowanie ścisłego przepisu funkcji procesu tarcia stanowi problem, ale również jego interpretacja i możliwość wykorzystania. Obserwowany postęp w dziedzinie obliczeń numerycznych (oraz symbolicznych) pozwala sądzić, że problem ten może nas nie dotyczyć. Jednak należy zwrócić uwagę na niepokojące zjawisko, w równej mierze dotyczące prostych, jak i zaawansowanych opisów matematycznych, jakim jest chaos deterministyczny (ang. *deterministic chaos*). Istotnym przełomem we współczesnej matematyce było stwierdzenie, że układ deterministyczny może generować nieprzewidywalne, „chaotyczne” rozwiązania [6, 9].

Podejmując działania zmierzające do wyjaśnienia charakteru procesu tarcia, należy rozważyć alternatywne, nowatorskie metody opisu i interpretacji tego procesu.

2. Metoda opisu procesu tarcia

Proces tarcia jest złożony z wielu elementarnych zjawisk, procesów fizycznych, chemicznych oraz mechanicznych. Aby opisać całościowo proces tarcia, należy ująć wszystkie, również te dotąd nierozpoznane parametry procesu tarcia oraz przedstawić je w matematycznym zapisie. Przy obecnym stanie wiedzy jest to niemożliwe do wykonania i istnieją poważne obawy dotyczące możliwości wykonania kompleksowego modelu procesu tarcia. W tej sytuacji należy proces tarcia potraktować jako zamknięty obiekt badań typu „czarna skrzynka” (rys. 1), którym kierują pewne bliżej niesprecyzowane procesy elementarne wchodzące ze sobą w interakcje.



Rys. 1. Blokowy model procesu tarcia

Fig. 1. Block model of friction

Przedstawiona idea rozumowania jest podstawą teoretyczną nauki zwanej teorią eksperymentu (ang. *design of experiment*) [14]. Jednak aby przedstawiony opis nie tylko prezentował zależności aproksymowane pomiędzy wielkościami wejściowymi a wyjściowymi, należy dokonać przeskoku z rozważań ilościowych na rozważania jakościowe. W tym celu można sięgnąć po narzędzia z pogranicza teorii chaosu oraz topologii matematycznej.

2.1. Topologia matematyczna oraz teoria chaosu

Pojęcie dynamiki chaotycznej zostało wprowadzone pod koniec XIX wieku przez francuskiego matematyka Henri Poincare zajmującego się wyznaczeniem orbit ciał niebieskich. Poincare wykazał istnienie chaotycznych trajektorii ruchu obserwowanych ciał. W latach 60. ub. w. Edward Lorenz jako pierwszy stwierdził chaotyczne zachowanie prostego nieliniowego układu. Takie układy generujące skomplikowane oscylacje nazywamy układami chaotycznymi. Sklasyfikowanie układu jako chaotycznego pozwala na rozpatrywanie go w przestrzeni fazowej, w której można rozciągnąć dynamikę symboliczną (ang. *dynamic of symbolic*) pozwalającą na odszukanie topologicznych relacji kierujących rozpatrywanym zjawiskiem [2, 3, 8, 10].

Dowodzenie istnienia dynamiki chaotycznej jest obecnie dość złożonym procesem, który możemy przeprowadzić za pomocą takich kryteriów, jak [10, 6]:

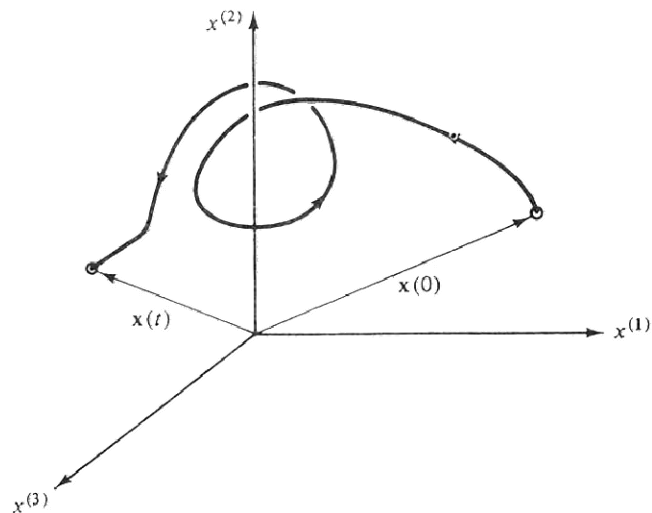
- dodatnia wartość wykładników Lyapunova,
- dodatnia entropia topologiczna,
- występowanie dziwnych atraktorów,
- topologiczna tranzytywność,
- topologiczne mieszanie,
- istnienie gęstej orbity (półorbity),
- istnienie orbit okresowych o wszystkich możliwych okresach minimalnych,
- wrażliwość na warunki początkowe,
- gęsty zbiór orbit okresowych.

Jedną z ważniejszych cech układów chaotycznych jest czułość na zmianę warunków początkowych, wyrażająca się istnieniem dodatniego wykładnika Lyapunova. Wszelkie układy dynamiczne rozpatrywane w tej konwencji są przedstawiane w przestrzeni fazowej (rys. 2) pozwalającej na wyrugowanie składowej czasu z danych w postaci szeregu czasowego (ang. *time delay*). Przestrzeń ta przedstawia wszystkie możliwe stany układu dynamicznego, może być dwu-, trzy- lub wielowymiarowa. Wykładnik Lyapunova przedstawia eksponentylną prędkość, z jaką zaburzenie początkowe zwiększa lub zmniejsza się w czasie (rys. 3). Przyjmując wykładniczy zapis ewolucji układu, otrzymujemy

$$x_n = x_0 e^{n \ln a}$$

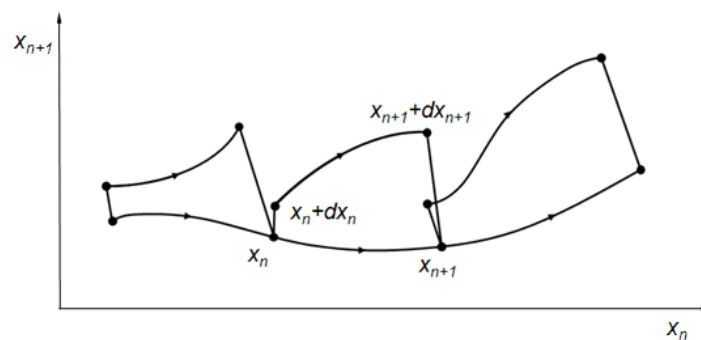
w którym $\ln a$ pokazuje zmianę odległości między punktami w jednym kroku iteracji. Wymiar ten jest nazywany wykładnikiem Lyapunova $\lambda = \ln a$. Zależnie od zachowania układu wykładnik Lyapunova może przyjmować wartości: $\lambda < 0$ – stan stały, $\lambda = 0$ – ruch okresowy, $\lambda > 0$ – układ chaotyczny.

Rozważania na temat wykładnika Lyapunova przeprowadza się w przestrzeni fazowej. Możliwość przedstawienia trajektorii punktu fazowego w przestrzeni fazowej dotyczy każdego układu, niezależnie od tego, jakimi cechami się on charakteryzuje. Niemniej jednak jest to podstawowe narzędzie pozwalające na obserwację oraz analizę trajektorii punktu fazowego.



Rys. 2. Trajektoria w trójwymiarowej przestrzeni fazowej [10]

Fig. 2. Trajectories in three-dimensional phase space



Rys. 3. Ewolucja orbit w przestrzeni fazowej

Fig. 3. Trajectories' evolution in phase space

Stwierdzenie występowania dodatniego wykładnika Lyapunova implementuje chaos w rozpatrywanym układzie. Oznacza to, że układ ten nie podlega prawom rozkładu probabilistycznego. Dla takiego układu jesteśmy w stanie przedstawić pewne zbiory niezmiennicze definiujące charakter oraz umożliwiające predykcję układu w pewnym czasie. Istotą tego działania jest odszukanie zbiorów niezmienniczych, których własności można przedstawić na podstawie „podkowy Smale’a”.

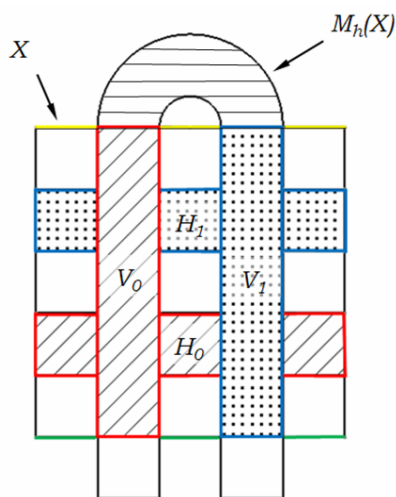
2.2. Konstrukcja odwzorowania podkową Smale’a

Kwadrat określony jako X (rys. 4) jest w pierwszej fazie rozciągany i jednocześnie ścisany. Kolejny powstały pasek zginamy w kształt podkowy, uwzględniając to, że wszystkie

odkształcenia zachodzą na obszarze zakreskowanym poziomymi liniami. Ostatni krok polega na umieszczeniu podkowy na tle oryginalnego kwadratu. Jak możemy zaobserwować na rysunku, pewna część powierzchni pierwotnego kwadratu X jest odwzorowana na obszarze poza kwadratem. Jeżeli warunki początkowe są rozłożone na kwadracie w sposób jednostajny w kierunku pionowym, to część zbioru warunków początkowych, które generują orbity, nie opuszczają kwadratu X po n -krotnym przekształceniu odwzorowaniem M_h , co jest równe f_n . Ta własność jest spowodowana tym, że rozkład jednostajny w kierunku pionowym w kwadracie X pozostaje jednostajny w kierunku pionowym po przekształceniu odwzorowaniem M_h . Ważną cechą odwzorowania podkową jest to, że

$$f_n \rightarrow 0, \text{ gdy } n \rightarrow \infty$$

co oznacza, że prawie wszystkie warunki początkowe względem miary Lebesgue'a opuszczają pierwotny kwadrat X . Kwadrat ten cechuje brak atraktora. Istotnym elementem tego zagadnienia jest tzw. zbiór niezmienniczy Λ punktów, które nigdy nie opuszczają kwadratu po przekształceniu odwzorowaniem M_h i odwzorowaniem M_{h-1} .



Rys. 4. Konstrukcja odwzorowania podkową Smale'a

Fig. 4. Construction of reproducing with Smale's mapping

Aby zbadać orbity, po których poruszają się punkty zbioru Λ , bierzemy pod uwagę, że przecięcie podkowy z kwadratem reprezentuje obszar tych punktów kwadratu po jednej iteracji odwzorowania. Obszary te zostały przedstawione na rys. 4 jako dwa pionowe paski oznaczone V_0 i V_1 . Należy wyjaśnić, że dwa pionowe paski V_0 i V_1 są obrazami dwóch poziomych pasków

$$H_0 = M_{h_1}(V_0); \quad H_1 = M_{h_1}(V_1)$$

Podobnie postępujemy w przypadku zastosowania kolejny raz odwzorowania podkową do pionowych pasków V_0 i V_1 . Otrzymamy wówczas przecięcia $M_h(V_0)$ i $M_h(V_1)$ z obszarem

X . Punkty pochodzące z kwadratu, które pozostają w kwadracie po dwóch iteracjach M_h , są odwzorowane na cztery paski $V_{00}, V_{01}, V_{10}, V_{11}$

$$H_{ij} = M_{h-2}(V_{ij})$$

Rozważmy zbiór niezmienniczy Λ oraz paski poziome i pionowe H_0, H_1, V_0, V_1 . Ponieważ punkty w zbiorze Λ nigdy nie opuszczają X , to półtrajektorie dodatnie punktów w zbiorze Λ muszą zawierać się w kwadracie. Zatem Λ jest zawarte w $H_0 \cup H_1$, a także w $V_0 \cup V_1$.

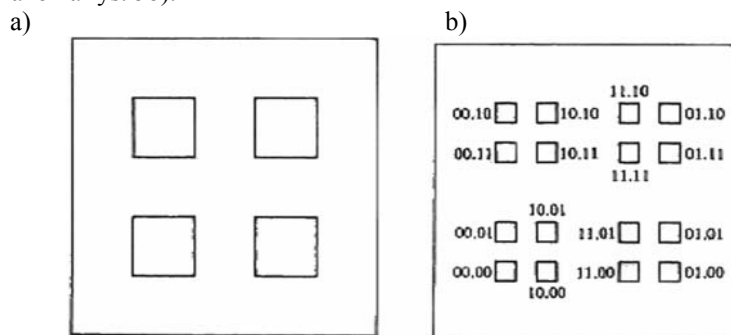
Więc Λ jest zawarte w przecięciu zbiorów

$$(H_0 \cup H_1) \cap (V_0 \cup V_1)$$

To przecięcie składa się z czterech kwadratów (rys. 5a)). Podobnie Λ musi też należeć do przecięcia

$$(H_{00} \cup H_{01} \cup H_{10} \cup H_{11}) \cap (V_{00} \cup V_{01} \cup V_{10} \cup V_{11})$$

co pokazano na rys. 5b).



Rys. 5. Rezultaty kolejnych etapów odwzorowania podkową Smale'a [10]

Fig. 5. Result of several following stages of reproducing with Smale's map

Przecięcie to składa się z 16 kwadratów, z których cztery są zawarte w każdym z czterech kwadratów na rysunku 5a). Metodologia ta prowadzi do powstania z każdego kwadratu kolejnych czterech mniejszych. Przechodząc do granicy przy powstawaniu tej konstrukcji, otrzymujemy zbiór niezmienniczy Λ nieskończoną liczbę razy. Ten zbiór jest przecięciem zbioru Carnota linii pionowych (pasków V w granicy dla nieskończonej liczby iteracji) ze zbiorem Carnota linii poziomych (pasków H w granicy dla nieskończonej liczby iteracji). Odpowiedniość między odwzorowaniem podkową a przesunięciem podwójnie nieskończonego ciągu symboli (reprezentowanego zbiorem Carnota) jest przykładem redukcji do dynamiki symbolicznej.

Odszukanie zbiorów niezmienniczych będących istotą przekształcenia podkową Smale'a jest pierwszym krokiem analizy dynamiki za pomocą teorii chaosu. Przedstawienie tych zbiorów jest możliwe za pomocą dynamiki symbolicznej pozwalającej na odszukanie, in-

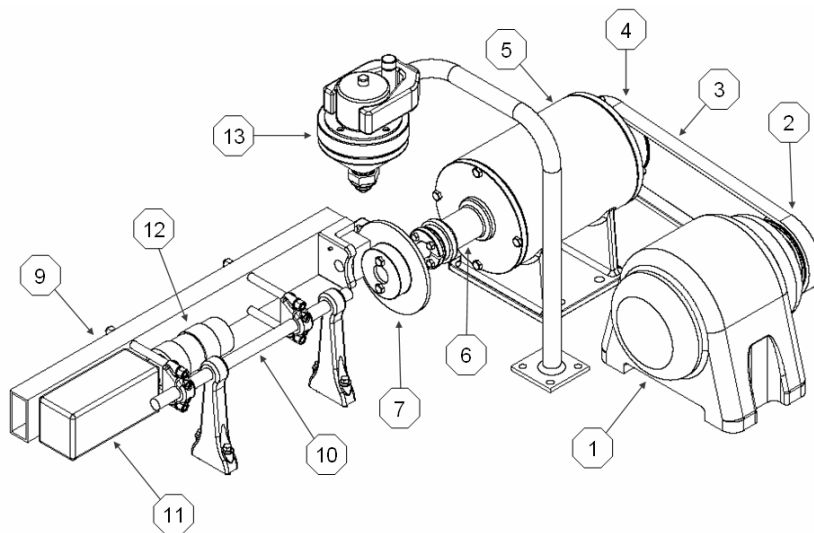
terpretację zbiorów niezmienniczych w przestrzeni fazowej oraz zapisanie relacji nakrywających [5]. Możliwość zastosowania dynamiki symbolicznej do opisu zjawisk fizycznych została przedstawiona w [7]. Autorzy zastosowali wspomnianą technikę do opisu ruchu magnetoelastycznej wstążki w zmiennym polu magnetycznym.

3. Stanowisko badawcze

Badania zostały przeprowadzone na stanowisku do modelowych badań hamulców tarczowych w obecności twardych cząstek ściernych [13]. Stanowisko zostało wyposażone w główne układy funkcyjne, takie jak:

- napęd tarczy hamulcowej pozwalający na płynną regulację prędkości obrotowej,
- układ hamulcowy z możliwością zadawania określonej siły hamującej,
- podajnik cząstek stałych umożliwiający regulację momentu oraz ilości podawanych cząstek.

Stanowisko zostało wyposażone w układy umożliwiające pomiar podstawowych parametrów tarcia: siły tarcia, temperatury, zużycia.



Rys. 6. Widok stanowiska badawczego: 1 – silnik elektryczny, 2 – koło pasowe, 3 – pasek napędowy, 4 – koło pasowe, 5 – obudowa wrzeciono, 6 – wrzeciono, 7 – tarcza hamulcowa, 8 – zacisk hydrauliczny, 9 – belka mocująca, 10 – pręt kalibrowany, 11 – kamera, 12 – obiektyw, 13 – głowica dozująca

Fig. 6. View of the test stand: 1 – electric motor, 2 – drive wheel, 3 – belt, 4 – driven wheel, 5 – housing of spindle, 6 – spindle, 7 – brake disk, 8 – calliper support, 9 – calliper guidance system, 10 – calibrated rod, 11 – camera, 12 – lenses, 13 – feeder of hard abrasive particles

4. Wyniki badań

4.1. Tradycyjna analiza danych

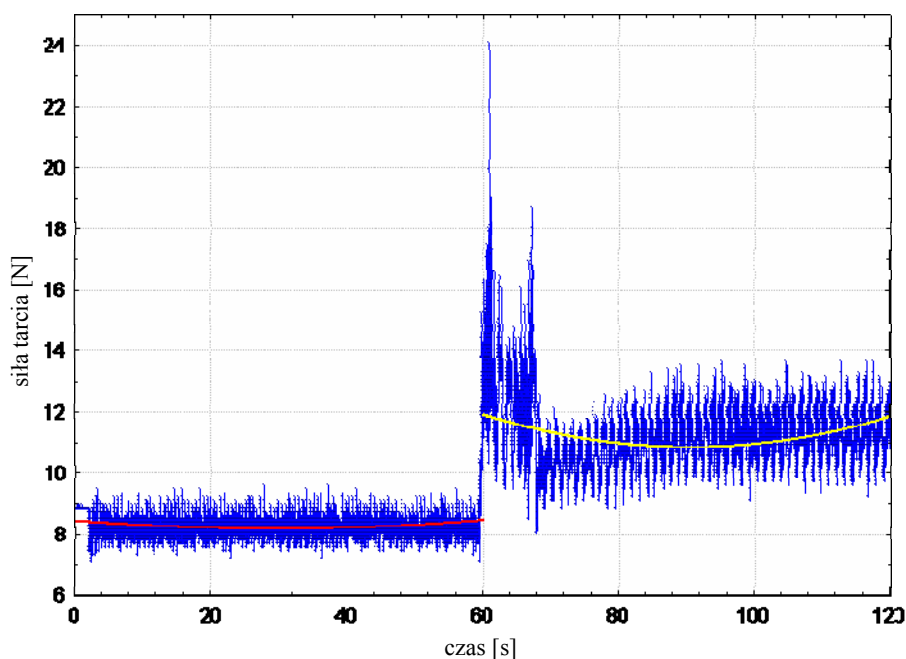
Badania stanowiskowe zostały przeprowadzone dla współpracy pary trącej w obecności oraz bez udziału twardych cząstek ściernych w następujących warunkach współpracy:

- siła działająca na wkładkę cierną: $P = 54 \text{ N}$,
- prędkość względna tarcia: $v_1 = 2,596 \text{ m/s}$, $v_2 = 3,245 \text{ m/s}$,
- temperatura otoczenia: $T = 16^\circ\text{C}$.

Zarejestrowane szeregi czasowe siły tarcia są reprezentowane przez 24 000 punktów pomiarowych.

Na rysunku 7 przedstawiono zależność siły tarcia w funkcji czasu dla tarcia podczas współpracy pary trącej w obecności twardych cząstek ściernych, $t = 60 \text{ s}$ – moment dostarczenia twardych cząstek ściernych. Próba została przeprowadzona w następujących warunkach współpracy:

- $P = 54 \text{ N}$,
- $v_1 = 2,596 \text{ m/s}$,
- $T = 16^\circ\text{C}$.



Rys. 7. Przebieg siły tarcia w funkcji czasu, $t = 60 \text{ s}$ – moment rozpoczęcia dozowania twardych cząstek ściernych. Dodatkowe linie pokazują aproksymację funkcją wielomianową

Fig. 7. Friction force development in the time's function, $t = 60 \text{ s}$ – delivery of hard abrasive particles. The additional lines show polynomial approximation

Analiza wykresu wskazuje na wyraźny wzrost siły tarcia w przypadku obecności twardych cząstek ściernych w otoczeniu pary trącej. Oprócz wzrostu siły tarcia zanotowano istotny wzrost amplitudy drgań siły tarcia (tab. 1).

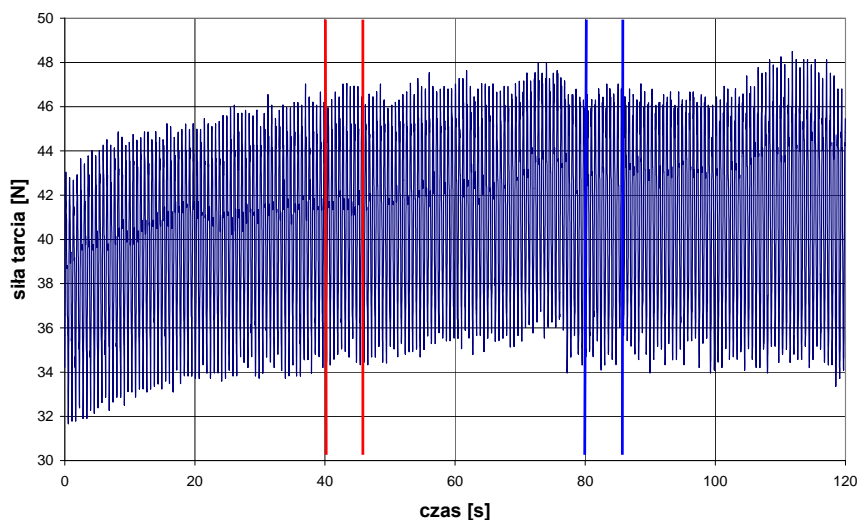
Tabela 1

**Fluktuacja siły tarcia po dostarczeniu twardych cząstek w otoczenie pary trącej.
Odchylenie standardowe siły tarcia [12]**

	Praca bez udziału cząstek stałych	Praca z udziałem cząstek stałych
Średnie odchylenie standardowe	0,91	1,76

Wykres zamieszczony powyżej (rys. 7) przedstawia wyraźny wzrost siły tarcia w momencie dostarczenia twardych cząstek ściernych w otoczenie pary trącej. Na rys. 8 znajdują się wyniki pomiarów dla innych parametrów, lecz z zastosowaniem identycznego schematu dostarczenia trwałych cząstek ściernych. Próba została przeprowadzona w następujących warunkach współpracy:

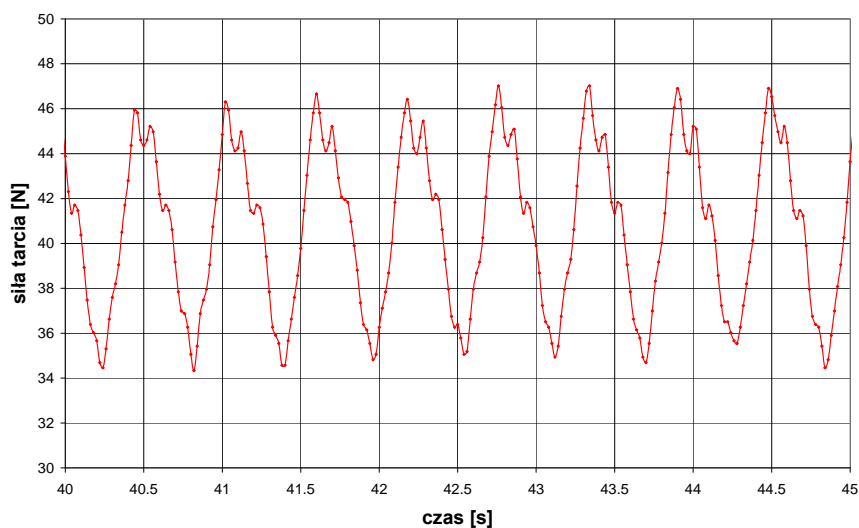
- $P = 54 \text{ N}$,
- $v_1 = 2,596 \text{ m/s}$,
- $T = 16^\circ\text{C}$.



Rys. 8. Przebieg siły tarcia w funkcji czasu, $t = 60 \text{ s}$ – moment rozpoczęcia dozowania twardych cząstek ściernych

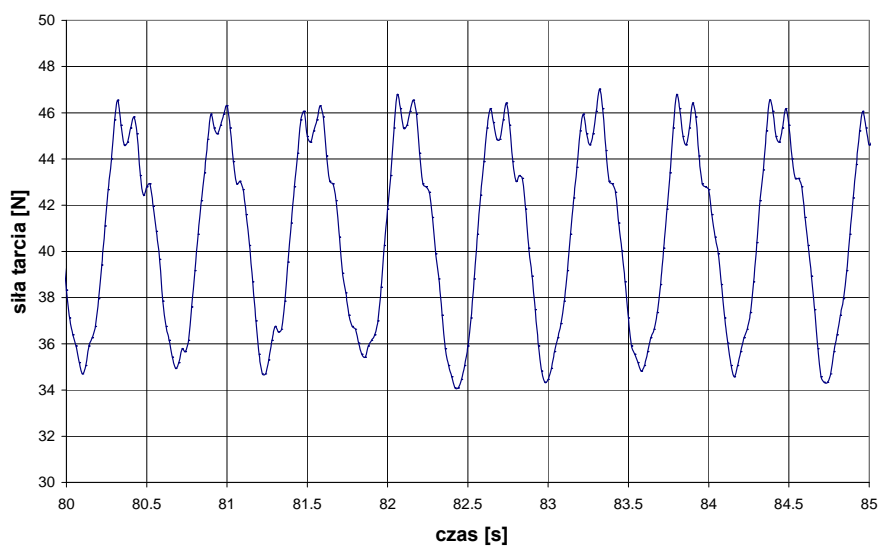
Fig. 8. Friction force development in the time's function, $t = 60 \text{ s}$ – delivery of hard abrasive particles

Klasyczna analiza wyników w tym przypadku (rys. 8), oparta na metodach statystycznych, jedynie informuje nas o nieznacznym wzroście fluktuacji siły tarcia. Analiza graficzna wykresu ujawnia pewne skomplikowane oscylacje, które do tej pory nie były brane pod uwagę w procesie interpretacji danych.



Rys. 9. Przebieg siły tarcia w funkcji czasu dla zakresu 40–45 s (brak dozowania twardych cząstek ściernych)

Fig. 9. Friction force development in the time's function for range 40–45 s (without delivery of hard abrasive particles)



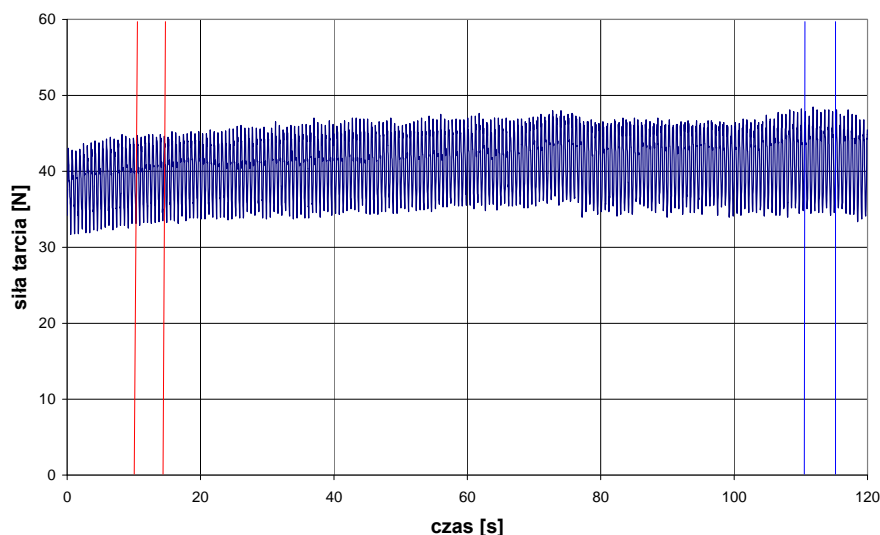
Rys. 10. Przebieg siły tarcia w funkcji czasu dla zakresu 80–85 s (z dozowaniem twardych cząstek ściernych)

Fig. 10. Friction force development in the time's function for range 40–45 s (with delivery of hard abrasive particles)

Interpretacja tego typu zachowań (oscylacji układu) jest możliwa z wykorzystaniem graficznej prezentacji wyników w przestrzeni fazowej.

4.2. Analiza wyników w przestrzeni fazowej

Na rysunku 11 przedstawiono przebieg fluktuacji siły tarcia podczas współpracy elementów trących w obecności twardych cząstek ściernych ($t = 60$ s – moment dostarczenia cząstek twardych). W odróżnieniu od wykresu z rys. 7 nie obserwujemy wyraźnego wzrostu siły tarcia spowodowanego dostarczeniem twardych cząstek ściernych w otoczenie współpracującej pary trącej. W celu czytelnego przedstawienia danych reprezentowanych przez wykres z rys. 11 w przestrzeni fazowej zostały wybrane dwa przedziały czasowe. Pierwszy dla współpracy bez obecności twardych cząstek ściernych, drugi dla współpracy w obecności twardych cząstek ściernych. Na rys. 12 przedstawiono trajektorie punktu fazowego z powyższych zakresów.

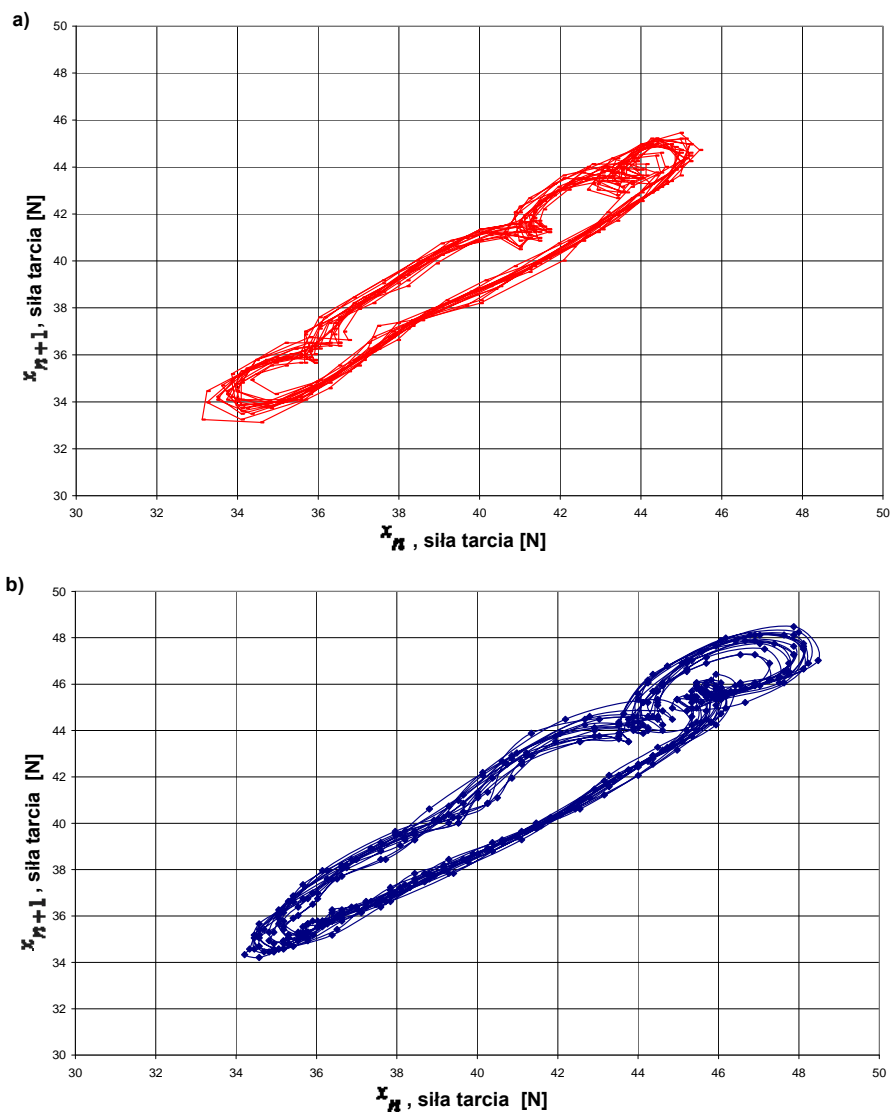


Rys. 11. Wykres przebiegu siły tarcia w funkcji czasu, $t = 60$ s – moment dostarczenia cząstek twardych

Fig. 11. Friction force development in the time's function, $t = 60$ s – delivery of hard abrasive particles

Na rysunku 12 przedstawiono przebieg kolejnych piętnastu orbit punktu fazowego dla współpracy z dozowaniem cząstek twardych (rys. 12a)) oraz bez dozowania cząstek twardych (rys. 12b)). Otrzymane trajektorie punktu fazowego przedstawiono pewne nieliniowe oscylacje.

Istotnym punktem analizy przedstawionego wykresu jest odmienny charakter orbit dla poszczególnych form współpracy elementów ciernych. Obserwacja ta sugeruje możliwość diagnozy stanu pracy węzła ciernego na podstawie długookresowej graficznej analizy parametrów pracy. Oczywiście, konieczne jest opracowanie odpowiednich kryteriów oceny i interpretacji kształtu i wymiarów otrzymanych orbit.



Rys. 12. Wykres przebiegu siły tarcia dla kolejnych orbit punktu fazowego: a) współpraca bez udziału cząstek stałych, b) w obecności cząstek stałych

Fig. 12. Diagram presents the development of friction force in phase space: a) without delivery of hard abrasive particles, b) with delivery of hard abrasive particles

4.3. Analiza dominującego wykładnika Lypunova

Dominująca wartość wykładnika Lypunova jest dodatnia zarówno w obecności cząstek ściernych, jak i bez ich obecności (tab. 2). Estymacja wykładnika Lypunova została prze-

przebieg dla dwóch różnych prędkości względnych tarcia ($v_1 = 2,596$ m/s, $v_2 = 3,245$ m/s) z zachowaniem jednakowego schematu dozowania cząstek ściernych.

Tabela 2

Dominujący wykładnik Lypunova. Estymacja za pomocą algorytmu Wolfa

	Praca z udziałem cząstek stałych	Praca bez udziału cząstek stałych
Wykładnik Lypunova, $v_1 = 2,596$ m/s	$0,856 \pm 0,027$	$0,952 \pm 0,023$
Wykładnik Lypunova, $v_2 = 3,245$ m/s	$1,166 \pm 0,034$	$1,143 \pm 0,035$

Obserwacja ta dowodzi właściwości chaotycznych badanego ciągu reprezentującego proces tarcia. Na tej podstawie można implikować stwierdzenie, że proces tarcia jest chaotycznym układem dynamicznym. Stwarza to możliwość uzyskania informacji na temat charakteru procesu, w odróżnieniu od testów losowości, które dostarczają jedynie informacji na temat losowości szeregu czasowego.

5. Wnioski

Na podstawie literatury przedmiotu oraz analizy wyników badań laboratoryjnych można przedstawić następujące wnioski:

- proces tarcia jest złożonym zjawiskiem fizycznym, które trudno jest opisać klasycznymi metodami matematycznymi,
- opis procesu tarcia za pomocą narzędzi probabilistycznych nie daje informacji na temat charakteru i nielosowości procesu,
- dominujący wykładnik Lypunova dla wyżej wymienionych warunków badań tarcia jest dodatni,
- dodatniość wykładnika Lypunova umożliwia predykcje stanu układu w krótkim okresie,
- proces tarcia jako układ chaotyczny może być modelowany za pomocą dynamiki symbolicznej.

Oczywiście, pozostało wiele problemów wymagających wyjaśnienia w przyszłych badaniach. Do ważniejszych trzeba zaliczyć określenie obszarów tarcia, w których proponowana metoda może być zastosowana oraz porównanie proponowanej metody z metodami obecnie stosowanymi.

Literatura

- [1] Bollt E.M., *Review of chaos communication by feedback control of symbolic dynamics*, USA 2001.
- [2] Devaney R.L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, Westview Press, Boulder, CO 2003.
- [3] Dorfman J.R., *Wprowadzenie do teorii chaosu*, PWN, Warszawa 2001.
- [4] Galias Z., *Metody arytmetyki przedziałowej w badaniach układów nieliniowych*, AGH, Kraków 2003.
- [5] Kaczyński T., Mischaikow K., Mrozek M., *Computational Homology*, Springer, New York 2004.
- [6] Katok A., Hasselblatt B., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge 1995.
- [7] Mischaikow K., Mrozek M., Reiss J., Szymczak A., *Construction of Symbolic Dynamics from Experimental Time Series*, Physical Review Letters, 1999.
- [8] Morrison F., *Sztuka modelowania układów dynamicznych*, WNT, Warszawa 1996.
- [9] Oprocha P., *Dynamika topologiczna i symboliczna z czasem wielowymiarowym*, rozprawa doktorska, UJ, Kraków 2005.
- [10] Ott E., *Chaos w układach dynamicznych*, WNT, Warszawa 1997.
- [11] Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D., *Granice chaosu. Fraktale*, PWN, Warszawa 2002.
- [12] Polak A., Grzybek J., Oleksowicz S., *Friction processes in automotive disc brakes in the presence of hard abrasive particles (COST-TS9)*, Ljubljana, Slovenia, ECOTRIB 2007.
- [13] Polak A., Grzybek J., Oleksowicz S., *The system for observation of tribological phenomena of vehicle disc brake surfaces*, QSEV, Kraków 2007.
- [14] Polański Z., *Planowanie doświadczeń w technice*, PWN, Warszawa 1984.
- [15] Szczerek M., Wiśniewski M., *Tribologia i Tribotechnika*, PTT, Radom 2000.